

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين متميزتين وليكن  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين حيث  $\alpha + \beta \neq 0$ .  
نسمي مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $\alpha$  و  $\beta$  على الترتيب النقطة  $G$  حيث:

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

## ملاحظات:

- ★ إذا كانت نقطة  $A$  بالعدد الحقيقي  $\alpha$  الثنائية  $(A; \alpha)$  تسمى نقطة مثقلة.
- ★ الجملة  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$  تسمى جملة نقطتين مثقلتين (يُمكن تعريف وبنفس الطريقة جملة  $n$  نقطة مثقلة).
- ★ النقطة  $G$  هي مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ .
- ★ إذا كانت  $A$  منطبقة على  $B$  نحصل على  $(\alpha + \beta) \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$  وبما أن  $\alpha + \beta \neq 0$  فإن  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$  أي:  $G$  ينطبق على  $A$ .
- ★ إذا كان  $\alpha + \beta = 0$  أي:  $\alpha = -\beta$  العلاقة تصبح  $\alpha (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{0}$  وهذا غير ممكن إذا كان  $\alpha \neq 0$  و  $A \neq B$  والنقطة  $G$  غير موجودة. مثلاً إذا كان  $\alpha = 1$  و  $\beta = -1$  وإذا كان  $A \neq B$  الجملة  $\{(A; 1); (B; -1)\}$  ليس لها مرجح.

## نتيجة

إذا كان  $\alpha = \beta$  نحصل  $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$  والنقطة  $G$  منتصف القطعة  $[AB]$  تسمى عندئذ  $G$  مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين  $A$  و  $B$ . وفي هذه الحالة نأخذ  $\alpha = \beta = 1$ .

## مبرنة 1

إذا كانت النقطة  $G$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $\alpha$  و  $\beta$  على الترتيب فإن النقطة  $G$  وحيدة.

**برهان.**  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$  معناه  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$  (علاقة شال)  
ومنه  $(\alpha + \beta) \overrightarrow{GA} = -\beta \overrightarrow{AB}$

بما أن  $\alpha + \beta \neq 0$  فإن  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$  .  $A$  و  $B$  نقطتان ثابتتان إذا  $G$  وحيد.

□

## ملاحظات مهمة:

- ◁ نقطة وحيدة من المستقيم  $(AB)$  فاصلتها  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  في المعلم  $(A; B)$ .
- ◁ إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  من نفس الإشارة فإن  $G$  تكون من القطعة  $[AB]$ .
- ◁ إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  مختلفين في الإشارة فإن  $G$  تكون خارج القطعة  $[AB]$ .
- ◁ تكون  $G$  أقرب من النقطة ذات المعامل الأكبر بالقيمة المطلقة مثل الميزان.

## مثال (1)

أنشئ مرجح كل جملة من الجمل التالية:

1.  $P$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, 6); (B, -2)\}$ .
2.  $K$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, 3); (B, 1)\}$ .
3.  $L$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, 2); (B, 5)\}$ .
4.  $Q$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, -2); (B, 5)\}$ .

### خواص:

- (1) إذا كانت النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  فإن  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$  حيث  $k$  عدد حقيقي غير معدوم.
- (2) إذا كانت النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  فإن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة.

### برهان.

1.  $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$  بضرب الطرفين في العدد الحقيقي غير المعدوم  $k$  نحصل على:  
 $k\alpha \vec{GA} + k\beta \vec{GB} = \vec{0}$  ونعلم أن  $\alpha + \beta \neq 0$  وبما أن  $k \neq 0$  فإن  $k\alpha + k\beta \neq 0$  وهذا يعني صحة الخاصية الثانية.
2. من المبرهنة 01 السابقة نعلم أن  $\vec{GA} = -\frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$  معناه أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $G$  على استقامة واحدة.

□

### مبرهنة (2)

إذا كانت النقطة  $G$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $\alpha$  و  $\beta$  على الترتيب فإن من أجل كل نقطة  $M$

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$$

### برهان.

من أجل كل نقطة  $M$ :  $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \alpha \vec{MG} + \alpha \vec{GA} + \beta \vec{MG} + \beta \vec{GB}$  (علاقة شال)  
 وبما أن  $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$  فإن  $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$ .

□

**ملاحظة:** إذا كان المرجح  $G$  منتصف القطعة  $[AB]$  فإن من أجل كل نقطة  $M$

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MG}$$

### مرجح ثلاث نقط

#### تعريف

$A$ ،  $B$  و  $C$  ثلاث نقط:  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  ثلاث أعداد حقيقية حيث  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .  
 نسمي مرجح النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  على الترتيب النقطة  $G$  حيث:  $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$ .

الأستاذ: رحاب عبد الباسط |

## مبرهنة وخوارزمية:

إذا كانت النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  ، فإن :

$$\star G \text{ وحيدة لأن } (\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}) \text{ إنشاء } G.$$

$$\star \text{ أجل كل نقطة من } M \text{ المستوي ، } \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{MG}.$$

$\star$  النقطة  $G$  هي مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$  ، حيث  $k$  عدد حقيقي.

أي: (إذا ضربنا المعاملات في نفس العدد الحقيقي لا يتغير المرجح).

$\star$  إذا كان  $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$  فإن  $G$  تسمى مركز المسافات المتساوية للنقط  $A$  ،  $B$  و  $C$ .

$$\text{ونأخذ: } \alpha = \beta = \gamma = 1$$

وإذا كانت النقطة  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة فإن  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

## خاصية التجميع:

### مبرهنة 3

$G$  مرجح النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha$  ،  $\beta$  و  $\gamma$  على الترتيب.

إذا كان  $\alpha + \beta \neq 0$  وكانت النقطة  $D$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $\alpha$  و  $\beta$  على الترتيب.

فإن:  $G$  مرجح النقطتين  $D$  و  $C$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha + \beta$  و  $\gamma$  على الترتيب.

## إحداثيات مرجح ثلاثي نقط:

### مبرهنة 4

المستوي منسوب إلى معلم

. لتكن النقطة  $G$  مرجح النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha$  ،  $\beta$  و  $\gamma$  على الترتيب. نضع  $A(x_A; y_A)$  ،

$B(x_B; y_B)$  و  $C(x_C; y_C)$  إحداثيا النقطة  $G$  هي  $(x_G; y_G)$  حيث:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

### ملاحظة:

إذا كانت النقطة  $G$  مرجح النقط  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $\alpha$  و  $\beta$  على الترتيب.

وكان  $A(x_A; y_A)$  ،  $B(x_B; y_B)$  و  $G(x_G; y_G)$  فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

## حالات خاصة:

(1) إذا كانت النقطة  $G$  منتصف القطعة  $[AB]$  فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_G = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

(2) إذا كانت النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

## مرجح عدة نقطه $n$ (مرجح $n$ نقطة حيث $n > 3$ ):

تعريف:

لتكن  $A_1, A_2, \dots, A_n$  نقطة ( $n > 3$ ) مرفقة بالمعاملات  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  على الترتيب حيث  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$

نسمي مرجح النقط  $A_1, A_2, \dots, A_n$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  النقطة  $G$  حيث

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$



## تفسير

تعيين مجموعة نقطه باستعمال المرجح:

$ABC$  مثلث من المستوي.  $\alpha, \beta, \gamma$  ثلاثة أعداد حقيقية حيث  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .

ليكن  $G$  مرجح النقط  $A, B, C$  و  $C$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha, \beta, \gamma$  على الترتيب.

الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي  $k$  المجموعة  $(\Gamma_k)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق:

$$\|\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}\| = k$$

1. أكتب الشعاع  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$  بدلالة الشعاع  $\overrightarrow{MG}$  ثم بين أن  $MG = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|}$ .

2. ناقش تبعاً لقيم العدد الحقيقي  $k$  طبيعة المجموعة  $(\Gamma_k)$  محدداً عناصرها الهندسية.

الحل:

كتابة الشعاع  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$  بدلالة الشعاع  $\overrightarrow{MG}$ :

نستعمل علاقة شال (ندخل النقطة  $G$ ):

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{MG} + \gamma \overrightarrow{GC} \quad (1)$$

بما أن  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  فإن  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

ومنه (1) تصبح:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \alpha \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{MG} + \gamma \overrightarrow{MG} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} \quad \text{إذن:}$$

$$\text{تبيين أن: } MG = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|}$$

لدينا:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$

ومنه:  $\|\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}\| = k$  تكافئ:  $\|(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}\| = k$

أي:  $|\alpha + \beta + \gamma| \|\overrightarrow{MG}\| = k$

$$\text{إذن: } MG = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|} \quad \text{لأن: } (\alpha + \beta + \gamma \neq 0).$$

مناقشة تبعاً لقيم العدد الحقيقي  $k$  طبيعة المجموعة  $(\Gamma_k)$  محدداً عناصرها الهندسية:

الحالة الأولى: (من أجل  $k < 0$ ) نجد  $(\Gamma_k) = \{\}$  (لأن الموجب لا يساوي السالب).

الحالة الثانية: (من أجل  $k = 0$ ) نجد  $MG = 0$  أي  $M = G$  ومنه  $M$  تنطبق على  $G$  إذن:  $(\Gamma_k) = \{G\}$ .

الحالة الثالثة: (من أجل  $k > 0$ ) نجد:  $MG = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|} > 0$

إذن: المجموعة  $(\Gamma_k)$  هي دائرة مركزها  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

ونصف قطرها:  $r = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|}$

الأستاذ: رحاب عبد الباسط |

1. تبيين أن مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 6$  دائرة يُصلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا:  $1 - 2 + 3 \neq 0$  لتكن  $G$  مرجح الجملة المثلثة  $\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$  تكافئ:  $\|(1 - 2 + 3)\vec{MG}\| = 6$  أي:  $MG = 3$ .

إذن: مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 6$  هي دائرة مركزها  $G$  ونصف قطرها  $r = 3$ .

2.  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين من المستوي حيث  $CA = CB = 1$

تعيين وإنشاء مجموعة النقط  $M$  من المستوى حيث:  $\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \sqrt{5}$

لدينا:  $-2 + 1 - 3 \neq 0$  لتكن  $I$  مرجح الجملة المثلثة  $\{(A, -2); (B, 1); (C, -3)\}$  تكافئ:  $\|(-2 + 1 - 3)\vec{MI}\| = \sqrt{5}$  أي:  $MI = \frac{\sqrt{5}}{4}$ .

إذن: مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \sqrt{5}$  هي دائرة مركزها  $I$  ونصف قطرها  $r = \frac{\sqrt{5}}{4}$ .

3.  $ABC$  مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث  $AB = AC = BC = 1$

تعيين وإنشاء مجموعة النقط  $M$  من المستوى حيث:  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \sqrt{3}$

لدينا:  $1 - 1 + 2 \neq 0$  لتكن  $J$  مرجح الجملة المثلثة  $\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$  تكافئ:  $\|2\vec{MJ}\| = \sqrt{3}$  أي:  $MJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

إذن: مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \sqrt{3}$  هي دائرة مركزها  $J$  ونصف قطرها  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

4.  $ABC$  مثلث

تعيين مجموعة النقط  $M$  من المستوى حيث:  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MB}\|$

لدينا:  $1 + 1 + 2 \neq 0$  لتكن  $P$  مرجح الجملة المثلثة  $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

ولدينا:  $1 + 1 \neq 0$  لتكن  $Q$  مرجح الجملة المثلثة  $\{(A, 1); (B, 1)\}$

$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MB}\|$  تكافئ:  $\|4\vec{MP}\| = 2\|2\vec{MQ}\|$  أي:  $MP = MQ$

إذن: مجموعة النقط  $M$  من المستوى حيث:  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MB}\|$  هي محور القطعة المستقيمة  $[PQ]$ .

5.  $ABC$  مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث  $AB = AC = BC = \alpha$

لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

6. التحقق أن النقطة  $B$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$ :

نضع  $M = B$  نجد:  $\|\vec{BA} - 4\vec{BB} + \vec{BC}\| = \|\vec{BA} - 2\vec{BB} + \vec{BC}\|$  ومنه:  $\|\vec{BA} + \vec{BC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$  إذن:  $B \in (\Gamma)$ .

7. تبين أن الشعاع  $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$  مستقل عن النقطة  $M$ : (بمجموع المعاملات يساوي 0)

باستعمال علاقة شال ندخل  $A$  نجد :

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AB} + \vec{MA} + \vec{AC} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = -2\vec{AB} + \vec{AC} \text{ إذن :}$$

وبالتالي : الشعاع  $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$  مستقل عن النقطة  $M$ .

8. ليكن  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, 1); (B, -4); (C, 1)\}$ .

تبين أن  $GM = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$  :

$$\| \vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC} \| = \| \vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} \| \text{ تكافئ : } \| \vec{BA} + \vec{BC} \| = \| -2\vec{MG} \| \text{ ومنه :}$$

$$2GM = \| \vec{BA} + \vec{BC} \|$$

$$\| \vec{BA} + \vec{BC} \| = \alpha \sqrt{3} \text{ باستعمال نظرية فيثاغورث نجد :}$$

$$\text{ومنه : } GM = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$$

استنتاج صيغة المجموعة  $(\Gamma)$  من خلال عناصرها المميزة :

من المساواة  $GM = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$  نستنتج أن المجموعة  $(\Gamma)$  دائرة مركزها  $G$  ونصف قطرها  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

مستقيم أولار (Euler) 189 :

المستقيم الذي يشمل النقط  $O$  ،  $G$  و  $H$  يسمى مستقيم أولار (Droite d'Euler) للمثلث  $ABC$ .  
حيث :

•  $O$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

•  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

•  $H$  تقاطع الارتفاعات في المثلث  $ABC$ .

حالة خاصة:

إذا كان المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع فإن النقط الثلاثة  $O$  ،  $G$  و  $H$  منطبقة على بعضها.