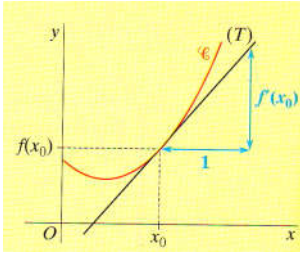


مجلة المفيد فى الرياضيات

للأستاذ بلجودى حمـو

بكالوريا 2022 شعب علمية



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

الاشتقاقية

👉 تتضمن ما يلي :

- ❖ ملخص الدرس .
- ❖ سلسلة تمارين .
- ❖ واجب .
- ❖ حل بعض الأسئلة من السلسلة .



بكالوريا 2022

الاشتقاقية

← العدد المشتق:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عدنان حقيقيان من I مع $h \neq 0$. إذا كانت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$ حيث A عدد حقيقي فإن الدالة f تقبل الاشتقاق عند a . يسمى A العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز له بـ $f'(a)$.

← الدالة المشتقة:

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I وتسمى الدالة $f' : x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

← التفسير الهندسي (مماس منحني دالة): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

❖ المشتقات والعمليات:

$f(x)$	$f'(x)$	من x من أجل كل I ,
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$, $(u(x))^n$	$n \times u' \times u^{n-1}$	
$n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(u(x))^n}$	$-\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$	$u \neq 0$
$\sin(u(x))$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u(x))$	$-u' \times \sin(u)$	

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
الثابت الحقيقي a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n و $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u + v$	ku	uv	$\frac{u}{v}, (v \neq 0)$
المشتقة	$u' + v'$	ku'	$u' \times v + v' \times u$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}, v \neq 0$

لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a نحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h}$ أو $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

❖ طرق:

فإن	إذا كان
f تقبل الاشتقاق عند a والمنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا معامل توجيهه l .	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l$ (l عدد حقيقي)
f لا تقبل الاشتقاق عند a والمنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور الترتيب.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = +\infty$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = -\infty$
الدالة f تقبل الاشتقاق عند a من اليمين و من اليسار ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند a والمنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a نصفي مماسين معامل توجيههما l و l' .	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l' \neq l$ كان

← لإيجاد $f'(a)$ معامل توجيه المماس عند a بياننا نختار نقطتين من هذا المماس و لتكن مثلا A و B حيث $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ فيكون :

$$f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \Leftrightarrow \quad \text{إذا كان المماس عند } a \text{ أفقيا فإن } f'(a) = 0.$$

تمارين

التمرين -1-

في كل حالة من الحالات التالية، أدرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة على المجموعة D عند a مفسرا النتيجة بيانيا:

$D = \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = x-2 + \frac{2}{x-1}$	$D = [3; +\infty[, f(x) = \sqrt{x-3}$	$D = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$	$D = \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(x)$
$a = 2$	$a = 4 \quad a = 3$	$a = 2$	$a = 0$

التمرين -2-

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

أ - تحقق أنه من أجل كل h غير معدوم يكون : $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$

ب - استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 مبيّنا $f'(1)$.

التمرين -3-

f الدالة المعرفة على $[-2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2}$

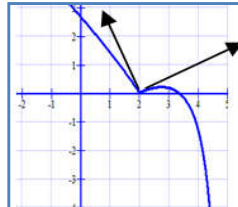
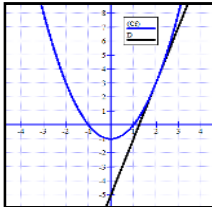
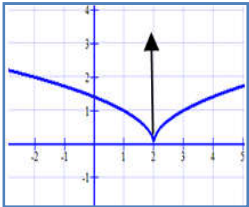
أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ ، هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين -2 ؟ ، فسر هندسيا إجابتك .

التمرين -4-

نعتبر الدالة f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

أ - بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 .

ب - استنتج أن الدالة f مستمرة عند 1 .



التمرين -5-

في كل حالة (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f :

أ - هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 .

ب - عين العدد المشتق في حالة وجوده .

التمرين -6-

عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية على D :

$D =]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x-1} \bullet 3$	$D = \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x - 2) \bullet 2$	$D = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2 \bullet 1$
$D = \left[\frac{5}{3}; +\infty[, f(x) = \sqrt{3x-5} \bullet 6$	$D = \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x - 3)^3 \bullet 5$	$D =]1; +\infty[, f(x) = 2x - 1 + \frac{x}{x-1} \bullet 4$
$D =]0; +\infty[, f(x) = (2x-3)\sqrt{x} \bullet 9$	$D = \mathbb{R}, f(x) = \sin(x^2 + 5) \bullet 8$	$D =]-\infty; 1[, f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^3} \bullet 7$
$D = \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$	$D = \mathbb{R} - \{-1\}, f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \bullet 11$	$D =]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \bullet 10$

أدرس اتجاه تغير f في الحالات 1 ، 3 ، 5 ، 6 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 .

التمرين -7-

f الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد (O, I, J) .

المنحني (C_f) يشمل النقطة $A(0; -1)$ ، يقبل في النقطة $B(1; -3)$ مماسا أفقيا .

نفرض أن f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^3 + bx + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .

أحسب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a و b .

بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a = 1, b = -3, c = -1$

التمرين -8-

1. أكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$f(x) = \sin x$	$f(x) = \frac{1}{1+x}$	$f(x) = \sqrt{1+x}$	$f(x) = (1+x)^3$
-----------------	------------------------	---------------------	------------------

2. برّر التقريب التآلفي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية : $(1+x)^3 \approx 1+3x$ ، $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$ ، $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ ، $\sin x \approx x$.

3. أعط تقريبا تآلفيا لعبارة $f(a+h)$ من أجل $|h|$ قريب من 0 ؛ $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ و $a = 2$.

التمرين -9-

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

أ- بين أن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

ب- بين أن منحنى الدالة f يقبل مماسا معامل توجيهه -3 .

التمرين -10-

1. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$ عيّن مشتقة الدالة f على $]0; +\infty[$.

2. استنتج الدوال المشتقة لكل من الدوال g, h و k حيث : $g(x) = f(x^2)$ ، $h(x) = f(\sqrt{x})$.

التمرين -11-

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; 5]$

المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى عند النقطتين اللتين

فاصلتهما 1 و $\frac{16}{9}$. بقراءة بيانية عيّن $f(1)$ و $f'(1)$.

3. نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 5]$: $f(x) = a + bx(2 - \sqrt{x})$

a و b عدنان حقيقيان نريد حسابهما .

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 5]$ ، $f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$.

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال 1 عيّن a و b .

التمرين -12-

الشكل الموالي هو التمثيل البياني $\mathcal{C}$ لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال

$[-3; 3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$

المنحنى $\mathcal{C}$ يحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم O ، ويشمل النقطة $A(-3; 9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1

مماسا أفقيا و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA) ؟

2. نفرض أن f معرفة على $[-3; 3]$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

حيث a, b, c و d أعداد حقيقية .

أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a = \frac{1}{3}$ ، $b = 1$ ، $c = -3$ و $d = 0$

التمرين -13-

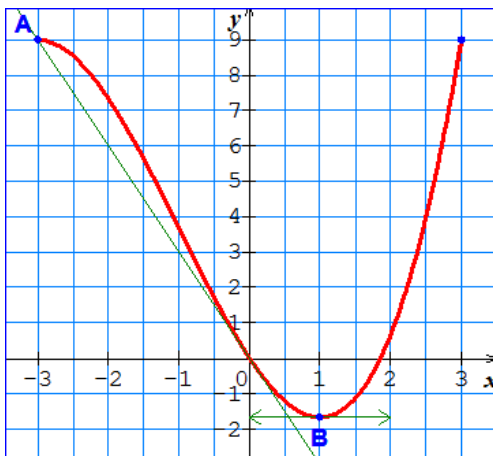
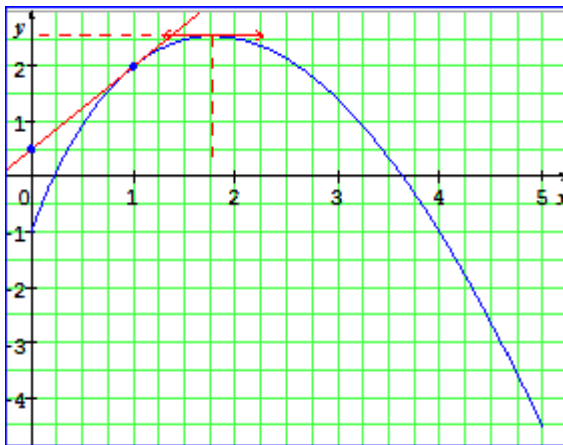
جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على $D_u = [-2; 3]$ عيّن إشارة $u(x)$.

(2) نعتبر الدوال f, g, h و k المعرفة بـ : $f = u^2$ ؛ $g = u^3$ ؛ $h = \frac{1}{u}$ ؛ $k = \sqrt{u}$

أ. عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال f, g, h و k .

ب. عبّر عن كل من $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$.

ج. استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال f, g, h و k .



x	-2	-1	0	1	2	3
$u'(x)$	+	0	-	-	0	+
$u(x)$	2	3	0	-1	0	2

واجب

التمرين -1-

f الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$. (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم .

1. عين الثوابت الحقيقية a ، b ، c و d بحيث يكون ؛ من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$.

2. استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

3. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

4. احسب الدالة المشتقة للدالة f على $\mathbb{R} - \{-1\}$.

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حولا في المجال $] -1; 0]$.

التمرين -2-

f دالة معرفة بتمثيلها البياني (C) كما هو موضح :

المستقيمان (D) ، (T) هما ؛ على الترتيب ؛ المماسان للمنحنى (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاها 0 ، 1 .

1. حدد القيم التالية : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$.

2. اكتب معادلة لكل من المماسين (D) ، (T) .

التمرين -3-

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = |x-2| + \frac{1}{x-1}$. (C) هو تمثيلها البياني في م م إلى م م م $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2. احسب نهاية الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف .

3. ادرس استمرارية الدالة f عند العدد 2 .

4. احسب كلا من : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ - ماذا تستنتج ؟ - فسر النتيجة هندسيا .

5. اكتب معادلة لكل من (Δ_1) ، (Δ_2) المماسين للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

التمرين -4-

أدرس اتجاه تغير f في الحالات التالية :

$D =]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1} \bullet 3$	$D = \mathbb{R} , f(x) = (x^2 + 2x - 1)(2x - 2) \bullet 2$	$D = \mathbb{R} , f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2 \bullet 1$
$D = \mathbb{R} - \{1\} , f(x) = \frac{2x-3}{x-1} \bullet 6$	$D = \mathbb{R} , f(x) = (x^2 - 4)^3 \bullet 5$	$D =]3; +\infty[, f(x) = \sqrt{3x-9} \bullet 4$

الأستاذ : بلجودي حمو

حل بعض الأسئلة من تمارين السلسلة :

التمرين -1-

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة على المجموعة $D = \mathbb{R}^*$ عند 1 مفسرا النتيجة بيانيا: $f(x) = |1-x| + \frac{2}{x}$ $D = \mathbb{R}^*$

$$f(x) = |1-x| + \frac{1}{x} = \begin{cases} 1-x + \frac{1}{x}; x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\\ x-1 + \frac{1}{x}; x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-(1+h) + \frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1-h + \frac{1}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h - 1 + 1}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-2}{h+1} = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+1-1 + \frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-1 + \frac{1}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 1 + 1}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h+1} = 0$$

الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و عددها المشتق عند 1 من اليمين هو -2 و عددها المشتق عند 1 من اليسار هو 0 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1.
هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 نصفي مماسين معاملا توجيهيهما -2 و 0 .

التمرين -6-

عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية على D :

$D =]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x-1} \bullet 3$	$D = \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x - 2) \bullet 2$	$D = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2 \bullet 1$
--	--	--

الحل

1. f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 2x^2 - 6x$

2. $D = \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x - 2) \bullet 2$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)'(x - 2) + (x - 2)'(x^2 + 2x - 1) = (2x + 2)(x - 2) + 1(x^2 + 2x - 1) = 2x^2 - 4x + 2x - 4 + x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 5$$

3. $D =]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x-1} \bullet 3$ f قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ و لدينا:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 2)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{(2x-1)(x-1) - 1(x^2 - x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

حل التمرين -7-

1. حساب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a و b :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 3ax^2 + b$

2. تبين أن : $a=1, b=-3, c=-1$:

المنحني (C_f) يشمل النقطة $A(0; -1)$ معناه $f(0) = -1$

و يقبل في النقطة $B(1; -3)$ مماسا أفقيا معناه $f'(1) = 0$ و $f(1) = -3$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = -3 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = -3 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} a+b+c = -1 \\ 3a+b = 0 \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} a+b = -2 \dots (2) \\ 3a+b = 0 \dots (3) \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} c = -1 \\ a+b = -2 \dots (2) \\ 3a+b = 0 \dots (3) \end{cases} \text{ نضرب طرفي المعادلة (1) في -1 ثم}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases} \text{ نجمع (1) و (2) ينتج : } 2a = 2 \text{ و منه } a = 1. \text{ نعوض قيمة } a \text{ في المعادلة (1) نجد } b = -3, \text{ إذن : } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

