

إختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

التمرين الأول (5ن):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = 0$ لدينا : a عدد حقيقي موجب تماما .

(2) المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لمنحنى الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 4x - 2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = 1$

(4) (Γ) المنحنى الممثل للدالة $e^x \mapsto x$ في المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
يوجد مماس وحيد للمنحنى (Γ) يمر من مبدأ المعلم .

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = 1$

التمرين الثاني (8ن):

h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $h(x) = x - 1 + \frac{1-x}{x^2}$

(1) (C_h) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .

(3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_h) .

ب- أدرس وضعية المستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(5) بين أن للمنحنى (C_h) نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .

(6) المستقيم ذو المعادلة $y = x + \alpha$. حيث α عدد حقيقي .

عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون (T) مماس لـ (C_h) في نقطة يطلب تعيين إحداثيها .

(7) تحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $h(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)$. استنتج نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع محور الفواصل .

(8) أنشئ كلامن (Δ) ، (T) و (C_h) .

(9) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $v(x) = h(x^2)$.

أدرس تغيرات الدالة v ، ثم شكل جدول تغيراتها .

التمرين الثالث (7ن):

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$ وأن: $1 + xe^x > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{1 + xe^x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة $2cm$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجةين بيانياً. (يعطى $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{-(x+1)e^x}{(1 + xe^x)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الترتيب.

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - (-x + 1) = \frac{xe^x g(x)}{1 + xe^x}$.

ج- حدد الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) . ماذا تستنتج؟

(4) أنشئ كلا من (T) و (C_f) .

(5) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = -m + 1$.

(6) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x) = \frac{x}{e^x - x}$. (C_k) تمثيلها البياني.

أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $k(x) = f(-x) - 1$.

ب- اشرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) اعتماداً على المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه.

تصحيح الإختبار الأول في مادة الرياضيات

حل مقترح للتمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

(1) خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{2x} = \sqrt{a}$$

(2) صحيح .

التبرير :

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$u(2-x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)}{2(2-x)^2 - 4(2-x) - 2} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 4 + 2x}{2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 4x - 2} = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 4x - 2} = u(x)$$

(3) خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi)}{x-1} = \sin(\pi x)'(1) = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

(4) صحيح .

التبرير :

ليكن (T_{x_0}) مماس المنحنى (Γ) في النقطة ذات الفاصلة x_0 . لدينا : معادلة (T_{x_0}) من الشكل : $y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}$.

(T_{x_0}) يشمل المبدأ معناه $0 = e^{x_0}(-x_0) + e^{x_0}$ أي $0 = e^{x_0}(1 - x_0)$ وبالتالي $x_0 = 1$.

إذن يوجد مماس وحيد للمنحنى (Γ) يمر من مبدأ المعلم وهو المماس في النقطة ذات الفاصلة 1 ومعادلة له $y = ex$.

(5) خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xe^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) + e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 2$$

حل مقترح للتمرين الثاني:

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = x - 1 + \frac{1-x}{x^2}$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty , \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

(2) أ- تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_h) .

لدينا : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [h(x) - (x - 1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x^2} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_h) .

ب- دراسة وضعية المستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

لدينا : $h(x) - (x - 1) = \frac{1-x}{x^2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - x$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h(x) - y$	+	+	0	-
الوضع النسبي	(C_h) فوق (Δ)	(C_h) فوق (Δ)	(C_h) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 0)$	(C_h) تحت (Δ)

(3) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

$$h'(x) = 1 + \frac{-x \cdot x^2 - 2x \cdot (1-x)}{x^4} = \frac{x^4 - x^3 - 2x + x^2}{x^4} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة h :

لدينا : $x^2 + x + 2 > 0$ لأن $\Delta = -7 < 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ من إشارة $x(x-1)$

وبالتالي الدالة h متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $[1; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]0; 1]$.

جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	-	0	+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

(4) تبيان أن للمنحنى (C_h) نقطة إنعطاف :

الدالة h' قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

$$h''(x) = \frac{x^3 - 3x^2(x-2)}{x^6} = \frac{x - 3(x-2)}{x^4} = \frac{-2x + 6}{x^4}$$

إشارة $h''(x)$ من إشارة $-2x + 6$ ومنه النقطة $w\left(3; \frac{16}{9}\right)$ هي نقطة إنعطاف.

(5) المستقيم ذو المعادلة $y = x + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .
 تعيين قيمة العدد α بحيث يكون (T) مماساً لـ (C_h) في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها .
 لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $h'(x) = 1$.

$$h'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = 1 \text{ تكافئ } x^3 + x - 2 = x^3 \text{ تكافئ } x = 2 .$$

معادلة مماس المنحنى في النقطة ذات الفاصلة 2 من الشكل $y = h'(2)(x - 2) + h(2)$ أي $y = x - \frac{5}{4}$.

إذن من أجل $\alpha = -\frac{5}{4}$ يكون (T) مماساً لـ (C_h) في النقطة $A\left(2; \frac{3}{4}\right)$.

(6) التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $h(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

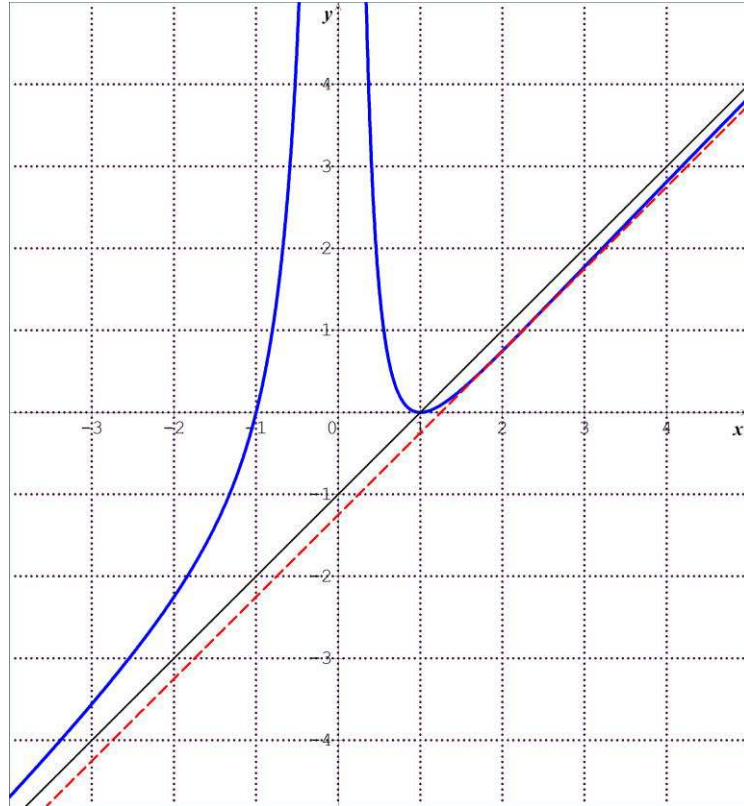
لدينا : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $h(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x - 1 + \frac{1-x}{x^2} = h(x)$.

(7) استنتاج نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع حامل محور الفواصل .

فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة : $h(x) = 0$.

$$h(x) = 0 \text{ تكافئ } \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \text{ تكافئ } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{ تكافئ } x = 1 \text{ أو } x = -1 .$$

(8) الرسم :



(9) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $v(x) = h(x^2)$.

دراسة تغيرات الدالة v :

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ و $v'(x) = 2xh'(x^2)$.

من أجل $0 < x^2 \leq 1$ ، أي $x \in]0; 1[$ و $x \in [-1; 0[$ يكون $h'(x^2) \leq 0$.

من أجل $x^2 \geq 1$ ، أي $x \in]1; +\infty[$ و $x \in]-\infty; -1]$ يكون $h'(x^2) \geq 0$.

جدول تغيرات الدالة v .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$v'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$v(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$

حل مقترح للتمرين الثالث:

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 1 - e^{-x}$.

$g'(x) \geq 0$ تكافئ $1 - e^{-x} \geq 0$ تكافئ $e^0 \geq e^{-x}$ تكافئ $0 \geq -x$ أي: $x \geq 0$.

$g'(x) \leq 0$ تكافئ $1 - e^{-x} \leq 0$ تكافئ $e^0 \leq e^{-x}$ تكافئ $0 \leq -x$ أي: $x \leq 0$.

وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $]0; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty; 0]$.

(2) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

لدينا: $g(0) = 0$ قيمة حدية صغرى للدالة g وبالتالي: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + xe^x > 0$.

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$ أي $x + e^{-x} \geq 1$ ومنه $xe^x + 1 \geq e^x$ وبالتالي $xe^x + 1 > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{1 + xe^x}$.

(1) النهايات:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

التفسير:

• المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

• المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{-(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = -\frac{e^x + xe^x}{(1+xe^x)^2} = \frac{-(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$.

بـ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; -1]$ ومتناقصة على المجال $[-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{1}{1-e^{-1}}$	0

(3) أـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الترتيب .

لدينا : معادلة (T) من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $(T) : y = -x + 1$.

بـ التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) - (-x + 1) = \frac{1}{1 + xe^x} - (-x + 1) = \frac{1 - (-x + 1)(1 + xe^x)}{1 + xe^x} = \frac{x + x^2 e^x - xe^x}{1 + xe^x} = \frac{xe^x(e^{-x} + x - 1)}{1 + xe^x} = \frac{xe^x g(x)}{1 + xe^x}$$

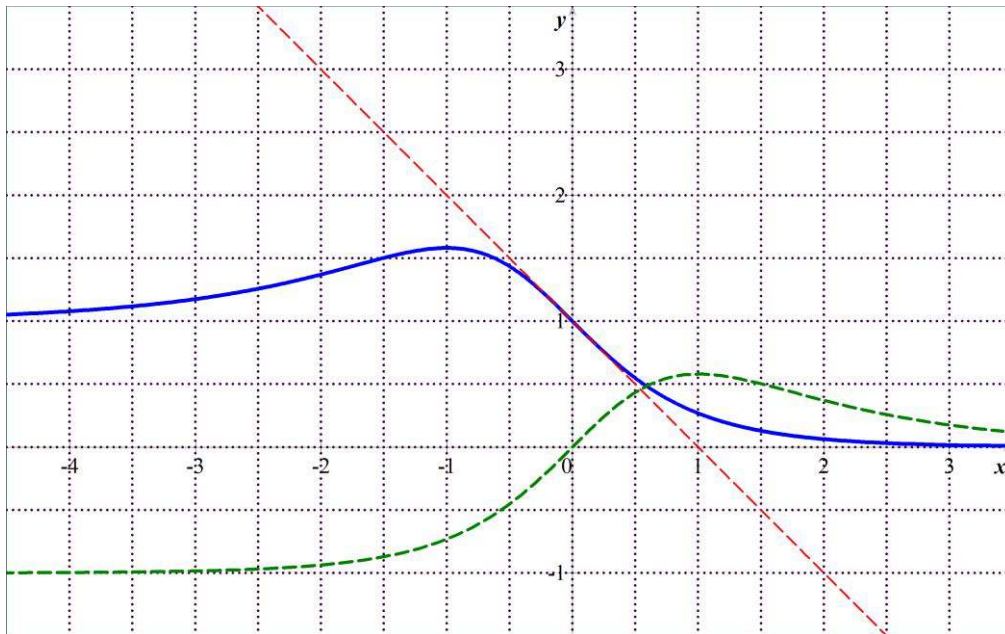
جـ - الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) .

لدينا : $f(x) - (-x + 1) = \frac{xe^x g(x)}{1 + xe^x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x وبالتالي :

المنحنى (C_f) فوق المماس (T) من أجل $x \in [0; +\infty[$ وأسفل منه من أجل $x \in]-\infty; 0]$.

نستنتج أن النقطة $A(0; 1)$ هي نقطة إنعطاف .

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

حلول المعادلة حلول المعادلة : $f(x) = -m + 1$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم ذو المعادلة $y = -m + 1$.

من أجل $1 < -m + 1 < \frac{1}{1-e^{-1}}$ أي $0 < m < 1 - \frac{1}{1-e^{-1}}$ ، المعادلة تقبل حلين .

من أجل $0 < -m + 1 \leq 1$ أي $0 \leq m < 1$ ، المعادلة تقبل حل واحد .

من أجل $-m + 1 < 0$ أي $m > 1$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

من أجل $-m + 1 = \frac{1}{1-e^{-1}}$ أي $m = 1 - \frac{1}{1-e^{-1}}$ ، المعادلة تقبل حل واحد .

من أجل $-m + 1 > \frac{1}{1-e^{-1}}$ أي $m < 1 - \frac{1}{1-e^{-1}}$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

(6) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x) = \frac{x}{e^x - x}$. (C_k) تمثيلها البياني.

أ- تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $k(x) = f(-x) - 1$.

$$f(-x) - 1 = \frac{1}{1-x^{-x}} - 1 = \frac{1-1+xe^{-x}}{1-xe^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{1-xe^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}(e^x - x)} = \frac{x}{e^x - x} = k(x) , x \text{ عدد حقيقي}$$

ب- شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) اعتمادا على المنحنى (C_f) :

نرسم نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب ، ثم نسحبه بالشعاع $\vec{j}$.



نشر يوم : 01.12.2021

☞ The only way to learn mathematics is to do mathematics ☞