

دراسة دالة أسية رقم 01 + 02

المسألة 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

(2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$.

ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، وأن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

(3) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المقاربين.

(4) أدرس إتجاه تغيير الدالة f ، وشكل جدول تغييراتها.

(5) أنشئ المنحني (C) والمستقيمات المقاربة.

(6) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(1 - m)(e^x + 1) - 2e^x = 0$.

المسألة 02 :

نعتبر الدالتان f_0 و f_1 المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ و $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^x}$.

و ليكن (C_0) و (C_1) منحناهما البيانيين في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(I) 1) أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_0) .

(2) بيّن أن النقطة $K(0; \frac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

(3) أدرس تغييرات الدالة f_0 .

(4) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C_0) عند النقطة K .

(5) أ) بيّن أنه لدراسة وضعية (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة العبارة : $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

ب) أحسب كلا من $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$ ، $g'(x)$ ، $g(x)$ ، وذلك حسب قيم x .

ج) استنتج وضعية المنحني (C_0) بالنسبة إلى المماس (T) .

د) أنشئ المماس (T) والمنحني (C_0) .

(II) 1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان : $M(x; f_0(x))$ و $M'(x; f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة

للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}$.

(2) شكل جدول تغييرات الدالة f_1 ، ثم أنشئ المنحني (C_1) في نفس المعلم السابق.

دراسة دالة أسية رقم 03 + 04

المسألة 03 :

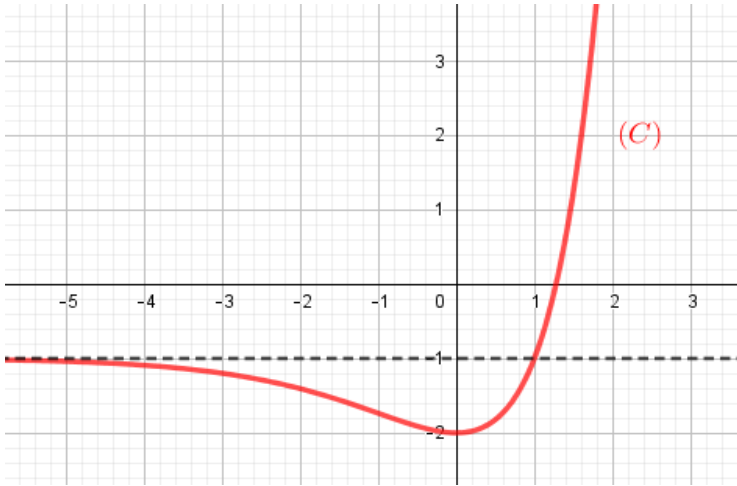
- (I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x - 1$.
 (1) أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
 (2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها .
 (3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

- (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 (1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثم فسّر النتائج هندسياً .
 (2) أحسب $f'(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
 (3) أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المماس (T) .
 (4) انشئ المماس (T) ، والمستقيمات المقاربة ، والمنحني (C) .
 (5) m وسيط حقيقي ، ناقش بياناً وحسب قيم m حلول المعادلة : $f(x) = mx$.

المسألة 04 :

- (I) في الشكل المقابل : (C) هو المنحني الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax + b)e^x + c$.
 (1) بقراءة بيانية :



- أ) عيّن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم استنتج قيمة c .
 ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$.
 ج) عيّن كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a و b .
 (2) نفرض فيما يلي : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.
 أ) شكل جدول تغيرات الدالة g .
 ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α محصور بين : 1, 2 و 1, 3 .
 ج) استنتج إشارة $g(x)$.

- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م. $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 (1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم حدّد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.
 (2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 (3) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .
 (4) بين أن : $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$.
 (5) أنشئ المنحني (C_f) .
 (6) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

دراسة دالة أسية رقم 05

المسألة 05 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \dots; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الأول :

- (1) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحني (C).
- (2) أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ، وذلك من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$.
ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، وبالنسبة للمنحني (C) ؟
- (3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ تكون : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.
- (4) أدرس تغيّرات الدالة f ، وشكل جدول تغيّراتها.

الجزء الثاني :

- نعتبر g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.
- (1) بيّن أنه في المجال $]0; +\infty[$ المعادلتان : $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان .
 - (2) برهن أن المعادلة $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، حيث : $0,39 < \alpha < 0,40$.
 - (3) نفرض (T_a) هو المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة a ، حيث : $a > 0$.
أ) بيّن أن المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافقط إذا كان : $f(a) - xf'(a) = 0$.
ب) إستنتج أن المماس (T_a) المار بالمبدأ يمسّ المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .
ج) أنشئ المماس (T_α) ، والمنحني (C) .
 - (4) بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$ ، وذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

❖ تعطى النتيجة : $f'(\alpha) \approx 2,029$.

دراسة دالة أمية ذات الأساس a (رقم 06)

الجزء الأول :

- (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $g(x) = 3^x - x \ln 3 - 1$.
- (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ تكون : $g'(x) > 0$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}^+$.
- (ب) أحسب : $g(0)$ ، ثم استنتج أن : $g(x) > 0$ ، وهذا من أجل كل $x > 0$.
- (2) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $h(x) = (2 - x \ln 3)3^x - 1$.
- (أ) أدرس تغيرات الدالة h ، و شكل جدول تغيراتها .
- (ب) بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1,6 و 1,7 .
- (ج) استنتج إشارة الدالة h على $\mathbb{R}^+$.

الجزء الثاني :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x - x \ln 3}$.
- و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) (أ) بين أنه من أجل كل $x \geq 0$ تكون : $f(x) = \frac{1 - 3^{-x}}{1 - x \ln 3 \times 3^{-x}}$.
- (ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .
- (ج) بين أنه من أجل كل $x \geq 0$ تكون : $f'(x) = \frac{h(x) \times \ln 3}{(3^x - x \ln 3)^2}$.
- (د) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها .
- (2) (أ) بين أنه من أجل كل $x \geq 0$ يكون : $f(x) - x \ln 3 = \frac{(1 - x \ln 3) \times g(x)}{3^x - x \ln 3}$.
- (ب) استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) مع المستقيم (D) ذو المعادلة : $y = x \ln 3$.
- (3) (أ) حدّد معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- (ب) أنشئ المماس (T) والمنحني (C_f) . (الوحدة : 5 cm)

دراسة دالة وسيطة

الدالة الوسيطة :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$ ، وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) عين حسب قيم الوسيط الحقيقي α عدد القيم الحدية للدالة f_α .
- (2) نسمي ω_α النقطة الحدية في حالة وجودها :
- أ) عين بدلالة α إحداثي النقطة ω_α .
- ب) عين مجموعة النقط ω_α لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$.

الجزء الثاني :

نضع في كل ما يأتي : $\alpha = 1$ ، ولتكن f_1 الدالة التي نريد دراستها و (C_1) تمثيلها البياني .

- (1) أدرس تغيرات الدالة f_1 ، والمستقيمات المقاربة .
- (2) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.
- (3) أنشئ كلا من (T) و (C_1) .
- (4) (D_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ : $y = mx + 3 - m \ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي .
- أ) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .
- ب) ناقش بياناً و حسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) .
- (5) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي : $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ ، و (C') منحناها البياني :
- أ) أكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$ ، ثم بين أن (C') و المنحنى (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) يطلب تحديد معادلته .
- ب) أنشئ المنحنى (C') في المعلم السابق .

❖ لدينا : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

(1) حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) = 0 \end{cases}$.

❖ بما أن : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) = 0$ ،

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

(2) أ) التحقق أن : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$.

لدينا : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، إذن يمكن كتابة : $f(x) = x - 1 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، أي :

$f(x) = x - 1 + \frac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x + 1}$ ، ومنه : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ ، وهو المطلوب .

(ب) حساب النهاية عند $+\infty$ (نستعمل العبارة الثانية) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x + 1}\right) = 0 \end{cases}$.

❖ بما أن : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x + 1}\right) = 0$ ،

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

(3) تحديد الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمقاربين :

❖ ندرس إشارة : $f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، نلاحظ أن : $-\frac{2e^x}{e^x + 1} < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحني (C) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$.

❖ ندرس إشارة : $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1}$ ، نلاحظ أن : $\frac{2}{e^x + 1} > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحني (C) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$.

(4) دراسة اتجاه تغير الدالة f : (نختار الشكل $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$.

❖ الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2}$ ،

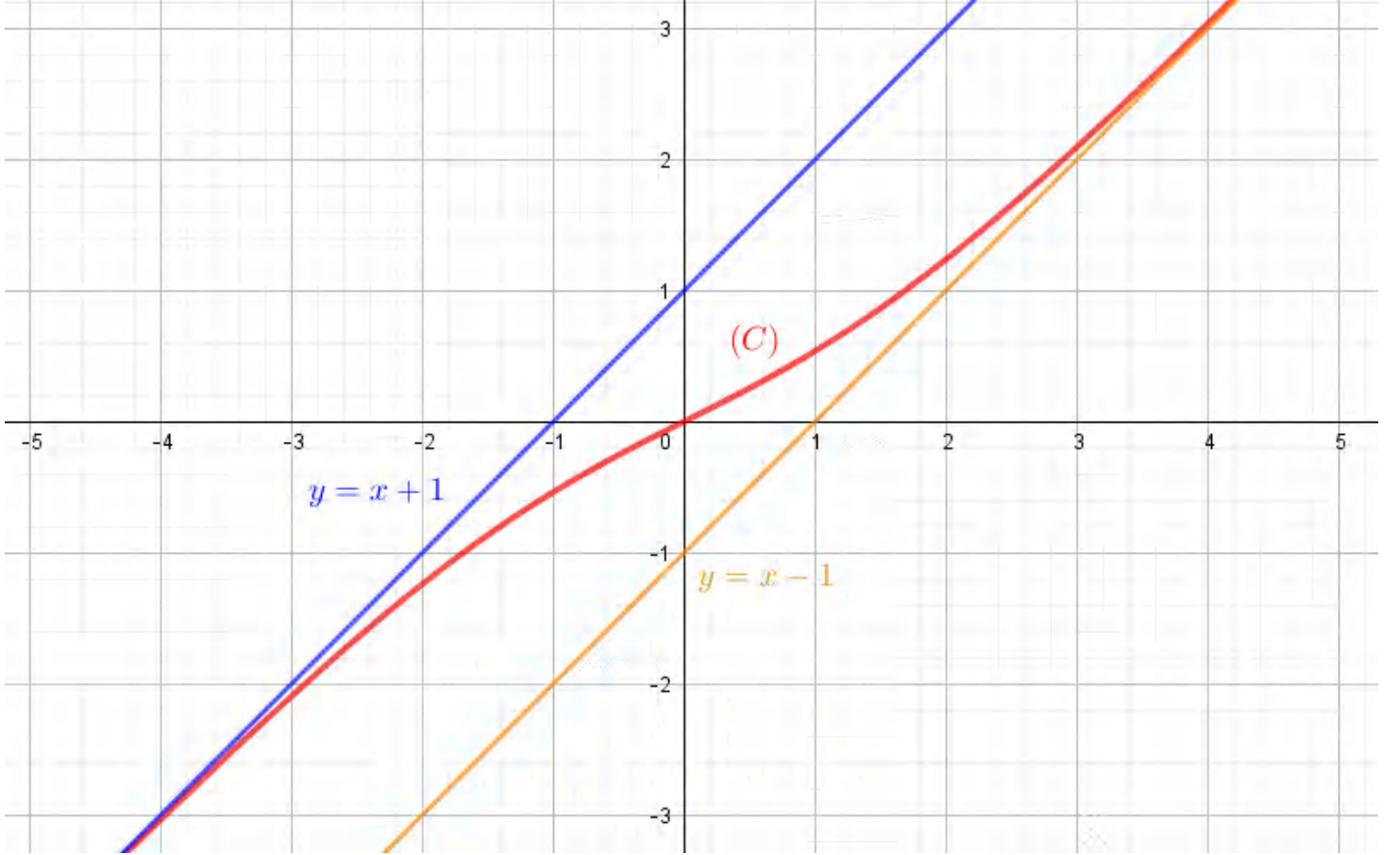
ومنه : $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ ، نلاحظ أن : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❖ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(5) الإنشاء :



(6) المناقشة البيانية :

لدينا : $(1-m)(e^x + 1) - 2e^x = 0$ ، أي ، $(1-m)(e^x + 1) = 2e^x$ ، أي ، $\frac{2e^x}{e^x + 1} = 1 - m$ ، أي :

$-\frac{2e^x}{e^x + 1} = m - 1$ ، (بإضافة $x + 1$) ، $x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + m$ ، ومنه : $f(x) = x + m$.

إذن : عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ والذي يوازي المقاربين للمنحني (C) هما : $y = x + 1$ و $y = x - 1$.

أي أن المناقشة البيانية تكون كما يلي :

❖ لما : $m \in]-\infty; -1]$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

❖ لما : $m \in [1; +\infty[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

❖ لما : $m \in]-1; 1[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

(I) حساب نهايات الدالة f_0 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0 \dots \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (\diamond)$$

المنحني (C_0) يقبل حامل محور الفواصل كمقارب بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = 1 \quad (\diamond)$$

المنحني (C_0) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور

الفواصل معادلته : $y = 1$ ، بجوار $+\infty$.

(2) لدينا النقطة $K(0; \frac{1}{2})$.

(\diamond) أولاً : D_{f_0} متناظرة بالنسبة إلى 0 .

$$f_0(-x) + f_0(x) = 1 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{مع} \quad f_0(2a - x) + f_0(x) = 2b \quad (\diamond)$$

ثانياً : نبين أن :

$$f_0(-x) + f_0(x) = \frac{e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x})e^x} + \frac{e^x}{1 + e^x} \quad \text{أي} \quad f_0(-x) + f_0(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{1 + e^x} \quad (\diamond)$$

لنحسب :

$$f_0(-x) + f_0(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 1 \quad \text{أي} \quad f_0(-x) + f_0(x) = \frac{1}{1 + e^x} + \frac{e^x}{1 + e^x}$$

إذن : النقطة K هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

(3) دراسة تغيرات الدالة f_0 :

$$f_0'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \quad (\diamond)$$

حساب $f_0'(x)$:

نلاحظ أن : $f_0'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن : الدالة f_0 متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
(\diamond) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	
$f_0(x)$	0	1

(4) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة K :

$$\begin{cases} f_0'(0) = \frac{1}{4} \\ f_0(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{لأن} \quad (T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \quad (T) : y = f_0'(0)(x - 0) + f_0(0)$$

5) دراسة وضعية (C_0) بالنسبة إلى (T) : ندرس إشارة الفرق $f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$

$$: \text{أي} , f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x-2}{4} = \frac{4e^x - x - xe^x - 2 - 2e^x}{4(e^x + 1)}$$

$$. f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{g(x)}{4(1+e^x)} : \text{ومنه} , f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x-2}{4} = \frac{2e^x - xe^x - x - 2}{4(e^x + 1)}$$

❖ لدينا : $4(1+e^x) > 0$ ، إذن : لدراسة إشارة الفرق يكفي دراسة إشارة $g(x)$.

ب) حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

$$. g'(x) = e^x - xe^x - 1 : \text{ومنه} , g'(x) = 2e^x - (e^x + xe^x) - 1 = 2e^x - e^x - xe^x - 1$$

$$. g''(x) = -xe^x : \text{ومنه} , g''(x) = e^x - (e^x + xe^x) = e^x - e^x - xe^x$$

- إذن إشارة $g''(x)$ من إشارة $-x$.

❖ إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	+	○	-
$g'(x)$			

$$g''(0) = 0$$

❖ إشارة $g'(x)$:

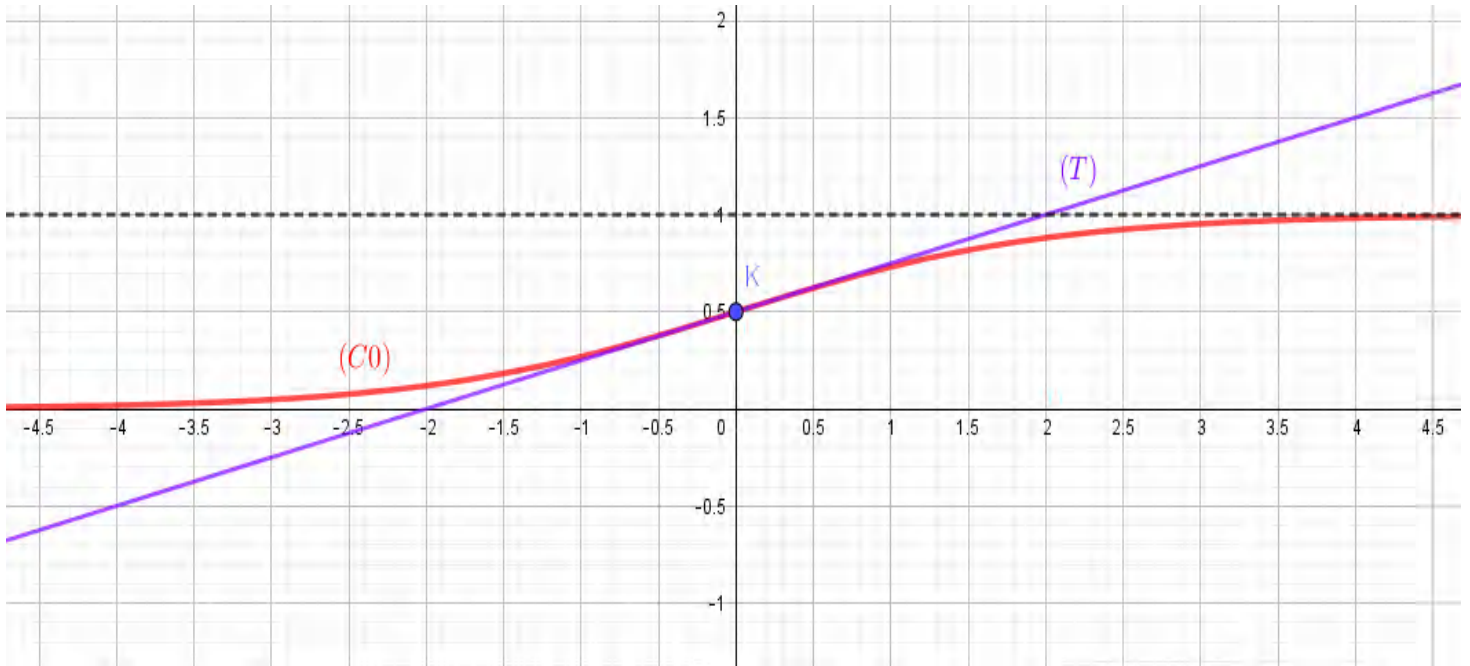
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	-
$g(x)$			

$$g'(0) = 0$$

ج) إشارة : $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+		-
الوضعية	(C_0) يقع فوق (T)		(C_0) يقع تحت (T)
	(C_0) يخترق (T) عند النقطة K		

❖ إستنتاج : النقطة K تعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C_0) .



(II) 1 تكون النقطتان : $M(x; f_0(x))$ و $M'(x; f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}$ ،

إذا كان : $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{1}{2}$.

❖ نحسب : $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x+1}}{2} = \frac{e^x + 1}{2(e^x + 1)} = \frac{1}{2}$.

ومنه : M و M' متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة : $y = \frac{1}{2}$.

أي أن : (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة لهذا المستقيم .

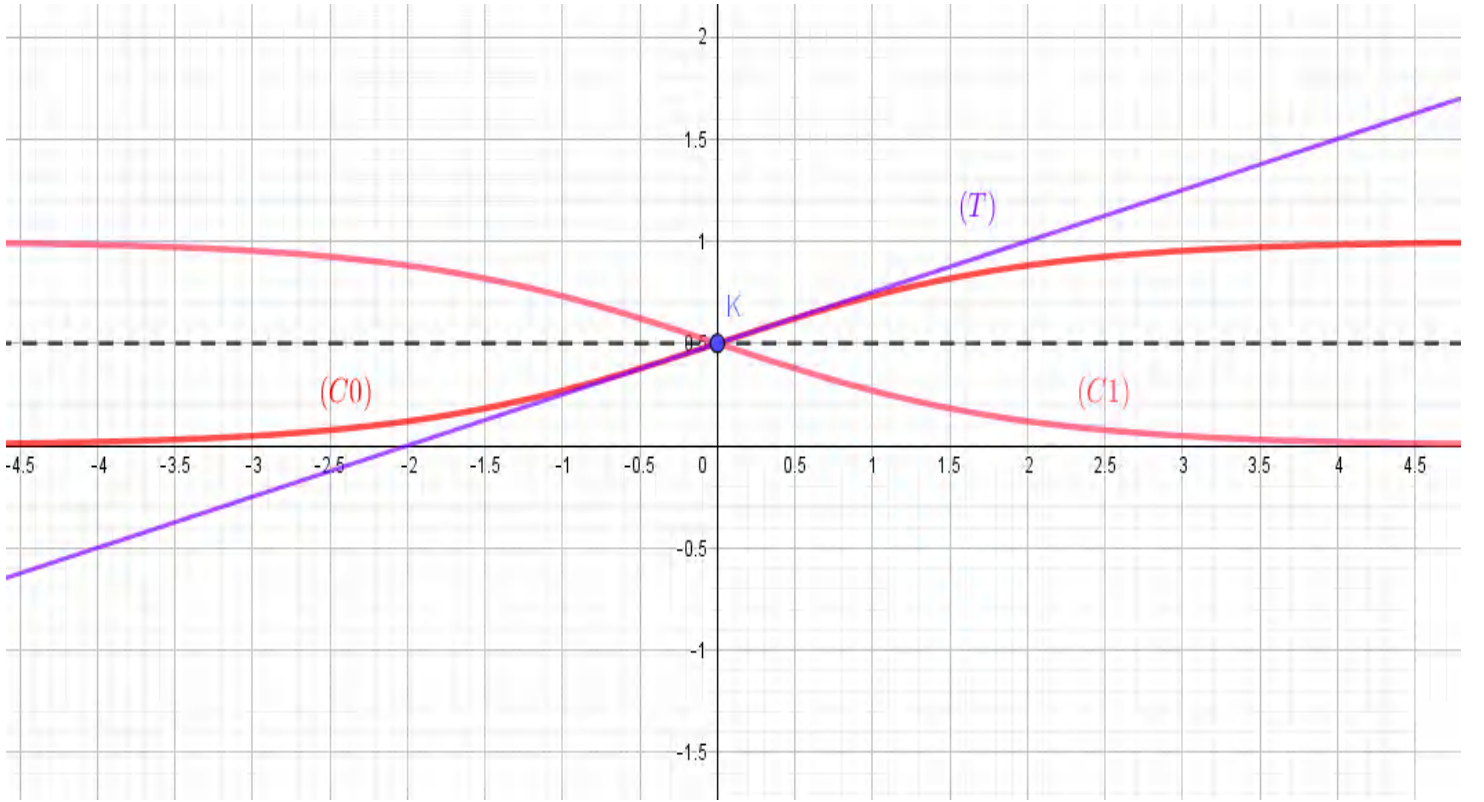
2) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_1 :

بما أن (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y = \frac{1}{2}$ فإن : $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{1}{2}$ ،

إذن : $\frac{f_0 + f_1}{2} = \frac{1}{2}$ ، أي : $f_0 + f_1 = 1$ ، ومنه : $f_1 = 1 - f_0$.

و عليه فإن : إتجاه تغيّر الدالة f_1 هو عكس إتجاه تغيّر الدالة f_0 .
❖ جدول التغيّرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	—	
$f_1(x)$	1	0



كتابة الأستاذ : ب.ع

(I) لدينا : $g(x) = e^x - x - 1$.

(1) حساب النهايات :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty \quad (\diamond)$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad (\diamond)$$

(2) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها :

(\diamond) الدالة المشتقة : $g'(x) = e^x - 1$.

- تكون $g'(x) \geq 0$ ، أي : $(e^x - 1 \geq 0)$ ، أي : $(e^x \geq 1)$ ، إذا كان : $x \geq 0$.

- تكون $g'(x) \leq 0$ ، أي : $(e^x - 1 \leq 0)$ ، أي : $(e^x \leq 1)$ ، إذا كان : $x \leq 0$.

إذن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ ، و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

(\diamond) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) نحسب : $g(0) = 0$ ، و عليه نستنتج و نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$\circ$	$+$

(II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$:

(1) حساب النهايات :

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1 \quad (\diamond)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0 \quad (\diamond)$$

(\diamond) التفسير الهندسي :

- بجوار $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y = -1$.

- بجوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

$$(2) \diamond \text{ حساب } f'(x) : f'(x) = \frac{(e^x - x) - (e^x - 1) \times x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - x)$ ، أي :

تكون : $f'(x) \geq 0$ إذا كان : $x \leq 1$ و تكون : $f'(x) \leq 0$ إذا كان : $x \geq 1$.

$\diamond$ وعليه : الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; 1]$ و متناقصة على المجال $[1; +\infty[$.
 $\diamond$ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\circ$	-
$f(x)$	-1	$f(1)$	0

$$f(1) = \frac{1}{e - 1} \approx 0,58$$

(3) (i) معادلة المماس (T) :

$$\cdot \begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ ، ولأن : } (T) : y = x \text{ ، ومنه : } (T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

(ب) الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (T) : أي ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$:

$$\cdot f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-x \times g(x)}{e^x - x}$$

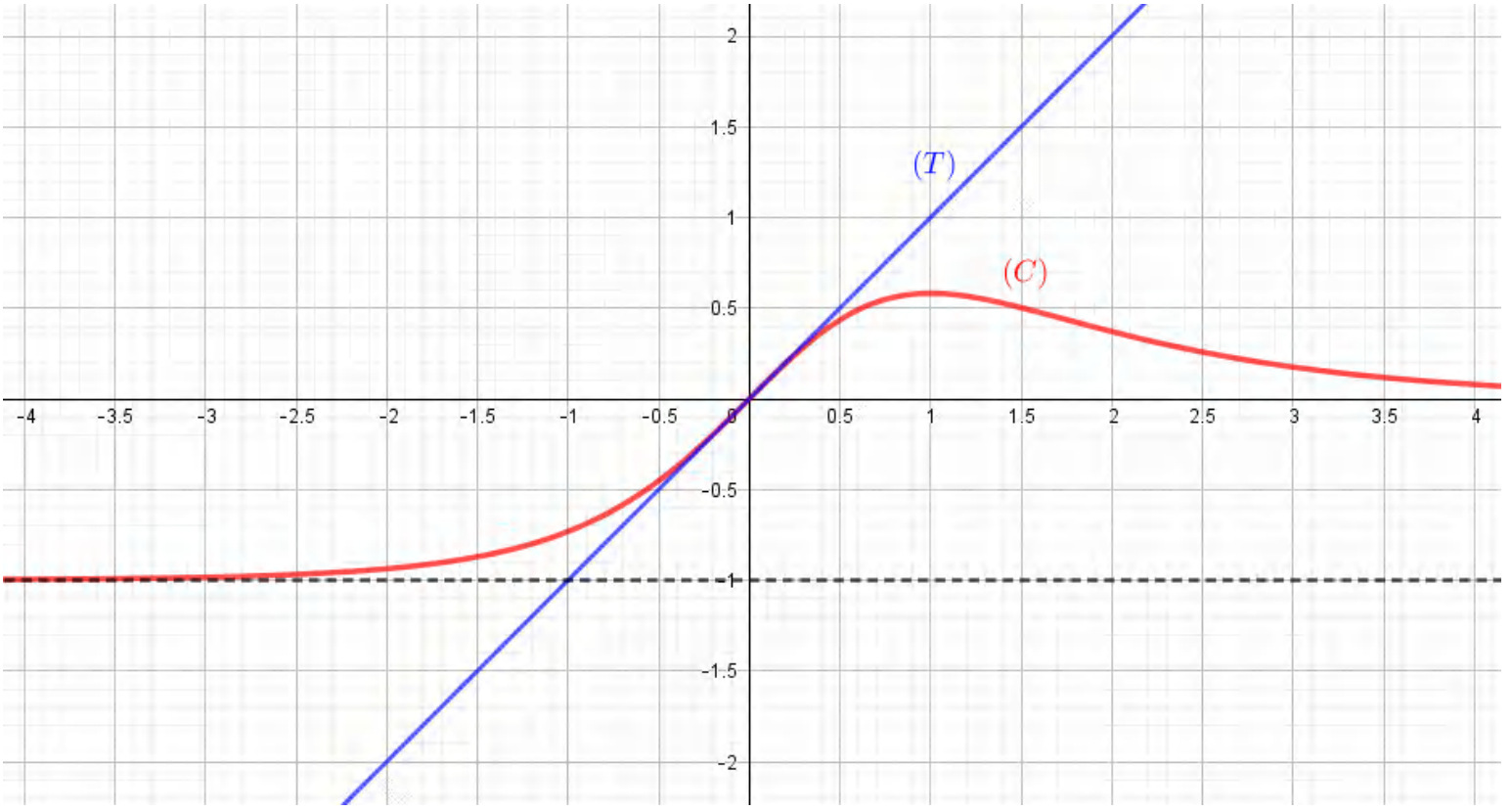
$\diamond$ لدينا من الجزء الأول : $g(x) \geq 0$ ، أي : $e^x - x - 1 \geq 0$ ، أي : $e^x - x \geq 1$ ، ومنه : $e^x - x \geq 0$.

إذن : إشارة $(f(x) - x)$ من إشارة $(-x \times g(x))$ ، وبما أن : $g(x) \geq 0$ ، فالإشارة من إشارة $(-x)$.

$\diamond$ نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	$\circ$	-
الوضعية	(C) يقع فوق (T)	(C) يخترق (T) في النقطة O	(C) يقع تحت (T)

ملاحظة : المبدأ O يعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C) .



(5) المناقشة البيانية :

لدينا : $f(x) = mx$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير يمرّ بالمبدأ O ، (مناقشة دورانية) .

- ❖ إذا كان : $0 < m < 1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل ثلاث حلول .
- ❖ إذا كان : $m \geq 1$ أو $m \leq 0$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

I (1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ، ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (axe^x + be^x + c) = c$ ، إذن نستنتج أن : $c = -1$.

ب) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ج) لدينا : $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$.

- لدينا : $g(0) = -2$ ، أي : $(a \times 0 + b)e^0 - 1 = -2$ ، أي : $b - 1 = -2$ ، ومنه : $b = -1$.

- نحسب $g'(x)$: $g'(x) = a \times e^x + (ax + b)e^x = e^x(a + ax + b)$ ، لدينا : $g'(0) = 0$ ، أي :

$e^0(a + a \times 0 - 1) = 0$ ، أي : $a - 1 = 0$ ، ومنه : $a = 1$.

إذن : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1, 2; 1, 3]$ ، وبما أن : $\begin{cases} g(1, 2) = -... \\ g(1, 3) = +... \end{cases}$ ، أي : $g(1, 2) \times g(1, 3) < 0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $1, 2$ و $1, 3$.
(إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$

II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.

1) حساب النهايات :

❖ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$.

❖ بجوار $+\infty$ المنحني (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $y = x$: (Δ) ، نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1}$ ،

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1 \end{array} \right. : \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0 \text{ ومنه :}$$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

❖ الوضعية : أي ندرس إشارة $\frac{-xe^x}{e^x + 1}$ ، إذن : الإشارة من إشارة $(-x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	$\circ$	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ) (C_f) يقع تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة O		

(3) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

❖ نحسب : $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-x + 1)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[(x - 1)e^x - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$.

❖ جدول التغيّرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(4) إثبات أن : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

نعلم أن : $g(\alpha) = 0$ ، أي : $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$ ، أي : $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$ ، ومنه : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha - 1$$

ومنه : $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، وهو المطلوب .

❖ حصر $f(\alpha)$: لدينا : $1,2 < \alpha < 1,3$ ، أي : $0,2 < \alpha - 1 < 0,3$ ، ومنه : $0,2 < f(\alpha) < 0,3$.



(6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل والذي معادلته : $y = f(m)$.

- ❖ إذا كان : $m \in]-\infty; 0]$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .
- ❖ إذا كان : $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حلان متميزان .
- ❖ إذا كان : $m = \alpha$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

كتاب الأستاذ : **ب.ع**

$$\cdot \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \dots; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ لدينا :}$$

الجزء الأول :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) = 1 \end{cases} \text{ (1) حساب النهاية عند } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ لأن :}$$

و منه : عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y = 1$: (Δ) .

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \dots (*) \text{ (2) حساب النهاية :}$$

$$\text{أي : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{أي : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) + \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) + \left(\frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \right) \right]$$

$$\text{نجد : } \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \end{cases} \text{ بوضع } t = -\frac{1}{x} \text{ ، } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) + \left(-\frac{1}{x} \right)^2 e^{-\frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{x} \right)^3 e^{-\frac{1}{x}} \right]$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ إذن : } \lim_{t \rightarrow -\infty} t^n \times e^t = 0 \text{ لأن : } \lim_{t \rightarrow -\infty} (*) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-te^t + t^2 e^t - t^3 e^t) = 0$$

(ب) نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ، والمنحني (C) يقبل عند المبدأ O مماساً هو حامل محور الفواصل .
(3) حساب $f'(x)$:

$$\text{أي : } f'(x) = \frac{(2x + 1)x^2 - 2x(x^2 + x + 1)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ و منه : } f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{x^4} + \frac{x^2 + x + 1}{x^4} \right]$$

(4) دراسة تغيرات الدالة f :

$$\cdot \text{ لدينا : } f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ إشارة } f'(x) \text{ من إشارة : } (1-x) .$$

إذن : الدالة f متزايدة على المجال $[0; 1]$ وناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	0	$3e^{-1}$	1

الجزء الثاني : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

(1) لدينا : $g(x) = 0$ معناه : $f(x) - xf'(x) = 0$ ، أي : $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - x \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ،

أي : $\left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2} - \frac{1-x}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ، أي : $\left[\frac{x^3 + x^2 + x - 1 - x}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ، أي : $\left[\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ،

أي : $\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} = 0$ ، ومنه : $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$.

إذن : المعادلتان $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

(2) لنضع : $h(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ ، أي : $h'(x) = 3x^2 + 2x + 2$ ، نلاحظ أن : $\Delta < 0$ ، ومنه إشارة $h'(x)$ موجبة تماما ، إذن : الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

❖ الدالة h مستمرة ورتية على المجال $]0, 39; 0, 40[$ و $\begin{cases} h(0, 39) = -... \\ h(0, 40) = +... \end{cases}$ ، أي : $h(0, 39) \times h(0, 40) < 0$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 0, 39 و 0, 40 .

(3) (أ) معادلة المماس (T_a) هي : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

لدينا : (T_a) يمر بالمبدأ O معناه أن : $O \in (T_a)$ ، أي : $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$ ، ومنه : $f(a) - af'(a) = 0$ ، إذن هي محققة .

(ب) لدينا : $f(a) = \frac{a^2 + a + 1}{a^2} e^{-\frac{1}{a}}$ و $f'(a) = \frac{1-a}{a^4} e^{-\frac{1}{a}}$ ، وعلما أن : $f(a) - af'(a) = 0$.

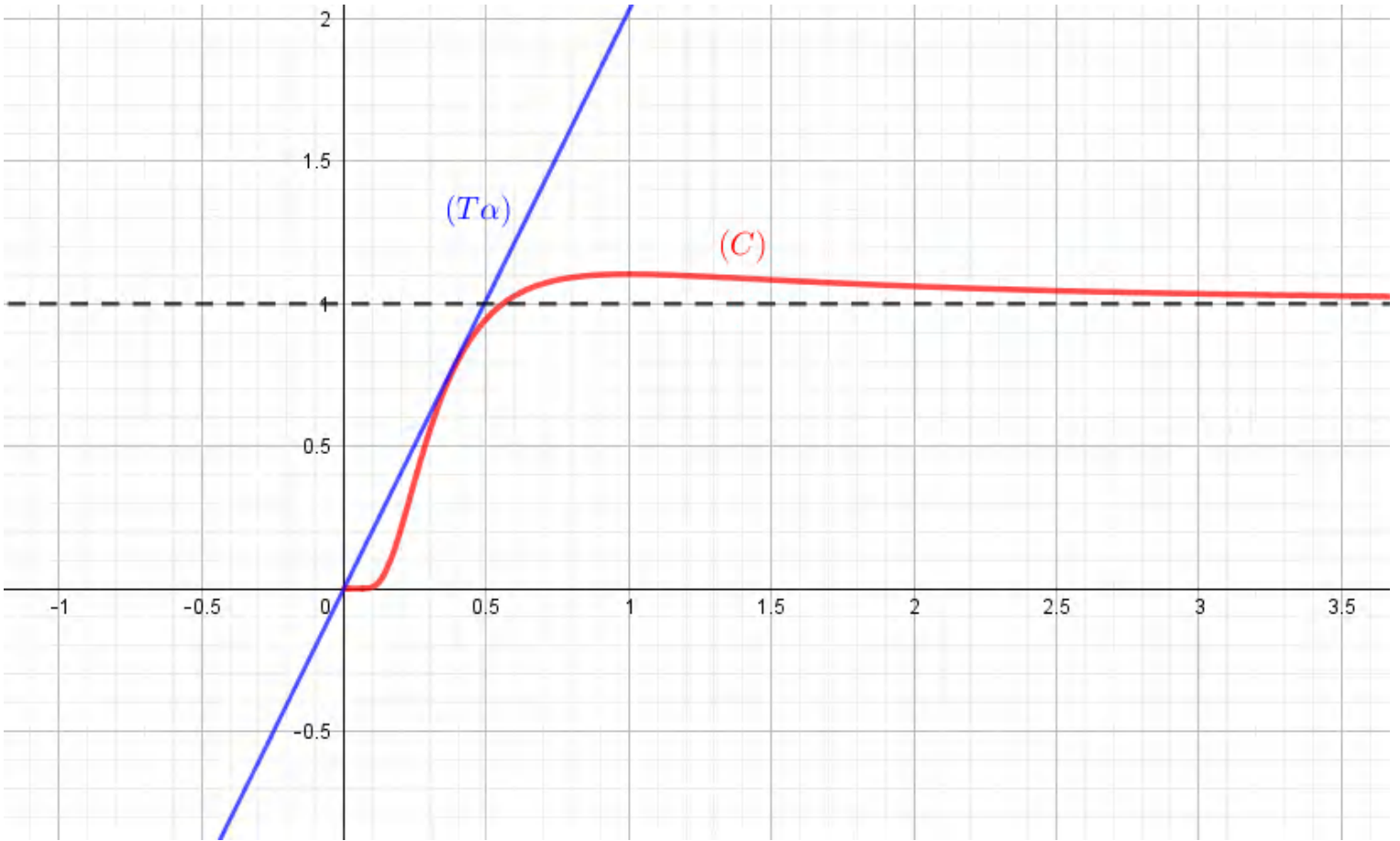
إذن : $\frac{a^2 + a + 1}{a^2} e^{-\frac{1}{a}} - a \frac{1-a}{a^4} e^{-\frac{1}{a}} = 0$ ، أي : $\left[\frac{a^2 + a + 1}{a^2} - \frac{1-a}{a^3} \right] e^{-\frac{1}{a}} = 0$ ، أي :

$\frac{a^3 + a^2 + 2a - 1}{a^3} = 0$ ، أي : $\left[\frac{a^3 + a^2 + 2a - 1}{a^3} \right] e^{-\frac{1}{a}} = 0$ ، ومنه : $a^3 + a^2 + 2a - 1 = 0$.

وهذه الأخيرة تقبل حلا وحيدا α ، إذن : $a = \alpha$.

وعليه : فإن المماس (T_a) المار بالمبدأ O يمس المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

❖ معادلة المماس : $y = 2,029x$: (T_α) .



4) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = mx$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير المار بالمبدأ O ، إذن : هناك مناقشة بيانية دورانية .

❖ إذا كان : $0 < m < 2,029$ فإن : المعادلة تقبل حلين متميزين .

❖ إذا كان : $m \geq 2,029$ أو $m \leq 0$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

كتابة الأستاذ : ب. ع

الجزء الأول :

- (1) لدينا : $g(x) = 3^x - x \ln 3 - 1$ ، أي : $g(x) = e^{x \ln 3} - x \ln 3 - 1$.
 أ) حساب : $g'(x) = \ln 3 \times e^{x \ln 3} - \ln 3$ ، أي : $g'(x) = \ln 3(e^{x \ln 3} - 1)$.
 من أجل $x > 0$ يكون : $x \ln 3 > 0$ ، أي : $e^{x \ln 3} > e^0$ ، ومنه : $e^{x \ln 3} - 1 > 0$.
 وبالتالي : $g'(x) > 0$ ، ومنه : الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}^+$.
 ب) لدينا : $g(0) = 0$ ، من أجل كل : $x > 0$ ، يكون : $g(x) > g(0)$ ، ومنه : $g(x) > 0$.
 (2) لدينا : $h(x) = (2 - x \ln 3)3^x - 1$ ، أي : $h(x) = (2 - x \ln 3)e^{x \ln 3} - 1$.
 أ) دراسة تغيّرات الدالة h :
 ❖ حساب النهايات :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x \ln 3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2 - x \ln 3)3^x - 1] = -\infty \quad (\diamond)$$

- ❖ حساب $h'(x) = -\ln 3 \times e^{x \ln 3} + \ln 3 \times e^{x \ln 3} (2 - x \ln 3) = \ln 3 \times e^{x \ln 3} [-1 + (2 - x \ln 3)]$ ،
 ومنه : $h'(x) = \ln 3 \times e^{x \ln 3} (1 - x \ln 3)$ ، إذن : إشارة $h'(x)$ من إشارة : $(1 - x \ln 3)$.
 لدينا : $1 - x \ln 3 \geq 0$ ، أي : $-x \ln 3 \geq -1$ ، أي : $x \ln 3 \leq 1$ ، ومنه : $x \leq \frac{1}{\ln 3}$.
 ❖ جدول التغيرات :

x	0	$\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	○	-
$h(x)$	1	$\nearrow \approx 1,7$	$\searrow -\infty$

- ب) الدالة h مستمرة ورتيبة على المجال $[1,6; 1,7]$ ، و $\begin{cases} h(1,6) = +\dots \\ h(1,7) = -\dots \end{cases}$ ، أي : $h(1,6) \times h(1,7) < 0$.
 إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1,6 و 1,7 .
 ج) إشارة $h(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$	+	○	-

الجزء الثاني : $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x - x \ln 3}$.

(1) لدينا : $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x - x \ln 3} = \frac{(3^x - 1)3^{-x}}{(3^x - x \ln 3)3^{-x}}$ ، ومنه : $f(x) = \frac{1 - 3^{-x}}{1 - x \ln 3 \times 3^{-x}}$.
(ب) حساب النهاية عند $+\infty$:

نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x} = 0$ وأيضاً : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \times 3^{-x} = 0$ ، إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3^{-x}}{1 - x \ln 3 \times 3^{-x}} = 1$.

(❖) التفسير الهندسي : عند $+\infty$ المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y = 1$:

(ج) حساب $f'(x)$: لدينا : $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x - x \ln 3} = \frac{e^{x \ln 3} - 1}{e^{x \ln 3} - x \ln 3}$.

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{\ln 3 \times e^{x \ln 3} (e^{x \ln 3} - x \ln 3) - (\ln 3 \times e^{x \ln 3} - \ln 3)(e^{x \ln 3} - 1)}{(e^{x \ln 3} - x \ln 3)^2}$$

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{\ln 3 \times 3^x (3^x - x \ln 3) - (\ln 3 \times 3^x - \ln 3)(3^x - 1)}{(3^x - x \ln 3)^2}$$

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{\ln 3 \times 3^x (3^x - x \ln 3) - \ln 3 (3^x - 1)(3^x - 1)}{(3^x - x \ln 3)^2}$$

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{\ln 3 [3^{2x} - 3^x \times x \ln 3 - 3^{2x} + 3^x + 3^x - 1]}{(3^x - x \ln 3)^2}$$

$$. f'(x) = \frac{\ln 3 (-3^x \times x \ln 3 + 2 \times 3^x - 1)}{(3^x - x \ln 3)^2} = \frac{\ln 3 [(2 - x \ln 3)3^x - 1]}{(3^x - x \ln 3)^2}$$

ومنه : $f'(x) = \frac{\ln 3 \times h(x)}{(3^x - x \ln 3)^2}$ ، وهو المطلوب .

(د) دراسة اتجاه تغير الدالة : f :

(❖) لدينا : $f'(x) = \frac{\ln 3 \times h(x)}{(3^x - x \ln 3)^2}$ ، إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

(❖) جدول التغيرات :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	1

$$: \text{أي} ، f(x) - x \ln 3 = \frac{3^x - 1}{3^x - x \ln 3} - x \ln 3 = \frac{3^x - 1 - 3^x \times x \ln 3 + (x \ln 3)^2}{3^x - x \ln 3} \quad (2)$$

$$: \text{أي} ، f(x) - x \ln 3 = \frac{3^x - 3^x \times x \ln 3 - [1 - (x \ln 3)^2]}{3^x - x \ln 3} = \frac{3^x(1 - x \ln 3) - (1 - x \ln 3)(1 + x \ln 3)}{3^x - x \ln 3}$$

$$. f(x) - x \ln 3 = \frac{(1 - x \ln 3) \times g(x)}{3^x - x \ln 3} : \text{ومنه} ، f(x) - x \ln 3 = \frac{(1 - x \ln 3)(3^x - 1 - x \ln 3)}{3^x - x \ln 3}$$

(ب) لدراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) مع المستقيم (D) يكفي دراسة إشارة $(1 - x \ln 3)$ لأنه من أجل كل $x > 0$ تكون $g(x) > 0$ و $(3^x - x \ln x) > 0$.
 ❖ نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	0	$\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$1 - x \ln 3$	+	○	-
الوضعية	(C_f) يقع فوق (D) (C_f) يقع تحت (D) (C_f) يقطع (D) في النقطة $A(\frac{1}{\ln 3}; 1)$		

(3) كتابة معادلة المماس (T) :

$$. (T) : y = (\ln 3)x : \text{ومنه} ، \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = \ln 3 \end{cases} ، \text{لدينا} : (T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

❖ نلاحظ أن : المماس (T) هو نفسه المستقيم (D) .



كتابة الأستاذ: ب. ع.

ملخص الدالة الأسية الوسيطة

الجزء الأول :

لدينا : $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$ ، حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مركبة من دالة كثير حدود و دالة أسية ، أي :
 $f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - 2\alpha e^x$ ، القيم الحدية للدالة f_α تحقق : $f'_\alpha(x) = 0$ أي :
 $2e^{2x} - 2\alpha e^x = 0$ ، ومنه : $2e^x(e^x - \alpha) = 0$ ، لدينا : $e^x \neq 0$ إذا : $e^x - \alpha = 0$ أي : $e^x = \alpha$.

وهنا نميز حالتين :

أ- إذا كان : $\alpha \leq 0$ معناه : $e^x = \alpha$ غير محققة و عليه نقول أن لا توجد قيم حدية للدالة f_α لما $\alpha \leq 0$.

ب- إذا كان : $\alpha \geq 0$ معناه : $e^x = \alpha$ تقبل حل وحيد x_α و هو : $\ln e^{x_\alpha} = \ln \alpha$ أي : $x_\alpha \ln e = \ln \alpha$ ، ومنه : $x_\alpha = \ln \alpha$.
 أي نقول توجد قيمة حدية للدالة f_α لما $\alpha \geq 0$ وهي : $\omega_\alpha(x_\alpha; f(x_\alpha))$.

(2) لدينا لما $\alpha \geq 0$ ، $\omega_\alpha(x_\alpha; f(x_\alpha))$ هي النقطة الحدية للدالة f_α :

$$\checkmark \text{ أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = (e^{\ln \alpha})^2 - 2e^{\ln \alpha} + 3 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = f(x_\alpha) = f(\ln \alpha) = 2e^{\ln \alpha} - 2\alpha e^{\ln \alpha} + 3 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = -\alpha^2 + 3 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 \end{cases} \text{ ، ومنه : } \omega_\alpha(\ln \alpha; 3 - \alpha^2) \text{ ، } \alpha \in \mathbb{R}_+^* .$$

$\checkmark$ تعيين مجموعة النقط ω_α لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا إحداثيات ω_α هي x_α و y_α حيث : $y_\alpha = f(x_\alpha)$ ، لدينا لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$ فإن x_α يسمح $\mathbb{R}$ و y_α صورة x_α بالدالة f_α ، إذن نقول : مجموعة النقط ω_α هي المنحني (C_α) منحنى الدالة f_α .
 $(x_\alpha = \ln \alpha)$ ، لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$ فإن x_α يسمح $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

نضع $\alpha = 1$ ، أي : $f_1(x) = 2e^{2x} - 2e^x + 3$ ، أي : $f'_1(x) = 2e^{2x} - 2e^x$.

(1) لدينا : $\alpha = 1 > 0$ ومنه : (C_1) يقبل قيمة حدية ω_1 ، حيث : $\omega_1(x_1; f(x_1))$ ،

$$\text{أي : } \begin{cases} x_1 = \ln 1 = 0 \\ y_1 = f(0) = 2 \end{cases} \text{ ومنه : } \omega_1(0; 2) .$$

• $f'_1(x) = 2e^{2x} - 2e^x$ أي : $f'_1(x) = 2e^x(e^x - 1)$ ، إشارة f'_1 من إشارة $(e^x - 1)$ ، أي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f_1(x)$	3	$f_1(0)=2$	$+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$: أي . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{2x} - 2e^x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) + 3 = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 3$: أي ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x + 3) = 3$

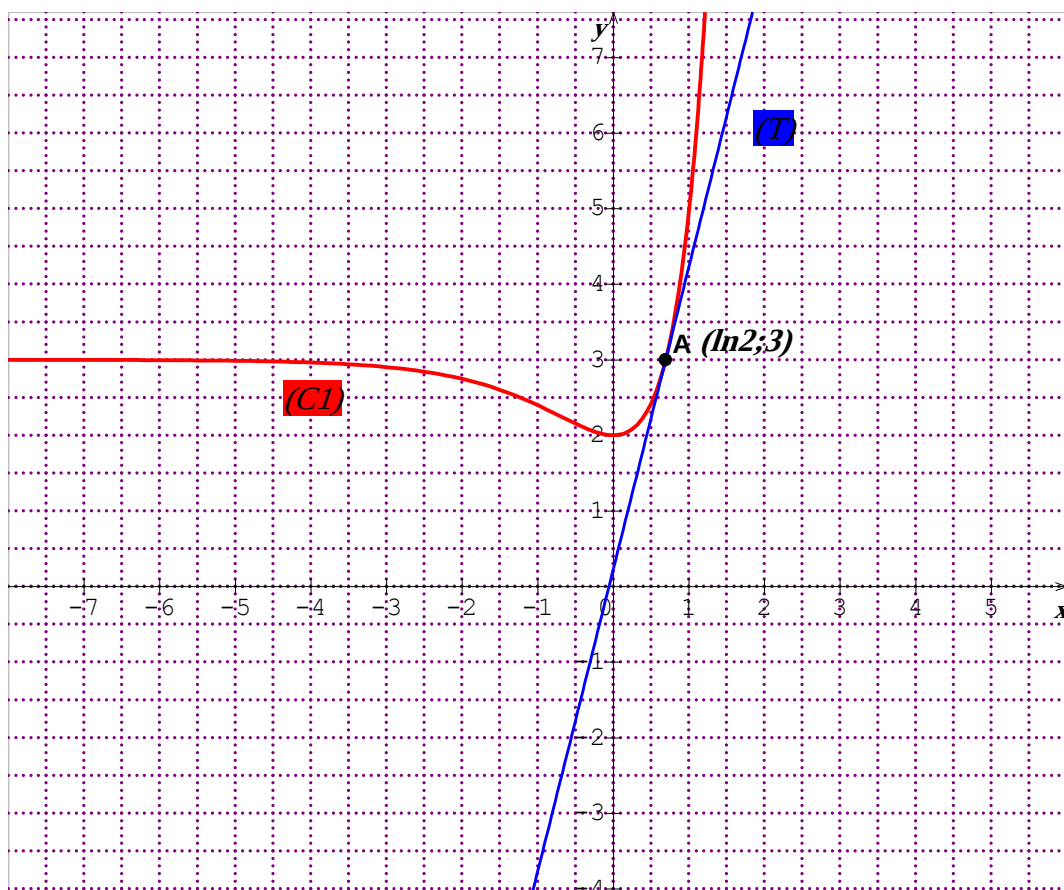
و منه : $y = 3$: مقارب أفقي للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$.

(2) تعيين معادلة للمماس (T) لـ (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$:

$$\begin{cases} f_1'(\ln 2) = 2e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} = (2e^{\ln 2})^2 - 4 = 8 - 4 = 4 \\ f_1(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} + 3 = 4 - 4 + 3 = 3 \end{cases} \quad , \quad (T): y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$$

و منه : $(T): y = 4(x - 2\ln) + 3$ ، أي : $(T): y = 4x - 4\ln 2 + 3$.

(3) رسم كلا من (T) و (C_1) : باستخدام مبرمج (sine qua non)



(4) لدينا : $(D_m): y = mx + 3 - m \ln 2$:

• تبين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها :

$y = mx + 3 - m \ln 2$ أي : $y - mx - 3 + m \ln 2 = 0$ ومنه : $m(\ln 2 - x) + (y - 3) = 0$

معناه أن : $\ln 2 - x = 0$ و $y - 3 = 0$ ، وعليه : $x = \ln 2$ و $y = 3$ ، ومنه من أجل كل m من $\mathbb{R}$ المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة ذات الإحداثيات $A(\ln 2; 3)$.

• لنناقش بياناً حسب قيم m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) :

لدينا : (T) هو (D_4) ، كما لدينا : (D_m) هي مستقيمات تشمل نقطة ثابتة لما m يسمح $\mathbb{R}$ ، ومنه نحن في حالة المناقشة الدورانية :

✓ لما : $m \leq 0$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطة وحيدة هي : $A(\ln 2; 3)$.

✓ لما : $0 < m < 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداها هي $A(\ln 2; 3)$.

✓ لما : $m = 4$ (C_1) يمس (D_m) في النقطة $A(\ln 2; 3)$.

✓ لما : $m > 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداها $A(\ln 2; 3)$.

(5) لدينا : $f_1(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$ و $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$

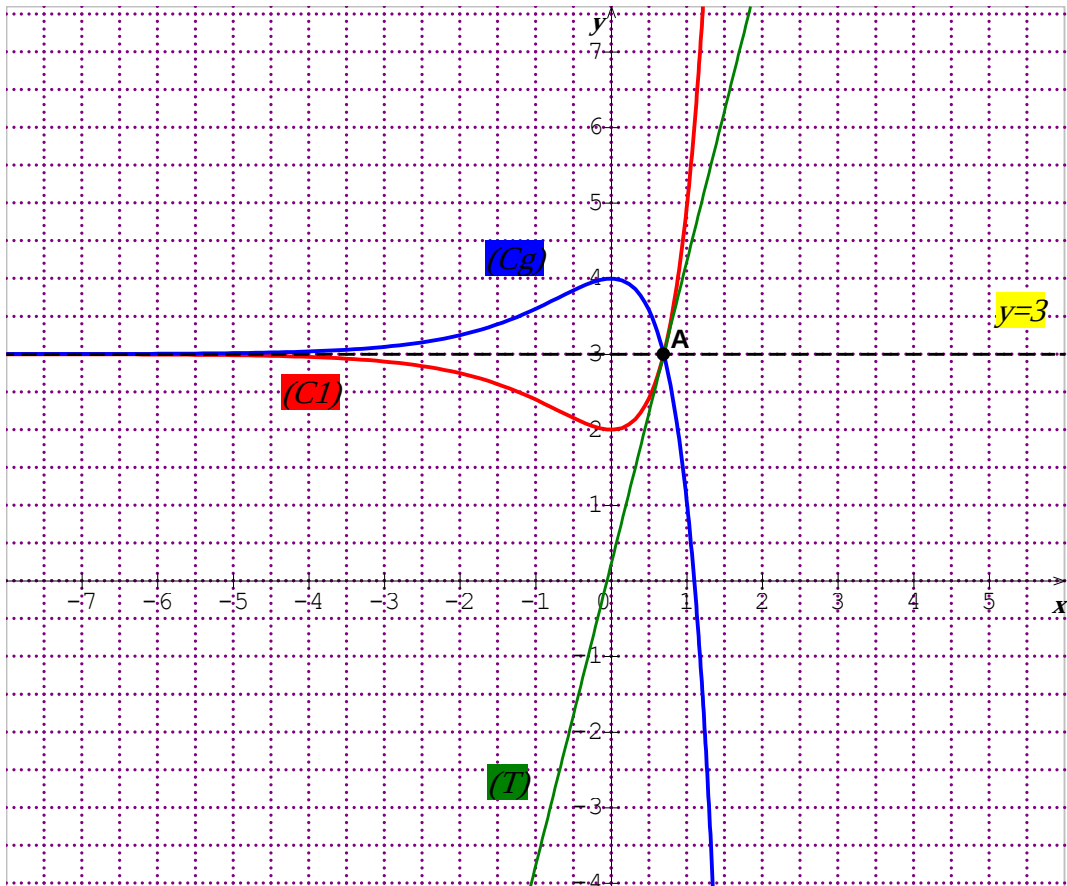
• كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$: $g(x) + f_1(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3 + e^{2x} - 2e^x + 3 = 6$ ، وعليه : $g(x) = 6 - f_1(x)$

لدينا : $g(x) + f_1(x) = 6$ ومنه (C') و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y = \frac{6}{2}$ أي $y = 3$.

ملاحظة : إذا كان لدينا $f(x) + g(x) = 2d$ نقول أن : (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم :

$y = \frac{2d}{2}$ أي $y = d$ ، ليكن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة للمستقيم $y = d$ معناه أن :

$f(x) + g(x) = 2d$ ومنه $f(x) + g(x) = f(x) + (2d - f(x))$



كتابة الأستاذ : ب. ع