

## ➤ التمرين الأول :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة و المتزايدة تماما على  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$ .

$\alpha$  عدد حقيقي موجب ،  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0$  حيث :

$$u_{n+1} = f(u_n) ; u_0 = \alpha \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(I) عين قيمة  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة

(II) نضع في كل ما يلي  $\alpha = 0$

(1) أ. انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  (دون حساب الحدود)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها

(2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n < 1$

ب. بين أن المتتالية متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على بـ :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ. برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب. عبر بدلالة  $n$  عن  $u_n$  و  $v_n$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \dots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$  . ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(5) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $T$  حيث :  $T = \ln(|v_n|) + \ln(|v_{n+1}|) + \dots + \ln(|v_{n+2019}|)$

## ➤ التمرين الثاني :

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  بحددها الأول  $u_0$  بحيث :

$$u_0 = 0 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n ; u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$

(1) برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : -1 < u_n \leq 0$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة

(3)  $(v_n)$  متتالية معرفة في المجموعة  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية ، عين أساسها و حدها الأول

ب. عين  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  ، استنتج ثانية أن  $(u_n)$  متقاربة

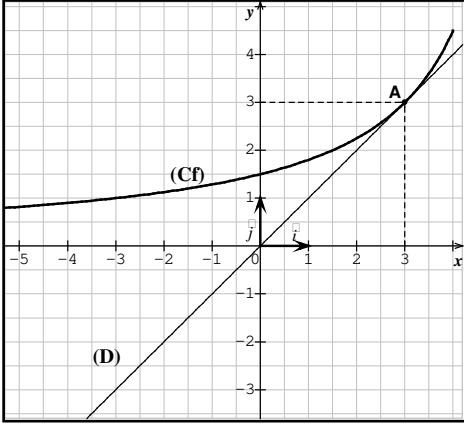
(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n : S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$  و  $T_n = e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times e^{\frac{u_2}{u_2+1}} \times \dots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$

عين  $S_n$  و  $T_n$  بدلالة  $n$  ، هل المتتالية  $(T_n)$  متقاربة؟ برر إجابتك

## ➤ تمرين الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة

على المجال  $]-\infty; 4]$  بـ :  $f(x) = \frac{9}{6-x}$  والمستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$



(1) لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  بـ :

$$u_{n+1} = f(u_n) : n \text{ عدد طبيعي } u_0 = -1$$

أ. انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

$u_0, u_1, u_2, u_3$  دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب. أحسب إحداثي نقطة تقاطع المنحني  $(C_f)$  والمستقيم  $(D)$ .

ج. أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها .

(2) أ. باستعمال الاستدلال بالتراجع ، اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n < 3$

ب. عين اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

ج. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

أ. بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

ب. اكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $v_n$  ، واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج. استنتج ثانية أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

➤ **التمرين الرابع :**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$

والمتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = (\alpha + 3)u_n + \alpha$  . بحيث  $\alpha$  عدد حقيقي

(I) عين قيمة  $\alpha$  التي من أجلها تكون المتتالية  $(v_n)$  متتالية ثابتة

(II) نفرض أن  $\alpha \neq -3$

(1) عين  $\alpha$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

(2) نضع  $\alpha = -2$

أ. عين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ؛ هل  $(u_n)$  متقاربة؟ برر إجابتك

ب. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} \text{ ثم أحسب } S_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2 \text{ ، بين أن :}$$

➤ **التمرين الخامس :**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

(1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > 0$

(2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماماً، استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

(3) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \ln(u_n)$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، لدينا:  $u_n = v_n - v_{n+1}$

ب. نضع:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$  ، بين أن  $S_n = -v_n$

ج. استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### ➤ التمرين السادس :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  بـ:

$$u_0 = \frac{2}{3} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{2}}n + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(1) أحسب كل من:  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$

(2) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \sqrt{2}u_n - n$

أ. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

ب. عين عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ، هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة؟

(3) نعتبر المجموعين  $S_n$  و  $T_n$  حيث:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$  و  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1}$

$$\text{بين أن : } S_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( 4 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) \text{ و } T_n = \frac{1}{3} \left( 4 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} (n+1)(n+2)$$

### ➤ التمرين السابع :

(I)  $(u_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على المجموعة  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_0 = 12 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{12}{13}u_n + \frac{14}{13}$$

(1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < 14$

(3) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

(II)  $(v_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على المجموعة  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = u_n - 14$

(1) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول  $v_0$

(2) عين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ، ثم أحسب نهاية  $(u_n)$

(3) أ. عين بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ب. عين بدلالة  $n$  المجموع  $T_n$  حيث:  $T_n = \sqrt[3]{v_0^2} + \sqrt[3]{v_1^2} + \dots + \sqrt[3]{v_n^2}$  ، ثم عين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

### ➤ التمرين الثامن :

(1)  $(u_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$

أ. أحسب  $u_1$  و  $u_2$

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 3$

ج. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

(2)  $(v_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

أ. بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول  $v_0$

ب. عين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ، ثم أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$

(3)  $(w_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = \frac{3}{u_n}$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $w_n = 1 - v_n$

ب. نعتبر المجموع  $S_n$  التالي :  $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### ➤ التمرين التاسع :

(1) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0;1]$  بـ :  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

أ. بين أن الدالة  $f$  مستمرة و رتيبة تماما على المجال  $[0;1]$

ب. عين صورة المجال  $[0;1]$  بالدالة  $f$

(2) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = \frac{1}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$

ب. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

ج. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متتالية متقاربة ، ثم أحسب نهايتها

### ➤ التمرين العاشر :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \quad ; \quad u_0 = \frac{3}{2}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < u_n < 2$

(2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية العددية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ. بين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب. عين بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $u_n$  ، ثم استنتج ثانية أن  $(u_n)$  متقاربة

(4) أحسب بدلالة  $n$  ، المقدار  $P(n) = (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$

## حلول التمارين المقترحة

### ✓ التمرين الأول :

(I) تعيين  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة :

نعلم أنه تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = u_n$

وعليه من أجل  $n=0$  نجد :  $u_1 = u_0 = \alpha$  أي أن  $f(\alpha) = \alpha$  ومنه  $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha$  إذن  $\alpha^2 = 1$  و بما أن  $\alpha \geq 0$  فإن  $\alpha = 1$

(II) نعتبر  $\alpha = 0$

(1) أ. نقل الشكل و تمثيل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  :

ب التخمين: من خلال تمثيل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$

نخمن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و متقاربة

(2) أ. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n < 1$

( نوظف الاستدلال بالتراجع )

• من أجل  $n=0 : 0 \leq u_0 < 1$  محققة لأن  $u_0 = 0$

• لنفرض أن  $0 \leq u_n < 1$  و لنبرهن أن  $0 \leq u_{n+1} < 1$

بما أن فرضا  $0 \leq u_n < 1$  و الدالة  $f$  متزايدة تماما

على  $[0; +\infty[$  فإن  $f(0) \leq f(u_n) < f(1)$

ومنه  $0 \leq u_{n+1} < 1$  أي أن  $\frac{1}{3} \leq f(u_n) < 1$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n < 1$

ب. لنبين أن  $(u_n)$  متزايدة تماما : ليكن  $n$  عدد طبيعي ، لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n$

أي أن  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 1}{u_n + 3} = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 1)}{u_n + 3}$  و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n < 1$  فإن  $u_n - 1 < 0$

و  $u_n + 1 > 0$  فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} - u_n > 0$  و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

• بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فإنها متقاربة

(3) أ. نبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

$(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_{n+1} = v_n \times q$

من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_{n+1} = \frac{3u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 3} - 1$  و منه  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1}$

أي أن  $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$  إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  و حدها الأول  $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$

ب. تعيين عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  : بما أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  و حدها الأول  $v_0 = -1$

فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

• تعيين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  : لدينا  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  ومنه  $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$  إذن  $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

$$u_n = \frac{-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{-1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ و عليه } u_n = \frac{-1 - v_n}{-1 + v_n} \text{ ينتج أن}$$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  : بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(4) أ. حساب  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$S_n = \frac{1}{v_{2020}}(v_{2020} + v_{2021} + \dots + v_{n+2019}) \text{ أي أن } S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \dots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$$

$$S_n = 2 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \text{ و بالتالي } S_n = \frac{1}{v_{2020}} \times \left[ v_{2020} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] \text{ و عليه}$$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  : بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$

ب. حساب المجموع  $T$  حيث :  $T = \ln(|v_n|) + \ln(|v_{n+1}|) + \dots + \ln(|v_{n+2019}|)$

بما أن  $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$  فإن  $\ln(|v_n|) = \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$  ومنه  $\ln(|v_n|) = -n \ln 2$  وهو حد عام لمتتالية حسابية

$$T = \frac{2020}{2} [\ln(|v_n|) + \ln(|v_{n+2019}|)] \text{ و عليه } (-\ln 2) \text{ أساسها}$$

$$T = -(2039190) \times \ln 2 \text{ ومنه } T = 1010 [-n \ln 2 - (n + 2019) \ln 2] \text{ وبالتالي}$$

### ✓ التمرين الثاني :

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-1 < u_n \leq 0$  :

أ. من أجل  $n = 0$  :  $-1 < u_0 \leq 0$  محققة لأن  $u_0 = 0$

ب. ليكن  $n$  عدد طبيعي كافي، لنفرض أن  $-1 < u_n \leq 0$  و لنبرهن  $-1 < u_{n+1} \leq 0$

بما أن فرضا  $-1 < u_n \leq 0$  فإن  $2 < u_n + 3 \leq 3$  ومنه  $\frac{1}{3} < \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{2}$  إذن  $\frac{4}{3} < \frac{4}{u_n + 3} \leq 2$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3} \text{ و بما أن } -1 < 1 - \frac{4}{u_n + 3} \leq -\frac{1}{3} \text{ وعليه } -2 < -\frac{4}{u_n + 3} \leq -\frac{4}{3} \text{ ينتج}$$

$$\text{فإن } -1 < u_{n+1} \leq 0 \text{ أي أن } -1 < u_{n+1} \leq -\frac{1}{3}$$

من أ. و ب. ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $-1 < u_n \leq 0$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3} \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{4}{u_n + 3} - u_n \text{ لدينا:}$$

$$\text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3} \text{ وبما أن } -1 < u_n \leq 0 \text{ فإن } u_n + 3 > 0 \text{ و } -(u_n + 1)^2 < 0$$

وعليه  $u_{n+1} - u_n < 0$  ينتج أن  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$

• استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة: بما أن  $(u_n)$  متناقصة تماما و محدودة من أسفل بالعدد  $-1$  فإنها متقاربة

(3) أ. نبين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية:

$$\text{ليكن } n \text{ عدد طبيعي، لدينا: } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 1} - \frac{1}{u_n + 1} \text{ و بما أن } \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{1 - \frac{4}{u_n + 3} + 1} = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)}$$

$$\text{فإن } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} - \frac{1}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{2(u_n + 1)} \text{ ينتج أن } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}$$

$$\text{وعليه } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = \frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} = 1$$

ب. تعيين  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  :

• بما أن  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $\frac{1}{2}$  و حدها الأول  $v_0 = 1$  فإنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_n = 1 + \frac{1}{2}n$

• بما أن  $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$  فإن  $u_n + 1 = \frac{1}{v_n}$  ومنه  $u_n = \frac{1}{v_n} - 1$  إذن  $u_n = \frac{2}{n+2} - 1$  أي أن  $u_n = \frac{-n}{n+2}$

• استنتاج ثانية أن  $(u_n)$  متقاربة :

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n} = -1 \text{ فإن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة}$$

(4) أ. حساب  $S_n$  بدلالة  $n$  : لدينا  $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

$$\text{نضع } u_n v_n = w_n \text{ ، نجد } S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

$$\text{بما أن } u_n = \frac{1}{v_n} - 1 \text{ فإن } w_n = 1 - v_n \text{ ومنه } S_n = (1 - v_0) + (1 - v_1) + \dots + (1 - v_n)$$

$$\text{إذن } S_n = (1 + 1 + \dots + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \text{ مع } S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ ومنه } S_n = (n+1) - S'_n$$

إن  $S'_n$  هو مجموع  $n+1$  حد من متتالية حسابية أساسها  $\frac{1}{2}$  و عليه  $S'_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}n\right)$

$$S_n = \frac{-(n+1)(n+2)}{2} \text{ أي أن } S_n = (n+1) - \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

ب. حساب  $T_n$  بدلالة  $n$  : لدينا  $\frac{u_n}{u_n+1} = \frac{u_n+1-1}{u_n+1} = 1 - \frac{1}{u_n+1}$  وبما أن  $\frac{1}{u_n+1} = v_n$  فإن  $u_n+1 = \frac{1}{v_n}$

$$T_n = e^{S_n} = e^{\frac{-(n+1)(n+2)}{2}} \text{ أي أن } T_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \dots \times e^{w_n} \text{ و عليه } \frac{u_n}{u_n+1} = 1 - v_n = w_n \text{ ومنه}$$

### ✓ التمرين الثالث:

(1) أ. نقل الشكل ثم تمثيل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  على محور الفواصل:

ب. تعيين إحداثيات النقطة  $A$  :

نعتبر  $(x; y)$  إحداثيات النقطة  $A$

لدينا  $A \in (\Delta) \cap (C_f)$  معناه  $x \in ]-\infty; 4]$  و  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \text{ تكافئ } \frac{9}{6-x} = x \text{ ومنه } f(x) = x \text{ تكافئ } x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$f(x) = x \text{ تكافئ } (x-3)^2 = 0 \text{ أي أن } f(x) = x \text{ تكافئ } x = 3 \text{ ومنه } A(3; 3)$$

ج. التخمين: المتتالية العددية  $(u_n)$  متزايدة تماما و متقاربة

(2) أ. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < 3$

• من أجل  $n = 0$  :  $u_0 < 3$  محققة أن  $u_0 = -1$

• ليكن  $n$  عدد طبيعي ، لنفرض أن  $u_n < 3$  و لنبرهن أن  $u_{n+1} < 3$

الطريقة الأولى: لدينا فرضا  $u_n < 3$  إذن  $-u_n > -3$  ومنه  $6 - u_n > 3$  و عليه  $\frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{3}$  و بالتالي  $\frac{9}{6 - u_n} < 3$

إذن  $u_{n+1} < 3$  لأن  $u_{n+1} = f(u_n)$  . ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < 3$  .

الطريقة الثانية: لندرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 4]$  :

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } ]-\infty; 4] \text{ ومن أجل كل } x \text{ من } ]-\infty; 4] : f'(x) = \frac{9}{(6-x)^2}$$

نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 4]$  :  $f'(x) > 0$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 4]$

بما أن فرضا  $u_n < 3$  أي أن  $u_n \in ]-\infty; 3[$  و  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 3[$  (لأن  $]-\infty; 3[ \subset ]-\infty; 4]$ )

فإن  $f(u_n) < f(3)$  ومنه  $u_{n+1} < 3$  لأن  $u_{n+1} = f(u_n)$  و  $f(3) = 3$

$$\text{ب. ليكن } n \text{ عدد طبيعي ، لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{6 - u_n} \text{ أي أن } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$$

بما أنه من أجل عدد طبيعي  $n$  ،  $6 - u_n > 0$  أي أن  $6 - u_n > 0$  و كذلك  $(u_n - 3)^2 > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي  $(u_n)$  متتالية متزايدة تماما

ج. بما أن  $(u_n)$  متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فإن  $(u_n)$  متتالية متقاربة

$$(3) \text{ أ. لنبين أن } (v_n) \text{ متتالية حسابية: ليكن } n \text{ عدد طبيعي ، لدينا : } v_n = \frac{1}{u_n - 3} \text{ ومنه } v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 3} \text{ إذن } v_{n+1} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3}$$

ينتج  $v_{n+1} = \frac{6-u_n}{3u_n-9}$  و بالتالي  $v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{3u_n-9} - \frac{1}{u_n-3}$  أي أن  $v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{3}{3(u_n-3)}$

و عليه  $v_{n+1} - v_n = \frac{-(u_n-3)}{3(u_n-3)}$  نجد أن  $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}$  ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -\frac{1}{3}$  و حدها الأول  $v_0 = \frac{-1}{4}$

ب. بما أن  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -\frac{1}{3}$  و حدها الأول  $v_0 = \frac{-1}{4}$  فإنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{-1}{3}n - \frac{1}{4}$

من جهة أخرى  $v_n = \frac{1}{u_n-3}$  ومنه  $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$  إذن  $u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{3v_n + 1}{v_n}$  و بالتالي :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{3\left(\frac{-1}{3}n - \frac{1}{4}\right) + 1}{\frac{-1}{3}n - \frac{1}{4}} = \frac{3\left(\frac{-1}{3}n - \frac{1}{4}\right) + 1}{\frac{-1}{3}n - \frac{1}{4}}$  بعد الحساب نجد ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{12n-3}{4n+3}$

ج. بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12n}{4n} = 3$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد 3

### ✓ التمرين الرابع:

(I) تعيين قيمة  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  متتالية ثابتة :

$(v_n)$  متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = v_n$

و بما أن فرضا المتتالية  $(v_n)$  متتالية ثابتة فإنه بأخذ  $n=0$  نجد  $v_1 = v_0$  و بما أن  $u_0 = 1$  و  $v_0 = (\alpha+3)u_0 + \alpha$  فإن  $v_0 = 2\alpha + 3$  ، كذلك  $u_1 = \frac{3u_0+2}{4} = \frac{5}{4}$  و  $v_1 = (\alpha+3)u_1 + \alpha = \frac{9}{4}\alpha + \frac{15}{4}$  فإن  $v_1 = v_0$  تكافئ  $\frac{9}{4}\alpha + \frac{15}{4} = 2\alpha + 3$  ، و بالتالي  $v_1 = v_0$  تكافئ  $\frac{1}{4}\alpha = \frac{-3}{4}$  ومنه  $v_1 = v_0$  تكافئ  $\alpha = -3$

نستنتج أنه من أجل  $\alpha = -3$  تكون المتتالية  $(v_n)$  متتالية ثابتة

(II) نفرض  $\alpha \neq -3$

(1) تعيين  $\alpha$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية :

$(v_n)$  متتالية هندسية معناه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = v_n \times q$  حيث :  $q$  يوجد عدد حقيقي  $n$  حيث :  $v_{n+1} = v_n \times q$

بأخذ  $n=0$  نجد :  $v_1 = v_0 \times q$  و بما أن  $v_n = (\alpha+3)u_n + \alpha$  ، فإن  $v_{n+1} = (\alpha+3)u_{n+1} + \alpha$  ومنه  $v_{n+1} = \frac{3(\alpha+3)u_n + 2(\alpha+3) + 4\alpha}{4}$  و عليه  $v_{n+1} = (\alpha+3)\frac{3u_n+2}{4} + \alpha$

و بالتالي: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = v_n \times q$  حيث :  $q$  يوجد عدد حقيقي  $n$  حيث :  $v_{n+1} = v_n \times q$

و عليه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = v_n \times q$  حيث :  $q$  يوجد عدد حقيقي  $n$  حيث :  $v_{n+1} = v_n \times q$

ينتج :  $(\alpha+3)(3-4q) = 0$  و  $2\alpha(3-2q) + 6 = 0$  ، بما أن  $\alpha \neq -3$  فإن  $3-4q = 0$  أي أن  $q = \frac{3}{4}$  و  $\alpha = -2$

ومنه من أجل  $\alpha = -2$  المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{3}{4}$  و حدها الأول  $v_0 = 2(-2) + 3 = -1$  أي أن  $v_0 = -1$

(2) أ. من أجل  $\alpha = -2$  ، المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{3}{4}$  و حدها الأول  $v_0 = -1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n$  أي أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$

من جهة أخرى  $v_n = u_n - 2$  إذن  $u_n = v_n + 2$  و عليه  $u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$

- بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد 2
- ب. بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_n = v_n + 2$  فإن  $S_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$  أي أن  $S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (2 + 2 + \dots + 2)$  إن  $2 + 2 + \dots + 2 = 2(n+1)$  و  $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  هو مجموع  $(n+1)$  حد متتابع من المتتالية الهندسية  $(v_n)$  إذن  $S'_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$  أي أن  $S'_n = 4 \left( \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right)$  وعليه  $S_n = 4 \left( \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right) + 2(n+1)$  ومنه  $S_n = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$  وبالتالي  $S_n = 4 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-2}{n} = 2$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n} = 0$  لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 3 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n} + \frac{2n-2}{n} = 2$

### ✓ التمرين الخامس:

(1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_n > 0$  :

أ. من أجل  $n = 0$  :  $u_0 > 0$  محققة لأن  $u_0 = 1$

ب. ليكن  $n$  عدد طبيعي كفي : لنفرض أن  $u_n > 0$  ، ولنبرهن أن  $u_{n+1} > 0$

لدينا فرضا  $u_n > 0$  و من جهة أخرى  $e^{-u_n} > 0$  ، إذن  $u_n e^{-u_n} > 0$  و بما أن  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  فإن  $u_{n+1} > 0$  .  
من أ. و ب . ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_n > 0$

(2) لنبين أن  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما :

الطريقة الأولى : من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n (e^{-u_n} - 1)$  ؛

بما أن  $u_n > 0$  فإن  $-u_n < 0$  ومنه  $e^{-u_n} < 1$  و عليه  $e^{-u_n} - 1 < 0$

ينتج أن  $u_n (e^{-u_n} - 1) < 0$  أي أن  $u_{n+1} - u_n < 0$  وبالتالي  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما

الطريقة الثانية : بما أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛ فإننا نقارن بين كل من  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  و العدد 1

لدينا  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$  و بما أن  $u_n > 0$  فإن  $-u_n < 0$  ومنه  $e^{-u_n} < 1$  و عليه  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_{n+1} < u_n$  و بالتالي  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما

• استنتاج أن  $(u_n)$  متتالية متقاربة :

بما أن  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما و محدودة من الأسفل لأن (من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_n > 0$ ) فإنها متقاربة

(3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_n = v_n - v_{n+1}$  ؛

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $v_n - v_{n+1} = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$  ومنه  $v_n - v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

$$v_n - v_{n+1} = u_n \text{ عليه } v_n - v_{n+1} = \ln(e^{u_n}) \text{ فإن } \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{e^{-u_n}} = e^{u_n} \text{ و بما أن}$$

ب. نبين أن:  $S_n = -v_n$  :

بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n = v_n - v_{n+1}$  فإن :

$$S_n = -v_n \text{ ومنه } S_n = (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \dots + (v_{n-1} - v_n)$$

ج. حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  :

لنحسب أولاً  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  : نعلم أنه إذا كانت  $(u_n)$  متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي  $L$  فإن  $L = Le^{-L}$  يحقق

$$L(1 - e^{-L}) = 0 \text{ ومنه } L = 0 \text{ أو } e^{-L} = 1 \text{ إذن } L = 0$$

و بالتالي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-v_n)$  أي أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln(u_n))$  ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(x)) = +\infty$$

### ✓ التمرين السادس :

(1) حساب  $u_1, u_2$  و  $u_3$  :

$$\bullet \quad u_1 = \frac{2+3\sqrt{2}}{6} \text{ فإن } u_0 = \frac{2}{3} \text{ و بما أن } u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \quad u_2 = \frac{1+6\sqrt{2}}{6} \text{ فإن } u_1 = \frac{2+3\sqrt{2}}{6} \text{ و بما أن } u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \quad u_3 = \frac{1+18\sqrt{2}}{12} \text{ فإن } u_2 = \frac{1+6\sqrt{2}}{6} \text{ و بما أن } u_3 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) أ. نبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

ليكن  $n$  عدد طبيعي ، لدينا  $v_n = \sqrt{2}u_n - n$  ومنه  $v_{n+1} = \sqrt{2}u_{n+1} - (n+1)$

$$\text{و بما أن } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{2}}n + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ فإن } v_{n+1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{2}}n + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (n+1)$$

$$\text{أي أن } v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n - \frac{1}{2}n \text{ ومنه } v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n$$

و بالتالي  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$  . إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$

ب. تعيين عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

بما أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_n = v_0 \times q^n$

$$\bullet \quad \text{حساب } v_0 : \text{ لدينا } v_0 = \sqrt{2}u_0 \text{ و بما أن } u_0 = \frac{2}{3} \text{ فإن } v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{و عليه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ؛ } v_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

• استنتاج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{ليكن } n \text{ عدد طبيعي ؛ لدينا } v_n = \sqrt{2}u_n - n \text{ ومنه } u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}v_n + \frac{n}{\sqrt{2}} \text{ عليه } u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}v_n + \frac{n}{\sqrt{2}}$$

و بما أن  $v_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$  فإن  $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + \frac{n}{\sqrt{2}}$  أي أن  $u_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{\sqrt{2}}$

• بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2}} = +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  و عليه  $(u_n)$  متتالية متباعدة

(3) نبين أن  $S_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$

إن  $S_n$  هو مجموع  $n+2$  حد متتابع من متتالية هندسية ، إذن  $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$  أي أن  $S_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{2}}$

ومنه  $S_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left( 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$  ينتج أن  $S_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left( 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} \right)$  أي أن  $S_n = \frac{4\sqrt{2}}{3} \times \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right)$

• نبين أن  $T_n = \frac{1}{3} \left( 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} (n+1)(n+2)$

بما أن  $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} v_n + \frac{n}{\sqrt{2}}$  فإن  $T_n = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} v_n + \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right)$

ومنه  $T_n = \frac{1}{\sqrt{2}} S_n + \frac{1}{\sqrt{2}} (1+2+\dots+(n+1))$  أي أن  $T_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{1}{\sqrt{2}} (1+2+\dots+(n+1))$

إن  $1+2+\dots+(n+1)$  هو مجموع  $n+1$  د متتابع من متتالية حسابية أساسها  $r=1$  و عليه

$$1+2+\dots+(n+1) = \frac{n+1}{2} (1+n+1)$$

أي أن  $1+2+\dots+(n+1) = \frac{n+1}{2} (n+2)$  من جهة أخرى  $S_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left( 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$

و عليه  $T_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left( 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (n+1)(n+2)$  ومنه  $T_n = \frac{1}{3} \times \left( 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} (n+1)(n+2)$

### ✓ التمرين السابع :

(I)

(1) حساب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  :

•  $u_1 = \frac{158}{13}$  و بما أن  $u_0 = 12$  فإن  $u_1 = \frac{12}{13} u_0 + \frac{14}{13}$

•  $u_2 = \frac{2078}{169}$  و بما أن  $u_1 = \frac{158}{13}$  فإن  $u_2 = \frac{12}{13} u_1 + \frac{14}{13}$

•  $u_3 = \frac{27302}{2197}$  و بما أن  $u_2 = \frac{2078}{169}$  فإن  $u_3 = \frac{12}{13} u_2 + \frac{14}{13}$

(2) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n < 14$  :

أ. من أجل  $n=0$  :  $u_0 = 12 < 14$  لأن  $u_0 = 12$

ب. ليكن  $n$  عدد طبيعي كفي ؛ لنفرض أن  $u_n < 14$  و لنبرهن أن  $u_{n+1} < 14$

لدينا فرضا  $u_n < 14$  إذن  $\frac{12}{13} u_n < \frac{168}{13}$  ومنه  $\frac{12}{13} u_n + \frac{14}{13} < \frac{182}{13}$  و عليه  $u_{n+1} < 14$

من أ و ب ينتج ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n < 14$

(3) نبرهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{12}{13} - 1\right)u_n + \frac{14}{13} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{12}{13}u_n + \frac{14}{13} - u_n \quad \text{؛ } n \text{ طبيعي}$$

$$\text{ومنه } u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{13}u_n + \frac{14}{13} = \frac{1}{13}(14 - u_n) \quad \text{فإن } u_n < 14 \quad \text{؛ } n \text{ طبيعي}$$

و عليه  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

• استنتاج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة :

بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى (لأن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n < 14$ )  
فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

(II)

(1) نبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية :

$$u_{n+1} = \frac{12}{13}u_n + \frac{14}{13} \quad \text{و بما أن } v_{n+1} = u_{n+1} - 14 \quad \text{ومنه } v_n = u_n - 14 \quad \text{؛ } n \text{ طبيعي}$$

$$\text{فإن } v_{n+1} = \frac{12}{13}u_n + \frac{14}{13} - 14 \quad \text{أي أن } v_{n+1} = \frac{12}{13}u_n - \frac{14 \times 12}{13} \quad \text{ومنه } v_{n+1} = \frac{12}{13}(u_n - 14) \quad \text{ينتج } v_{n+1} = \frac{12}{13}v_n$$

$$\text{و بالتالي } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{12}{13} \quad \text{و حدها الأول } v_0 \text{ حيث } v_0 = u_0 - 14 = -2$$

(2) تعيين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{نعين أولا عبارة } v_n \text{ بدلالة } n : \text{ بما أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{12}{13} \quad \text{و حدها الأول } v_0 = -2$$

$$\text{فإن من أجل كل عدد طبيعي } n \quad ; \quad v_n = -2 \left(\frac{12}{13}\right)^n$$

$$\text{من جهة أخرى } v_n = u_n - 14 \quad \text{أي أن } u_n = v_n + 14 \quad \text{ينتج من أجل كل عدد طبيعي } n \quad ; \quad u_n = -2 \left(\frac{12}{13}\right)^n + 14$$

$$\bullet \text{ استنتاج نهاية } (u_n) : \text{ بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{12}{13}\right)^n = 0 \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 14$$

(3) أ. تعيين المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{بما أن } u_n = v_n + 14 \quad \text{فإن } S_n = (v_0 + 14) + (v_1 + 14) + \dots + (v_n + 14)$$

$$\text{ومنه } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (14 + 14 + \dots + 14) \quad \text{إن } 14 + 14 + \dots + 14 = 14(n+1)$$

$$\text{من جهة أخرى } S_n' = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{هو مجموع } n+1 \text{ حد متتابع من متتالية هندسية أساسها } q = \frac{12}{13}$$

$$\text{إذن } S_n' = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{ومنه } S_n' = -2 \frac{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^{n+1}}{1 - \frac{12}{13}} \quad \text{أي أن } S_n' = 26 \left( \left(\frac{12}{13}\right)^{n+1} - 1 \right)$$

$$\text{و عليه } S_n = 26 \left( \left(\frac{12}{13}\right)^{n+1} - 1 \right) + 14(n+1)$$

ب. تعيين المجموع  $T_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{لنضع } w_n = \sqrt[3]{v_n^2} \quad \text{ينتج أن } T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

**لنبين أن هو  $(w_n)$  متتالية هندسية :**

بما أن  $(v_n)$  متتالية هندسية فإنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_{n+1} = v_n \times q$  إذن  $(v_{n+1})^2 = (v_n \times q)^2 = (v_n)^2 \times q^2$  ومنه  $\sqrt[3]{(v_{n+1})^2} = \sqrt[3]{(v_n)^2 \times q^2} = \sqrt[3]{(v_n)^2} \times \sqrt[3]{q^2}$  أي أن  $\sqrt[3]{(v_{n+1})^2} = \sqrt[3]{(v_n)^2} \times \sqrt[3]{q^2}$

ينتج أن  $w_{n+1} = w_n \times \sqrt[3]{\frac{144}{169}}$  وعليه  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q' = \sqrt[3]{\frac{144}{169}}$  و حدها الأول  $w_0 = \sqrt[3]{4}$

و عليه  $T_n$  هو مجموع  $n+1$  حد متتابع من متتالية هندسية أساسها  $q'$  ومنه  $T_n = w_0 \times \frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'}$

$$T_n = \frac{\sqrt[3]{676}}{\sqrt[3]{169} - \sqrt[3]{144}} \times \left( 1 - \left( \sqrt[3]{\frac{144}{169}} \right)^{n+1} \right) \quad \text{أي أن } T_n = \sqrt[3]{4} \times \frac{1 - \left( \sqrt[3]{\frac{144}{169}} \right)^{n+1}}{1 - \sqrt[3]{\frac{144}{169}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{\sqrt[3]{676}}{\sqrt[3]{169} - \sqrt[3]{144}} \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{\frac{144}{169}} \right)^{n+1} = 0 \quad \bullet$$

### ✓ التمرين الثامن :

(1) أ. حساب  $u_1$  و  $u_2$  :

$$\bullet \quad u_1 = \frac{4u_0}{1+u_0} \quad \text{و بما أن } u_0 = 1 \text{ فإن } u_1 = 2$$

$$\bullet \quad u_2 = \frac{4u_1}{1+u_1} \quad \text{و بما أن } u_1 = 2 \text{ فإن } u_2 = \frac{8}{3}$$

ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $0 < u_n < 3$

(1) من أجل  $n=0$  :  $0 < u_0 < 3$  محققة لأن  $u_0 = 1$

(2) ليكن  $n$  عدد طبيعي كفي ؛ لنفرض أن  $0 < u_n < 3$  و لنبرهن أن  $0 < u_{n+1} < 3$

**الطريقة الأولى :** نوظف اتجاه تغير الدالة المرفقة

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{4x}{1+x}$  لاحظ أن  $u_{n+1} = f(u_n)$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ؛  $f'(x) = \frac{4}{(1+x)^2}$

نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ؛  $f'(x) > 0$  إذن  $f$  دالة متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$

و بما أن فرضا  $0 < u_n < 3$  و الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[0; 3]$  فإن  $f(0) < f(u_n) < f(3)$

ومنه  $0 < u_{n+1} < 3$  لأن  $f(0) = 0$  و  $f(3) = 3$

**الطريقة الثانية :** نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{1+u_n}$

لدينا فرضا  $0 < u_n < 3$  ومنه  $1 < 1+u_n < 4$  إذن  $\frac{1}{4} < \frac{1}{1+u_n} < 1$  وعليه  $1 < \frac{4}{1+u_n} < 4$

ومنه  $-4 < -\frac{4}{1+u_n} < -1$  و بالتالي  $0 < 4 - \frac{4}{1+u_n} < 3$  أي أن  $0 < u_{n+1} < 3$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $0 < u_n < 3$

ج. نبرهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما :

**الطريقة الأولى:** من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + 3u_n}{1+u_n}$  أي أن  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(-u_n+3)}{1+u_n}$

بما أن  $0 < u_n < 3$  فإن  $-3 < -u_n < 0$  ومنه  $0 < 3 - u_n < 3$  أي أن  $-u_n + 3 > 0$  و  $1 + u_n > 0$  وعليه  $u_{n+1} - u_n > 0$  إذن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً

**الطريقة الثانية:** بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n > 0$  فإننا نقارن  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  بالعدد 1

لدينا  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{1+u_n}$  و بما أن  $1 < 1+u_n < 4$  فإن  $\frac{1}{4} < \frac{1}{1+u_n} < 1$  ومنه  $\frac{4}{1+u_n} < 1$  أي أن  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

وعليه  $u_{n+1} < u_n$  إذن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً

• بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً و محدودة من الأعلى بالعدد 3 ( لأن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $0 < u_n < 3$  ) فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

(2) أ. نبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$  ومنه  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}}$  و بما أن  $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$

فإن  $v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}}$  ومنه  $v_{n+1} = \frac{4u_n - 3(1+u_n)}{4u_n}$  أي أن  $v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{4u_n}$  ومنه  $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$  ومنه  $v_{n+1} = \frac{1}{4} \left( \frac{u_n - 3}{u_n} \right)$

وعليه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{4}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2$

ب. تعيين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لنعين أولاً عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  : بما أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{4}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2$

فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_n = -2 \left( \frac{1}{4} \right)^n$

و بما أن  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$  فإن  $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$  ومنه  $\frac{1}{u_n} = \frac{1 - v_n}{3}$  وبالتالي  $u_n = \frac{3}{1 - v_n}$  و عليه  $u_n = \frac{3}{1 + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^n}$

• حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  : بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

(3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $w_n = 1 - v_n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $w_n = \frac{3}{u_n}$  و بما أن  $u_n = \frac{3}{1 - v_n}$  فإن  $w_n = \frac{3}{1 - v_n}$  أي أن  $w_n = 1 - v_n$

ب. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$  :

بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $w_n = 1 - v_n$  فإن  $S_n = (1 - v_0) + (1 - v_1) + \dots + (1 - v_n)$

ومنه  $S_n = (1 + 1 + \dots + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$

إن  $S_n' = (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$  هو مجموع  $n+1$  حد متتابع من المتتالية الهندسية  $(v_n)$

$$S_n' = \frac{-8}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \text{ أي أن } S_n' = (-2) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \text{ ومنه } S_n' = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \text{ وعليه}$$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  : بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

### ✓ التمرين التاسع :

(1)

- أ. \* الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[0;1]$  لأنها دالة صماء  
 \* الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0;1[$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0;1[$  :  

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$
 ومنه ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0;1[$  :  $f'(x) \geq 0$  و بالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$   
 ب. بما أن الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$  فإن صورة المجال  $[0;1]$  هي المجال  $[f(0); f(1)]$   
 أي هي المجال  $[0;1]$

- (2) أ. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$

(1) من أجل  $n=0$  :  $0 \leq u_0 \leq 1$  محققة لأن  $u_0 = \frac{1}{2}$

(2) ليكن  $n$  عدد طبيعي كفي ؛ لنفرض أن  $0 \leq u_n \leq 1$  لنبرهن أن  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا فرضا  $0 \leq u_n \leq 1$  أي أن  $u_n \in [0;1]$  و حسب السؤال السابق فإن  $f(u_n) \in [0;1]$

أي أن  $u_{n+1} \in [0;1]$  و عليه  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$

ب. نبين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - u_n^2} - u_n$  ؛

ومنه  $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n - u_n^2} - u_n)(\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n)}{\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n}$

أي أن  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n}$  ومنه  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2}{\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n}$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$  فإن  $2u_n \geq 0$  و  $1-u_n \geq 0$  و  $\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n > 0$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

ج. بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 (لأن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$ )

فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو عدد حقيقي  $L$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  : بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  فإن  $L$  هو حل للمعادلة  $f(x) = x$  في المجال  $[0;1]$

لدينا :  $f(x) = x$  تكافئ  $\sqrt{2x-x^2} = x$  ومنه  $f(x) = x$  تكافئ  $2x-x^2 = x^2$  و  $0 \leq x \leq 1$

إن  $f(x) = x$  تكافئ  $2x(x-1) = 0$  و  $0 \leq x \leq 1$  و عليه  $f(x) = x$  تكافئ  $(x=0 \text{ أو } x=1)$  و  $0 \leq x \leq 1$

و بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما فإن  $L=1$

### ✓ التمرين العاشر :

(1) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $1 < u_n < 2$

(أ) من أجل  $n=0$  ؛  $1 < u_0 < 2$  محققة لأن  $u_0 = \frac{3}{2}$

(ب) ليكن  $n$  عدد طبيعي كفي، لنفرض أن  $1 < u_n < 2$  و لنبرهن أن  $1 < u_{n+1} < 2$

لدينا فرضا  $1 < u_n < 2$  إذن  $0 < u_n - 1 < 1$  ومنه  $0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$  و عليه  $1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2$  أي أن  $1 < u_{n+1} < 2$

من (أ) و (ب) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $1 < u_n < 2$

(2) أ. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n$  ومنه  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)$

$$\text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 1 - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1} \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = \frac{[\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)][\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)]}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$\text{و بالتالي } u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1} \text{ أي أن } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 1 - u_n^2 + 2u_n - 1}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

ب. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$  ؛ بما أن  $1 < u_n < 2$  فإن  $u_n - 1 > 0$  ومنه  $\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1 > 0$

و عليه إشارة  $u_{n+1} - u_n$  من إشارة  $-u_n^2 + 3u_n - 2$  . إن  $-u_n^2 + 3u_n - 2 = 0$  تكافئ  $u_n = 1$  أو  $u_n = 2$  .

تعطى إشارة  $u_{n+1} - u_n$  على النحو التالي :

|                 |           |   |   |           |
|-----------------|-----------|---|---|-----------|
| $u_n$           | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $u_{n+1} - u_n$ | -         | - | + | -         |

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $1 < u_n < 2$  فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $1 < u_n < 2$  ؛  $u_{n+1} - u_n > 0$  ؛

ينتج أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

• بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى ( لأن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $1 < u_n < 2$  )

فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

(3) أ. نبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية :

من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$  و بما أن  $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n$

$$\text{فإن } v_{n+1} = \ln(\sqrt{u_n - 1}) \text{ ومنه } v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) \text{ أي أن } v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

و بالتالي المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  و حدها الأول  $v_0 = \ln(u_0 - 1)$  أي أن  $v_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

ب. تعين عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  :

بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  و حدها الأول  $v_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

فإن من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

من جهة أخرى  $v_n = \ln(u_n - 1)$  إذن  $u_n - 1 = e^{v_n}$  ومنه  $u_n = e^{v_n} + 1$  و عليه  $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1$  أي أن  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} + 1$

• استنتاج ثانية أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة : بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} + 1\right] = 2$  أي أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد 2

(4) حساب بدلالة  $n$  المقدار  $P(n)$  : بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_n - 1 = e^{v_n}$

فإن  $P(n) = e^{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}$  ومنه  $P(n) = e^{v_1} \times e^{v_2} \times e^{v_3} \times \dots \times e^{v_n}$

إن  $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$  هو مجموع  $n$  حد متتابع من متتالية هندسية فإن  $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$  أي أن

$$P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \text{ أو } P(n) = e^{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \text{ ومنه } S_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ عليه } S_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

**تجدون ملخصات دروس و تطبيقات متنوعة في مجموعة : الأستاذ محمد علالو**