

الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية 01

الجزء الأول:

لتكن g دالة عددية مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 10 + 21x - x^3$.

- (1) أدرُس تغيّرات الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
- (2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول α ، β و λ حيث $-4,4 < \alpha < -4,3$ ، $-0,5 < \beta < -0,4$ و $4,8 < \lambda < 4,9$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x .

الجزء الثاني:

لتكن f دالة عددية مُعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{1 - 3x^2 - 4x^3}{x^3 + x^2 - 2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

- (1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسّر هندسياً النتائج.
- (2) (أ) أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ وأن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^3 + x^2 - 2)^2}$.
(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
- (3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً μ حيث $0,4 < \mu < 0,5$.
- (4) حل المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x حيث $f(x) + 4 = 0$. ماذا تستنتج؟
- (5) نقبل أن (C_f) يقبل $\Omega\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{20}\right)$ كنقطة إنعطاف، أرسم (C_f) .

إعداد الأستاذ: محمد بن عبد الله
تدريس: محمد بن عبد الله

الإجابة النموذجية

الجزء الأول

(1) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x) = -3x^2 + 21$.
لدينا $g'(x) = 0$ يكافئ $-3x^2 + 21 = 0$ يكافئ $x = \sqrt{7}$ أو $x = -\sqrt{7}$ ، وإشارة $g'(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-

الدالة g متزايدة تماماً على $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ و متناقصة تماماً على $]-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ، وتغيرات الدالة g موضحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	$-27,04$	$47,04$	$-\infty$	

(2) الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً على كل مجال من المجالات $]-0,5; -0,4[$ ، $]-4,4; -4,3[$ و $]4,8; 4,9[$ ولدينا $g(-4,3) \times g(-4,4) < 0$ ، $g(-0,5) \times g(-0,4) < 0$ وكذلك $g(4,8) \times g(4,9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول α ، β و λ حيث $-4,4 < \alpha < -4,3$ ، $-0,5 < \beta < -0,4$ و $4,8 < \lambda < 4,9$.

(3) إشارة $g(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	α	β	λ	$+\infty$		
$g(x)$	+	0	-	0	+	0	-

الجزء الثاني

(1) لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -4$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$ (C_f) .

كذلك $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي (C_f) .

(2) (i) الدالتان $x \mapsto 1 - 3x^2 - 4x^3$ و $x \mapsto x^3 + x^2 - 2$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، ومنه الدالة f

$$f'(x) = \frac{10x + 21x^2 - x^4}{(x^3 + x^2 - 2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^3 + x^2 - 2)^2}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، ودالتها المشتقة

(ب) إشارة $f'(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	α	β	0	1	λ	$+\infty$
x	-	-	-	+	+	+	+
$g(x)$	+	-	+	0	+	+	-
$f'(x)$	-	0	+	0	-	+	+

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على $[\alpha, \beta] \cup [0, 1] \cup [1, \lambda]$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty, \alpha] \cup [\beta, 0] \cup [\lambda, +\infty[$ وجدول تغيراتها هو

x	$-\infty$	α	β	0	1	λ	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-	+	+	-
$f(x)$	-4	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$f(\lambda)$	-4

(3) الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على $]0, 4; 0, 5[$ و $f(0, 4) \times f(0, 5) < 0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً μ حيث $0, 4 < \mu < 0, 5$.

(4) لدينا $f(x) + 4 = 0$ تكافئ $f(x) = -4$ يكافئ $x = -\sqrt{7}$ أو $x = \sqrt{7}$ ، أي أن (C_f) يقطع المستقيم المقارب الأفقي الذي معادلته $y = -4$ في نقطتين فاصلتهما $x = \sqrt{7}, x = -\sqrt{7}$.

