

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية: محمد بوضياف - مديونة
يوم: الثلاثاء 18 نوفمبر 2025

مديرية التربية لولاية غليزان
المستوى: السنة الثانية ثانوي
الشعبة: رياضيات

المدة: 80 دقيقة

الفرض المحروس الثاني للفصل الأول في مادة: الرياضيات

التمرين الأول: ()

الجزء الأول: x متغير حقيقي، نعتبر كثيري الحدود P و Q_α المعرفين كمايلي:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1 \quad \text{و} \quad Q_\alpha(x) = x^2 + (3 + \alpha)x - \frac{1}{\alpha}$$

حيث α عدد حقيقي وحيد من المجال $]-0.4, -0.3[$ و يحقق $P(\alpha) = 0$.

(1) ليكن Δ_α مميز ثلاثي الحدود $Q_\alpha(x)$.

(أ) بين أن: $\Delta_\alpha = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$.

(ب) عين إشارة العدد Δ_α ، ثم استنتج إشارة $Q_\alpha(x)$ حسب قيم x .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $P(x) = (x - \alpha)Q_\alpha(x)$.

(3) أدرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2}$.

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x) = -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية يطلب تعيينها.

(4) ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1: $f(x) = x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

(5) بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(6) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f''(x) = \frac{-2x-1}{(x-1)^4}$.

(ب) بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(7) بالاعتماد على التقريب التآلفي، عين قيمة مقربة للعدد $f\left(-\frac{2025}{2026}\right)$.

بالتوفيق للجميع

انتهى الموضوع

3/ إشارة $P(x)$ حسب قيم x :

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $Q_\alpha(x) > 0$
إذن إشارة $(x-\alpha)Q_\alpha(x)$ هي نفس إشارة $(x-\alpha)$

$P(x)$: $\xrightarrow{-\infty} \quad \quad \quad \xrightarrow{+\infty}$

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2}; D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{II}$$

(1) تبين أن $f'(x) = -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$

الدرجة 4 قابلة للاختصار على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{2(6x^2 - 8x)(x-1)^2 - 4(x-1)(2x^3 - 4x^2 + 1)}{4(x-1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2 - 4x)(x-1) - (2x^3 - 4x^2 + 1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 7x^2 + 4x - 2x^3 + 4x^2 - 1}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{-x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{(-x)^3 + 3(-x)^2 + 4(-x) + 1}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$$

(2) دراسة إشارة f' :

لدينا من أجل كل x من D_f : إشارة $(x-1)^3$ هي نفس

إشارة $(x-1)$. إذن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\frac{-P(-x)}{(x-1)}$

• لدرس إشارة $P(-x)$ حسب قيم x :

$x = -\alpha$: هنا $P(-x) = 0$

$x < -\alpha$: هنا $P(-x) > 0$

$x > -\alpha$: هنا $P(-x) < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	1	$+\infty$
$P(-x)$	+	0	-	-
$x-1$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

إذن:
إشارة $f'(x)$

حل المبريد:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1 \quad \text{I}$$

$$Q_\alpha(x) = x^2 + (3+\alpha)x - \frac{1}{\alpha}$$

$$\Delta_\alpha = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$$

$$\Delta_\alpha = (3+\alpha)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + 6\alpha + 9 + \frac{4}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4}{\alpha} \quad \dots (1)$$

بما أن $P(\alpha) = 0$ فإن:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^3 = -3\alpha^2 - 4\alpha - 1 \quad \dots (2)$$

$$\Delta_\alpha = \frac{-3\alpha^2 - 4\alpha - 1 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4}{\alpha}$$

$$= \frac{3\alpha^2 + 5\alpha + 3}{\alpha} = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$$

(ب) تبين إشارة Δ_α :

$$\begin{cases} 3,8 < 3\alpha + 5 < 4,1 : \text{إذن } -0,4 < \alpha < -0,3 \\ -\frac{3}{0,3} < \frac{3}{\alpha} < -\frac{3}{0,4} \end{cases}$$

$$-6,2 < 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha} < -3,4 = \Delta_\alpha$$

إذن: $\Delta_\alpha < 0$ أي إشارة Δ_α سالبة كلها.

• استنتاج إشارة $Q_\alpha(x)$ حسب قيم x :

بما أن $\Delta_\alpha < 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$Q_\alpha(x) > 0$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$P(x) = (x-\alpha)Q_\alpha(x)$$

$$(x-\alpha)Q_\alpha(x) = (x-\alpha)\left(x^2 + (3+\alpha)x - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= x^3 + (3+\alpha)x^2 - \frac{1}{\alpha}x - \alpha x^2 - \alpha(3+\alpha)x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 - \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1}{\alpha}x + 1$$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1 = -4\alpha \quad \text{فإن } P(\alpha) = 0$$

$$(x-\alpha)Q_\alpha(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{4\alpha}{\alpha}x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 + 4x + 1$$

$$= P(x) \quad \text{و بالتالي } P(x) = (x-\alpha)Q_\alpha(x)$$

إذاً الآلة f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty, -\alpha]$ و $[\alpha, +\infty[$ و شاذة تماماً على المجال $]-\alpha, \alpha[$.

* جدول التقديرات:

x	$-\infty$	$-\alpha$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

(3) بما أن الآلة f تعتمد من أجل القيمة $-\alpha$ وتغير إشارتها حول أروحاته القيمة فإن $f(-\alpha)$ قيمة حدية محلية للآلة f .

(4) أ) التحقق أن: $f(x) = x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

$$x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 x - 2x + 1}{2(x-1)^2} = \frac{2(x^2 - 2x + 1)x - 2x + 1}{2(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x + 1}{2(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2} = f(x)$$

إذن: $f(x) = x + \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

ب) دراسة الوحد التي لـ (ف) و (د):
ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y]$

$$f(x) - y = f(x) - x = \frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$$

بما أنه من أجل كل x من $f(x) > 0$ فإن إشارة الفرق $[f(x) - y]$ من نفس إشارة $(-2x+1)$.

وصفه:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-	-
الوحد التي لـ (ف) التي تحت (د)				

(5) بيان أن (ف) يمثل محاساً وحيداً (ج) يوازي (د) يطلب تعيين معادلة له:

$$\text{نحل في } P(x) = 1 \text{ معادلة: } \frac{P(-x)}{(x-1)^3} = 1 \text{ معناه: } \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)^3} = 1 \text{ معناه: } \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^3} = 0$$

$$\text{معناه: } \frac{x}{(x-1)^3} = 0 \text{ معناه: } x = 0$$

إذن (ف) يمثل محاساً وحيداً (ج) عند النقطة

ذات الفاصلة $x_0 = 0$ و يوازي (د).

تعيين معادلة (ج): لنينا: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ إذن}$$

$$= 1x + \frac{1}{2}$$

$$y = x + \frac{1}{2} \text{ وبالتالي:}$$

16 أ) الآلة f قابلة للاستغناء على P ولدينا من أجل كل x من D_f :

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 4)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{(3x^2 - 6x + 4)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{(x-1)^4}$$

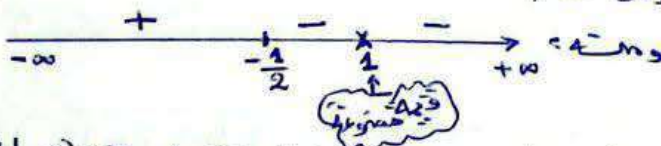
$$= \frac{3x^3 - 9x^2 + 10x - 4 - 3x^3 + 9x^2 - 12x + 3}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-2x - 1}{(x-1)^4}$$

ب) دراسة إشارة $f''(x)$:

لدينا من أجل كل x من D_f ، $(x-1)^4 > 0$

إذن إشارة $f''(x)$ من نفس إشارة $-2x - 1$.



بما أن $f''(x)$ تعتمد من أجل القيمة $-\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها بجوارحاته القيمة فإن النقطة $(-\frac{1}{2}; f(-\frac{1}{2}))$ نقطة انعطاف للحنى (ف).

(7) تعيين قيمة حربية لـ $f(-\frac{2025}{2026})$

$$f(-\frac{2025}{2026}) = f(-1 + \frac{1}{2026})$$

$$f(-\frac{2025}{2026}) \approx f'(-1) \left(\frac{1}{2026} \right) + f(-1)$$

$$\approx \frac{9}{8} \times \frac{1}{2026} - \frac{5}{8}$$

$$\approx \frac{9 - 5 \times 2026}{16208}$$

$$\approx -\frac{10121}{16208}$$

$$\approx -0,6244$$