

التمرين

- ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. نعتبر النقطتين I و J حيث I مرجح $\left(A, -\frac{1}{2}\right)$ و J مرجح $(A, 2)$ و $(D, -3)$
- (1) بين أن A هي مرجح النقطتين I و B مرفقة بمعاملين يطلب تعيينهما.
- (2) بين أن النقطة C مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (D; \gamma)\}$ حيث α, β, γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
- (3) بين أن: $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
- (4) بين أن النقط C, I و J في استقامة.
- (5) لتكن النقطة G_m مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1+m), (B; -8+2m), (D; 1-4m)\}$ حيث m عدد حقيقي.
- أ- من أجل أي قيم m حتى تكون النقطة G_m موجودة ثم أنشئ النقطة G_1 .
- ب- بين أن المستقيمين (JB) و (ID) يتقاطعان في النقطة G_1 .
- (6) M نقطة من المستوي عين مجموعة النقط في كل حالة
- أ- $\|2\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}\| = 7$
- ب- $3\|2\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}\| = 7\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\|$
- ج- $\|2\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$

حل تمرين شامل في المرجح:

- ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. نعتبر النقطتين I و J حيث I مرجح $\left(A, -\frac{1}{2}\right)$ و J مرجح $(A, 2)$ و $(D, -3)$
- (1) تبين أن A هي مرجح النقطتين I و B مرفقة بمعاملين يطلب تعيينهما.
- بما أن I مرجح $\left(A, -\frac{1}{2}\right)$ و J مرجح $(A, 2)$ فإن I مرجح $(A, -1)$ و J مرجح $(B, 3)$ ومنه $-\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ باستعمال علاقة شال نجد $-\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$
- معناه $-\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
- $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ معناه $2\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه النقطة A مرجح الجملة المثقلة $\{(I; -2), (B; 3)\}$.
- (2) تبين أن النقطة C مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (D; \gamma)\}$
- بما أن $ABCD$ فإن $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ معناه $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$
- ومنه النقطة C مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 1), (D; 1)\}$
- (3) تبين أن: $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
- بما أن I مرجح $\left(A, -\frac{1}{2}\right)$ و J مرجح $(A, 2)$ فإن I مرجح $(A, -1)$ و J مرجح $(B, 3)$ ومنه $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ معناه
- $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ باستعمال علاقة شال نجد $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ معناه $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ معناه $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
- ولدينا J مرجح $(A, 2)$ و $(D, -3)$ معناه $\overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{-1}\overrightarrow{AD}$ معناه $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ باستعمال علاقة شال نجد $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AD}$ معناه
- $\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$ معناه $\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$ معناه $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$

(4) بين أن النقط C ، I و J في استقامية.

لدينا $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{BC}$ وبما أن $ABCD$ فإن $\vec{AB} = \vec{DC}$ و $\vec{BC} = \vec{AD}$ وعليه $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{DC} - \vec{AD}$ بالضرب في العدد -2 نجد

$$-2\vec{CI} = -\vec{DC} + 2\vec{AD}$$

ولدينا $\vec{CJ} = 2\vec{AD} - \vec{DC}$ ومنه $-2\vec{CI} = \vec{CJ}$ وعليه الشعاعان $\vec{CI}$ و $\vec{CJ}$ مرتبطين خطيا ومنه المستقيمان (CI) و (CJ) متوازيان ولهما نقطة مشتركة C ومنه النقط C ، I و J في استقامية.

(5) لتكن النقطة G_m مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1+m), (B; -8+2m), (D; 1-4m)\}$ حيث m عدد حقيقي.

أ- قيم m حتى تكون النقطة G_m موجودة

$$G_m \text{ موجودة ووحيدة لما } (1+m) + (-8+2m) + (1-4m) \neq 0$$

$$\text{معناه } -6-m \neq 0 \text{ معناه } m \neq -6 \text{ ومنه } m \in \mathbb{R} - \{-6\}$$

أنشئ النقطة G_1 .

ب- تبين أن المستقيمين (JB) و (ID) يتقاطعان في النقطة G_1 .

لدينا G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 2), (B; -6), (D; -3)\}$

ولدينا I مرجح $\left(A, -\frac{1}{2}\right)$ و $\left(B, \frac{3}{2}\right)$ أي I مرجح $(A, 2)$ و $(B, -6)$ باستعمال خاصية التجميع نجد أن G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(I; -4), (D; -3)\}$

ومنه النقط G_1 ، D و I في استقامية وعليه $G_1 \in (ID)$

ومن جهة G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 2), (B; -6), (D; -3)\}$

ولدينا J مرجح $(A, 2)$ و $(D, -3)$ باستعمال خاصية التجميع نجد أن G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(J; -1), (B; -6)\}$ ومنه النقط G_1 ، B و J في استقامية و

عليه $G_1 \in (JB)$

وعليه نقطة G_1 مشتركة بين المستقيمين (JB) و (ID) ومنه المستقيمين (JB) و (ID) يتقاطعان في النقطة G_1 .

(6) M نقطة من المستوي تعين مجموعة النقط في كل حالة :

$$\text{أ- } \|2\vec{MA} - 6\vec{MB} - 3\vec{MD}\| = 7$$

يكافئ $\| -7\vec{MG}_1 \| = 7$ يكافئ $7MG_1 = 7$ يكافئ $MG_1 = 1$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G_1 وطول نصف قطرها $r = 1$

$$\text{ب- } \|2\vec{MA} - 6\vec{MB} - 3\vec{MD}\| = 7 \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MD}\|$$

يكافئ $\| -7\vec{MG}_1 \| = 7 \|3\vec{MG}\|$ معناه $21MG_1 = 21MG$ معناه $MG_1 = MG$ ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم محور قطرة المستقيم $[G_1G]$ حيث G

مركز ثقل المثلث ABD

$$\text{ج- } \|2\vec{MA} - 6\vec{MB} - 3\vec{MD}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

$$\text{معناه } \|\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MB} + \vec{BA} - \vec{MB}\| \text{ معناه } \|\vec{BA}\| = \|\vec{BA}\|$$

$$\text{معناه } 7MG_1 = BA \text{ معناه } MG_1 = \frac{BA}{7} \text{ ومنه مجموعة النقط } M \text{ هي دائرة مركزها } G_1 \text{ وطول نصف قطرها } r = \frac{BA}{7}$$