



مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الاحتمالات في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي



larbibelabidi @ gmail.com

العربي الجزائري Facebook

مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الاحتمالات في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية+تقني رياضي+رياضيات
(1)المواضيع ، (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة+علوم دقيقة

الجزء الرابع

بكالوريات اجنبية

الجزء الخامس

تمارين مقترحة

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

الجزء الأول: تدريبات متنوعة

1- التحليل التوافقي

التمرين 01

ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام: 1، 2، 3، 4، 5، 6 إذا كانت هذه الأعداد تتكون من: (أ) 3 أرقام ؟ ، (ب) 3 أرقام مختلفة ؟ ، (ج) 6 أرقام مختلفة ؟ .

التمرين 02

ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب الحروف: ا، ي، ا، ل، و، ر، ك، ا، ل، ب للحصول على كلمة "البكالوريا"؟

التمرين 03

يفتح قفل برقم سري بتشكيل أربعة أرقام مختلفة من بين الأرقام التالية: 1، 3، 5، 7، 9، ما هو عدد الطرق الممكنة لفتح هذا القفل؟

التمرين 04

بكم طريقة يمكن خمسة أشخاص أن يجلسوا:
(أ) في صف فيه خمسة مقاعد؟
(ب) حول طاولة مستديرة حولها خمسة مقاعد؟

التمرين 05

في مركز أبحاث يراد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء مختارين من بين 6 باحثين و 4 باحثات.
(1) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟
(2) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها في الظروف التالية:
(أ) الأعضاء الأربعة المختارين باحثات؟ ، (ب) من بين الأعضاء المختارين توجد باحثة واحدة فقط؟
(ج) من بين الأعضاء المختارين توجد على الأقل باحثة.
(د) من بين الأعضاء المختارين يوجد على الأكثر باحثان

التمرين 06

يضم صندوق 15 كرة منها 6 بيضاء تحمل الأرقام (1، 1، 2، 2، 3، 3) و 5 خضراء تحمل الأرقام (1، 1، 1، 2، 2) و 4 حمراء تحمل الأرقام (1، 3، 3، 3).
نسحب 3 كرات في آن واحد. ما هو عدد الحالات الممكنة لسحب:
(1) 3 كرات من نفس اللون؟ (2) 3 كرات تحمل نفس الرقم؟ (3) 3 كرات مجموع أرقامها 6؟
(4) 3 كرات واحدة على الأقل منها تحمل رقما فرديا؟

التمرين 07

1- جد العدد الطبيعي n في كل حالة: أ) $2(C_n^0 + C_n^2 + C_n^3) = 5n + 2$ ، ب) $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

2- حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة التالية :
$$\begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$$

التمرين 08

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$
 2) برهن بالتراجع انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] n! = (2n)!$

التمرين 09

يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ ج) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟
 2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = n^2 + 9n + 21$ ، ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التمرين 10

يحتوي كيس على 18 كرة منها 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و 6 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 6 و 8 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 8

1. نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد. ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على :

أ) 3 أرقام فردية ب) كرة حمراء على الأقل ج) كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4

2. نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي بحيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي. ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على :

أ) 3 أرقام فردية ب) كرة حمراء على الأقل .

ج) كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4

التمرين 11

اشترى احد التلاميذ المجتهدين 3 كتب للرياضيات وكتابين للفيزياء وأربعة كتب للأدب العربي ثم أراد أن يضعهم على رف مكتبته فما هو عدد الطرق الممكنة لتحقيق ذلك إذا :

أ) أراد وضع الكتب ذات نفس المادة متجاورة

ب) كتب الأدب العربي فقط متجاورة .

ج) دون شرط .

2- حساب الاحتمالات

أنواع السحب

التمرين 12

تحتوي علبة على 12 كرية منها: 5 بيضاء، 4 حمراء و 3 خضراء (لا نميز بينها عند اللمس) نسحب ، عشوائيا ، 3 كريات من هذه العلبة. نعتبر الاحداث التالية :

A: "الكريات المسحوبة بيضاء"

D: "الكريات المسحوبة من نفس اللون"

E: "الوان الكريات المسحوبة مختلفة مثني مثني"

F: "من بين الكريات المسحوبة توجد كريتان بياضون بالضبط"

G: "من بين الكريات المسحوبة توجد كرية بيضاء على الأقل"

احسب احتمالات A ، D ، E ، F و G في كل حالة من الحالات الآتية :

(1) السحب في آن واحد .

(2) السحب على التوالي وبإرجاع .

(3) السحب على التوالي وبدون إرجاع.

التمرين 13

تحتوي علبة على 9 كريات منها: 5 حمراء تحمل الارقام 1، 1، 1، 2 و 2

4 بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 1 و 2

نسحب ، عشوائيا ، 3 كريات من هذه العلبة. نعتبر الاحداث التالية :

A: "الكريات المسحوبة من نفس اللون"

D: "الحصول على كرية حمراء على الأقل"

E: "الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم"

F: "مجموع أرقام الكريات المسحوبة يساوي 4"

احسب احتمالات A ، D ، E ، F في كل حالة من الحالات الآتية :

(1) السحب في آن واحد .

(2) السحب على التوالي وبإرجاع .

(3) السحب على التوالي وبدون إرجاع.

التمرين 14

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات صفراء .

نسحب ، عشوائيا ، 3 كرات من هذا الكيس على التوالي وبدون ارجاع .

نعتبر الحادثن A و B حيث :

A: "الحصول على اللونين معا" ، B: "الحصول على لون واحد"

احسب $P(A)$ و $P(B)$

التمرين 15

يحتوي صندوق على 8 كرات منها: 5 برتقالية و 3 خضراء.
نسحب ، عشوائيا ، على التوالي وبارجاع كرتين من هذا الصندوق.
(نسحب كرة أولى ونسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ، ثم نسحب كرة ثانية ونسجل لونها)
(1) احسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.
(2) احسب احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين.

الاحتمالات الشرطية

التمرين 16

عدد تلاميذ ثانوية هو 900 ، يتوزعون حسب المستوى والصف (داخلي أو خارجي) كما يلي:

المستوى \ الصف	السنة الاولى P	السنة الثانية S	السنة الثالثة T	المجموع
E خارجيون	250	200	150	600
I داخليون	100	120	80	300

نختار تلميذا بطريقة عشوائية ، احسب الاحتمالات التالية:

- 1- احتمال ان يكون التلميذ خارجيا.
- 2- احتمال ان يكون التلميذ من السنة الأولى .
- 3- احتمال ان يكون التلميذ من السنة الأولى وخارجيا.
- 4- احتمال ان يكون التلميذ من السنة الأولى علما انه خارجي.

التمرين 17

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء ويحتوي صندوق U_2 على 3 كرات خضراء و كرتين بيضاوين.
التجربة (E): نرمي نردا له 6 أوجه مرقمة من 1 إلى 6 (كل الأوجه لها نفس الإحتمال في الظهور)
إذا كان الرقم المحصل عليه من مضاعف للعدد 3، نسحب كرة من الصندوق U_1 وإذا ظهر وجه آخر غير مضاعف للعدد 3 ، نسحب كرة من الصندوق U_2 .
(1) احسب احتمال الحادثة B " سحب كرة بيضاء".
(2) احسب احتمال سحب كرة من الصندوق U_1 علما اننا بيضاء.

التمرين 18

يلعب طفل لعبة مكونة من 20 كرة : 13 حمراء و 7 خضراء ، وضع 10 حمراء و 3 خضراء في علبة مكعبة C_1 و وضع 3 حمراء و 4 خضراء في علبة اسطوانية C_2 .
يتم تنظيم اللعبة بحيث يختار الطفل أولا إحدى العلبتين عشوائيا ثم يأخذ كرة واحدة منهما.
نعتبر الحوادث التالية:
 C_1 " يختار الطفل العلبة المكعبة " . C_2 " يختار الطفل العلبة الأسطوانية " .

R " يختار الطفل كرة حمراء " . V " يختار الطفل كرة خضراء " .

- (1) مثل بشجرة متوازنة الوضعية المرافقة لهذه اللعبة.
- (2) احسب احتمال الحادثة R.
- (3) علما ان الطفل أخذ كرة حمراء ، ما احتمال ان يكون قد أخذها من العلبة المكعبة؟

التمرين 19

- ورشتان A و B تصنعان الشرائح الالكترونية . للحصول على 2000 قطعة .
 انتجت الورشة A : 1200 قطعة وانتجت الورشة B 800 قطعة .
 انتجت الورشة A : 4 % من القطع المعيبة (بما عيوب) وانتجت الورشة B : 3 % من القطع المعيبة
 نأخذ عشوائيا شريحة من الطليبة .
 نسمي A الحادثة : الشريحة آتية من الورشة A .
 B الحادثة : الشريحة آتية من الورشة B .
 D الحادثة : الشريحة بما عيوب .
- (1) أكمل الجدول التالي

المجموع	عدد الشرائح غير المعيبة	عدد الشرائح المعيبة
عدد الشرائح من إنتاج الورشة A		
عدد الشرائح من إنتاج الورشة B		
المجموع		

- (2) احسب الاحتمالات التالية: أ) $P_D(A)$ و $P(A \cap D)$ ، $P(D)$ ب) $P_{\bar{D}}(B)$ و $P(\bar{D} \cap B)$ ، $P(\bar{D})$

الاحتمالات الكلية

التمرين 20

- تستقبل ثانوية L ، تلاميذ السنة الأولى من ثلاث مؤسسات : M_1 ، M_2 ، M_3 .
 25% من التلاميذ يأتون من المتوسطة M_1 ، 40% من المتوسطة M_2 والباقي من المتوسطة M_3
 5% من تلاميذ من المتوسطة M_1 ، 10% من تلاميذ M_2 و 0.1% من تلاميذ M_3 يعيدون السنة
 نختار تلميذا عشوائيا .
 1. كون شجرة متوازنة تترجم الوضعية .
 2. احسب احتمال الحادثة B التلميذ يعيد السنة .

التمرين 21

نختبر فعالية دواء على عيّنة من الأشخاص ذوي معدل مستويات القلوكوز في الدم مرتفعة بشكل غير طبيعي . في هذه التجربة ، يتناول 60% من الاشخاص الدواء ، بينما يحصل الآخرون على دواء وهمي .

ندرس انخفاض معدل القلوكوز في الدم بعد تناول الدواء.

80% من الأفراد الذين تناولوا الدواء كان لديهم انخفاض في هذا المعدل ، ولا يوجد انخفاض بالنسبة للأفراد الذين تناولوا الدواء الوهمي.

نختار ، عشوائيا شخصا من العيّنة الذين خضعوا للتجربة .

احسب احتمال الحدث B : "الشخص المختار لديه انخفاض معدل مستوى القلوكوز في الدم".

الحوادث المستقلة

التمرين 22

صوب كل من الطفلين رستم وراضي مرة واحدة نحو هدف . إذا كان احتمال أن يصيب رستم الهدف هو 0,7 واحتمال أن يصيب راضي الهدف هو 0,5 احسب :

(1) احتمال أن يصيب رستم وراضي الهدف معا.

(2) احتمال أن يصاب الهدف.

التمرين 23

نرمي حجر نرد متجانس أوجهه تحمل الارقام : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 ونعرّف الحوادث التالية:

A : "ظهور عدد اصغر من اويساوي 2" ، B : "ظهور عدد اكبر تماما من 4"

C : "ظهور عدد فردي 2" ، D : "ظهور عدد زوجي" ، E : "ظهور عدد أولي"

(1) احسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ هل الحادثان A و B مستقلتان ؟ لماذا؟

استنتج الاحتمال $P(A \cup B)$.

(2) هل الحادثان D و C مستقلتان ؟ لماذا؟ احسب $P(C)$ ثم بطريقتين مختلفتين $P(D)$.

(3) هل الحادثان D و E مستقلتان ؟ لماذا؟ احسب $P(D \cup E)$.

دستور ثنائي الحد

التمرين 24

(1) باستعمال دستور ثنائي الحد أنشر العبارات التالية:

$$(x+1)^3 ، (x-2)^4 ، (2x-3y)^5$$

(2) ليكن المنشور التالي $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$

أ) أكتب الحد الذي درجته 10.

ب) أوجد معامل الحد التاسع.

ج) أوجد الحد الثابت

التمرين 25

تحتوي علبة على سبع بطاقات مرقمة من 1 الى 7 لا نميز بينها باللمس .
نسحب من هذه العلبة بطاقتين على التوالي مع إعادة البطاقة المسحوبة .
احسب احتمال كل حادثة :

A: "سحب بطاقتين رقميهما فرديان " B: "سحب بطاقة رقمها زوجي والأخرى رقمها مربع تام "
C "سحب بطاقة على الأقل رقمها اولي" D "سحب بطاقتين مجموع رقميهما زوجي"

التمرين 26

نضع بصندوق عشر كريات متماثلة ، منها خمس كريات مرقمة بـ 1 ثلاث كريات بـ 2 وكريتين مرقمتان بـ 3. نسحب عشوائيا من هذا الصندوق ثلاث كريات في الآن الواحد .
1-احسب احتمال كل حادثة :

A: "سحب ثلاث كريات جداء ارقامها يساوي 6" ،

B: "سحب ثلاث كريات جداء ارقامها مربع تام " ، C: "سحب ثلاث كريات جداء ارقامها اولي"
2-نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة ، جداء ارقام الكريات .

أ-عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب-احسب الامل الرياضي للمتغير X .

التمرين 27

يحتوي صندوق على كريتين بيضاوين وثلاث كريات سوداء . نسحب عشوائيا من هذا الصندوق كريتين على التوالي دون ارجاع الكرية المسحوبة الى الصندوق .احسب احتمال كل حادثة :

A: "كريتين من نفس اللون" ،

B: "سحب كرية بيضاء ثم كرية سوداء" ،

C: "سحب كريتين مختلفين في اللون" .

التمرين 28

يريد تلاميذ قسم مكون من 10 ذكور و 6 اناث أن يكونوا لجنة من 3 افراد لتمثيلهم في مسابقة دراسية (نفترض أن كل التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار) .
1-ماهو عدد اللجان الممكنة ؟

2-لتكن الحادثة E : " أعضاء اللجنة من نفس الجنس " .

أ-احسب احتمال الحادثة E .

ب-استنتج احتمال الحادثة F : أعضاء اللجنة من الجنسين معا .

3-نفترض انه من بين تلاميذ القسم يوجد التلميذ A وأخته التلميذة B .

ماهو الاحتمال لكي تتضمن اللجنة أعضاء من الجنسين معا ، وان لا يتواجد بها التلميذ A والتلميذة B في ان واحد ؟

4- ليكن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الاناث المتواجدة باللجنة .

حدد قانون احتمال X ثم احسب الامل الرياضي: $E(X)$.

التمرين 29

زهرة نرد غير متوازنة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 احتمالات ظهورها في رمية واحدة هي $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ على الترتيب.

1. جد $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ علماً أن هذا الترتيب هي حدود متتابة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

2. نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة . ما احتمال ظهور أ-رقم زوجي ؟ ، ب- رقم مضاعف لـ 3 ؟

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه .

عرف قانون الإحتمال و احسب أمله الرياضي ثم التباين و الإنحراف المعياري .

التمرين 30

الزهرة 1 \ الزهرة 2	1	2	2	3	4	4
1						
2						
2						
5						
5						
6						

نعتبر زهري نرد، زهر النرد الأول مرقم بالأرقام

$\{4, 4, 3, 2, 2, 1\}$ وزهر النرد الثاني مرقم بـ $\{6, 5, 5, 2, 2, 1\}$

نرمي زهري النرد و نسجل مجموع الرقمين x المحصل عليه.

نفرض أن كل الأوجه لها نفس احتمال الظهور.

1- اتمم الجدول التالي بتدوين قيمة x في كل خانة.

2- أعط كل قيم المجموع x ، ثم احسب احتمال كل منها.

3- عين قانون احتمال التجربة العشوائية

4- احسب الاحتمالات التالية:

- $P(A)$ احتمال الحصول على مجموع فردي

- $P(B)$ احتمال الحصول على مجموع مضاعف للعدد 3.

- $P(C)$ احتمال الحصول مجموع فردي ومضاعف للعدد 3.

- $P(D)$ احتمال الحصول مجموع فردي أو مضاعف لـ 3.

1- يلعب شخص اللعبة التالية:

أ) إذا كان المجموع $\{2, 3\}$ يربح 100 دج ، ب) إذا كان المجموع $\{4, 5\}$ يربح 20 دج

ج) إذا كان المجموع $\{6, 7, 8\}$ يخسر 45 دج . د) إذا كان المجموع $\{9, 10\}$ لا يخسر ولا يربح.

أ) أكمل الجدول:

العلامة	100	20	-45	0
الاحتمال				

ب) احسب الأمل الرياضي، هل هذه اللعبة عادلة؟

ج) احسب الانحراف المعياري، ماذا تستنتج؟

التمرين 31

تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 4 أربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه إبراهيم و امرأة واحدة اسمها فاطمة ، نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

(1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

"A" تكوين لجنة تضم 3 رجال . "B" تكوين لجنة تضم رجلا و امرأتين .

"C" تكوين لجنة تضم إبراهيم . "D" تكوين لجنة تضم إما إبراهيم أو فاطمة .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة.

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله .

ب) أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين 32

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متميزة عند اللمس . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق و نسجل لونها ، ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

(1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

أ) "A" الحصول على كرتين بيضاوين .

ب) "B" الحصول على كرتين من نفس اللون .

(2) نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة $(\alpha \in \mathbb{R})$ و لكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع النقط المحصل عليها .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الحقيقي حتى تكون اللعبة مربحة .

(3) نضيف $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه .

ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علم أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$.

التمرين 33

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء (الكرات متماثلة و غير متميزة عند اللمس) نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الكيس ، إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب و إذا كانت بيضاء لا نعيدها إلى الكيس و نسحب كرة أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

(1) أ) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

"A" الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء .

"B" الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء .

- ب) استنتج حساب الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة .
- 2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها .
- أعط قانون الاحتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي .

التمرين 34

- نرمي زهر نرد مزيف يحوي 6 أوجه، p_i احتمال ظهور الوجه رقم i حيث:
- $$p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,3, p_4 = 0,1, p_5 = 0,15, p_6 = 0,15.$$
- 1- ما هو احتمال ظهور وجه يحمل الرقم 6.
 - 2- ما هو احتمال الحصول على وجه يحمل رقما فرديا.
 - 3- ما هو احتمال الحصول على وجه يحمل رقما أكبر تماما من 4.
 - 4- ما هو احتمال الحصول على وجه يحمل رقما يقسم العدد 2019

التمرين 35

- في مجموعة مكونة من 250 رجل، لاحظنا فقط وجود 120 رجل يلبسون ربطة عنق، و 85 رجل يلبسون قميص أبيض من بينهم 50 يلبسون ربطة عنق.
- نختار عشوائيا شخصا من هذه المجموعة، ما احتمال الحوادث التالية:
- 1- أن يكون رجلا يلبس ربطة عنق.
 - 2- أن يكون رجلا يلبس ربطة عنق وقميص أبيض.
 - 3- أن يكون رجلا يلبس ربطة عنق أو قميص أبيض.
 - 4- أن يكون رجلا لا يلبس ربطة عنق ولا يلبس قميص أبيض.

الجزء الثاني: تمارين البكالوريا

شعبة التسيير والاقتصاد

التمرين 36: دورة 2019 م1

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين ونسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة.

- (1) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين؟
- (2) ما احتمال الحصول على رقمين جداء هما يساوي 6؟
- (3) ما احتمال الحصول على رقمين أحدهما ضعف للآخر؟
- (4) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين أحدهما هو 2؟

التمرين 37: دورة 2019 م2

- (1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة: $(4x^2 + 3x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$(E)
- (2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1، 2، 3 و 4 نسحب منه كرية واحدة ونرمز بـ: p_i إلى احتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم i ونضع: $p_1 = 3\alpha^2$ ، $p_2 = \alpha^2$ ، $p_3 = \alpha$ و $p_4 = 2\alpha$ - حدد قيمة العدد الحقيقي α .

(3) نضع $\alpha = \frac{1}{4}$ ، احسب احتمال الأحداث التالية:

- A: "سحب كرية تحمل رقما فرديا"
- B: "سحب كرية تحمل الرقم 4"
- C: "سحب كرية تحمل رقما اصغر من او يساوي 3"
- D: "سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة (E)"

التمرين 38: دورة 2018 م1 بتصرف

- اجريت دراسة احصائية حول قسم نمائي تسيير واقتصاد حول ممارسة التلاميذ لرياضة ما. فكانت النتائج كما يلي: 70% من التلاميذ إناث منهم 50 % لا يمارسون هذه الرياضة. 90 % من التلاميذ الذكور يمارسون هذه الرياضة.
- نختار عشوائيا تلميذ من هذا القسم ونعتبر الحوادث التالية:
- G التلميذ المختار ذكر . F التلميذ المختار أنثى . S التلميذ المختار يمارس هذه الرياضة.
- 1- انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .
 - 2- احسب الاحتمالات التالية: $P(S)$ ، $P(G \cap \bar{S})$ ، $P_S(F)$ و $P_S(G)$
 - 3- هل الحادثتان G و $\bar{S}$ مستقلان؟ برر جوابك.

التمرين 39: دورة 2018 م 2 بتصرف

	الاداريون A	المهندسون I	العمال T
رجال	12 %	13 %	27 %
نساء	16 %	12 %	20 %

تضم مؤسسة انتاجية موظفين من الجنسين رجالا نرسم لهم ب: H ونساء نرسم لهم ب: F. منهم الإداريون "A" والمهندسون "I" والعمال "T". موزعون حسب الجدول التالي:

- 1- أ) بين أن احتمال أن يكون الموظف رجلا هو: $P(H) = 0,52$ انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
- 2- احسب $P(H \cap T)$ و $P(F \cap I)$.
- 3- ما احتمال أن يكون الموظف مهندسا؟
- 4- ما احتمال أن يكون الموظف رجلا علما انه إداري؟

التمرين 40: دورة 2017 م 2

في كل حالة من الحالات الآتية ، اقترحت ثلاث اجابات صحيحة واحدة فقط صحيحة عيّن الاقتراح الصحيح مع التبرير.

1) A و B حادثتان مستقلتان. إذا كان $P(A \cap B) = 0,03$ و $P(A) = 0,4$ فإن:

أ) $P(B) = 0,43$ ، ب) $P(B) = 0,075$ ، ج) $P(B) = 0,37$

2) A و B حادثتان. إذا كان $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$ و $P_A(B) = \frac{1}{4}$ فإن:

أ) $P(A) = \frac{3}{25}$ ، ب) $P(A) = \frac{4}{25}$ ، ج) $P(A) = \frac{3}{400}$

3) A و B حادثتان. إذا كان $P(A) = 0,4$ و $P(B) = 0,5$ و $P(A \cup B) = 0,55$ فإن:

أ) $P(A \cap B) = 0,2$ ، ب) $P(A \cap B) = 0,45$ ، ج) $P(A \cap B) = 0,9$

4) الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية .

x_i	-2	-1	α	3
$P(X = x_i)$	0,12	0,50	β	0,30

قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 0,32 هما:

أ) $\alpha = 1$ و $\beta = 0,08$ ، ب) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,03$ ، ج) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,08$

التمرين 41: دورة 2017 م 1

يستقبل مركز إجراء امتحان شهادة البكالوريا مترشحين موزعين على ثلاث شعب هي: شعبة الآداب والفلسفة (L)، شعبة العلوم التجريبية (S) وشعبة التسيير والاقتصاد (G)

47 % من المترشحين ذكور (M) والباقي اناث (F). من بين الذكور 35 % في شعبة العلوم التجريبية و 49 % في الآداب والفلسفة ومن بين الإناث يوجد 10 % في شعبة التسيير والاقتصاد و 37 % في شعبة العلوم التجريبية . نختار عشوائيا مترشحا من هذا المركز .

(1) انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية

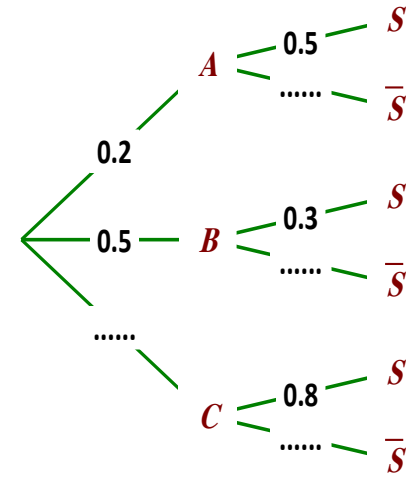
(2) احسب احتمال كل حادثة مما يلي: A: "المترشح المختار أنثى و من شعبة التسيير والاقتصاد"

B " المترشح المختار من شعبة التسيير والاقتصاد"

C " المترشح المختار أنثى علما انه من شعبة التسيير والاقتصاد"

التمرين 42: دورة 2016 م2

وكالة أسفار تقترح على زبائنها ثلاث وجهات A ، B و C 20 % من الزبائن اختاروا الوجهة A و 50 % اختاروا الوجهة B والباقي اختاروا الوجهة C عند العودة من السفر اجرت الوكالة استجوابا حول مدى اعجابهم بالوجهة واستنتجت ما يلي:



50 % من اصحاب الوجهة A كانوا معجبين بها.

30 % من اصحاب الوجهة B كانوا معجبين بها.

80 % من اصحاب الوجهة C كانوا معجبين بها.

نختار عشوائيا أحد الزبائن ونسجل الحوادث التالية:

S : الزبون معجب بالوجهة المختارة .

$\bar{S}$: الزبون غير معجب بالوجهة المختارة .

(1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكمل القيم الناقصة

(2) - أ) احسب احتمال الحوادث التالية: $A \cap S$ ، $B \cap S$ و $C \cap S$

ب) استنتج احتمال ان يكون الزبون معجب بالوجهة المختارة

(3) نستوجب زبونا غير معجب بالوجهة المختارة . ما احتمال ان يكون من الوجهة B؟

التمرين 43: دورة 2012 م1 بتصرف

عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 من بينهم 15 بنتا، يختار كل تلميذ من القسم رياضة واحد وواحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي للمؤسسة . 75 % من الأولاد اختاروا ممارسة كرة القدم و 15 % اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10 % ممارسة الكرة الطائرة. 60 % من البنات اخترن ممارسة كرة الطائرة والبقية اخترن ممارسة كرة اليد.

لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية ، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية.

يرمز G للحادثة "التلميذ المختار ولد" و يرمز F للحادثة "التلميذ المختار بنت"

يرمز T للحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة القدم"

يرمز M للحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة اليد"
 يرمز V للحادثة "التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة"
 1- انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .
 2- احسب $P(V)$ احتمال ان تتحقق الحادثة V.

3- احسب الاحتمال الشرطي $P_v(G)$.
 4- احسب احتمال ان يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

التمرين 44: دورة 2013 م 1

في رف من رفوف مكتبة "ثانوية النجاح" ، يوجد 150 كتاب رياضيات و 50 كتاب فلسفة ،
 حيث 40 % من كتب الرياضيات و 70 % من كتب الفلسفة تخص شعبة التسيير و الاقتصاد .
 نختار عشوائيا من الرف كتابا واحدا . عيّن مع التبرير، الجواب الصحيح الوحيد من بين
 الأجوبة المقترحة: في كل حالة من الحالات التالية:

- 1) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات هو: أ) $\frac{3}{4}$ ، ب) $\frac{2}{5}$ ، ج) $\frac{1}{150}$
- 2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:
 أ) 0,24 ، ب) 0,475 ، ج) 0,21
- 3) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد
 أ) 0,15 ، ب) 0,4 ، ج) 0,3
- 4) إذا كان الكتاب المختار يخص شعبة التسيير والاقتصاد، فإن احتمال أن يكون كتاب
 رياضيات هو: أ) $\frac{2}{75}$ ، ب) $\frac{12}{19}$ ، ج) $\frac{3}{10}$

التمرين 45: دورة 2008

- يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء وتحمل الارقام -2 ، 1 ، 2 ،
 و 4 كرات حمراء تحمل الارقام 2 ، 2 ، 1 ، 1 ،
 1) نسحب كرة واحدة من الكيس .
 أ) ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 ؟
 ب) إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 ، ما هو احتمال ان يكون لونها أحمر؟
 2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون إرجاع .
 أ) ما هو احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منهما رقما فرديا؟
 ب) ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟
 ج) ما هو احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 ؟

شعبة: علوم تجريبية

التمرين 46: دورة 2019 ع ت م 1

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2. و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "سحب كرتين من نفس اللون"، B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"

(1) بيّن أن احتمال الحادث A هو: $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادث B.

(2) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال ان تحملان نفس الرقم؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسبه أمله الرياضي $E(X)$

التمرين 47: دورة 2019 ع ت م 2

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها كرتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الاخرى تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيا ثلاث كريات وفي آن واحد من الصندوق.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة (1) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(2) بيّن أن احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$

(3) نسحب الآن من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين مجموعهما فردي علما ان جداءهما زوجي؟

التمرين 48: دورة 2018 ع ت

يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها اربع كريات بيضاء مرقمة ب: 1، 2، 2، 3، ثلاث كريات مرقمة حمراء مرقمة ب: 2، 2، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة ب: 2، 3، 3

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين: A: الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني. و B: الكريات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم.

(1-أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

(ب) بيّن أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ، ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسبه أمله الرياضي $E(X)$

التمرين 49: دورة 2008 ع تجريبية نموذج وزاري

يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء، و 7 كريات سوداء، لا نفرّق بينها عند اللمس.

1. يسحب لاعب، عشوائياً، 3 كريات في آن واحد.

ا- احسب احتمالات الحوادث التالية:

A : " يسحب اللاعب كرية بيضاء واحدة فقط " .

B : " يسحب اللاعب كريتين بيضاوين فقط " .

C : " يسحب اللاعب 3 كريات بيضاء " .

ب- يربح اللاعب 10 دنانير من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرق بكل سحب، مجموع الربح المحصل عليه.

عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، واحسب أمله الرياضي

2. يسحب اللاعب كرية من الكيس، فإذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء، يربح اللاعب 10 دنانير، ويتوقف اللعب، بينما إذا كانت الكرية المسحوبة سوداء، يُعيد اللاعب الكرية

المسحوبة إلى الكيس، ويسحب كرية أخرى في نفس الظروف.

تتكرر العملية، ويتوقف اللعب تلقائياً عند السحب الثالث.

احسب احتمالات الحوادث التالية:

D : " يربح اللاعب في السحب الأول " . E : " يربح اللاعب في السحب الثاني " .

F : " يربح اللاعب في السحب الثالث " . G : " لا يربح اللاعب أي شيء " .

التمرين 50 دورة 2008 نموذج وزاري

كيس U_1 يحتوي على 4 قريصات بيضاء، و 3 سوداء و كيس آخر U_2 يحتوي على 17 قريصة بيضاء و 18 قريصة سوداء.

نرمي زهرة نرد متجانسة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6، فإذا ظهر الرقم 6 نسحب قريصة من

الكيس U_1 وإلا فنسحب قريصة من الكيس U_2 .

1. برهن أن احتمال سحب قريصة بيضاء هو 0,5.

2. إذا سحبنا قريصة بيضاء، فما احتمال أن تكون من الكيس U_1 .

شعبة: تقني رياضي

التمرين 51: دورة 2019 ت ر م 1

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية . اختر الإجابة الصحيحة مبرراً اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2 (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريات عشوائياً وفي آن واحد. المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

(1) قيم المتغير العشوائي X هي: أ) $\{1; 2; 3\}$ ، ب) $\{0; 2; 3\}$ ، ج) $\{0; 1; 2\}$

(2) الأمل الرياضي $E(X)$ لـ X هو : أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ، ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ، ج) $E(X) = \frac{11}{10}$.

(3) احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة"

يساوي : أ) $\frac{7}{10}$ ، ب) $\frac{9}{10}$ ، ج) $\frac{3}{5}$.

(4) احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1"

يساوي : أ) $\frac{2}{5}$ ، ب) $\frac{3}{10}$ ، ج) $\frac{3}{5}$.

التمرين 52: دورة 2019 ت ر م 2

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 وثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمان 1، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية :

أ) الحادثة A : "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

ب) الحادثة B : "الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر".

ج) الحادثة C : "الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاماً غير أولية".

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاماً أولية.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب) احسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

التمرين 53: دورة 2018 ت ر

كيس به 7 كريات متماثلة ، لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 بيضاء و 4 خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين من الكيس.

I) أ) احسب احتمال الحادثة A : " سحب كرتين مختلفتين في اللون " .

ب) احسب احتمال الحادثة B : " سحب كرتين من نفس اللون " .

II) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$

(α عدد طبيعي معطى DA تعني دينار جزائري)

فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على 100DA و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يحصل على 50DA ، وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه . واليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

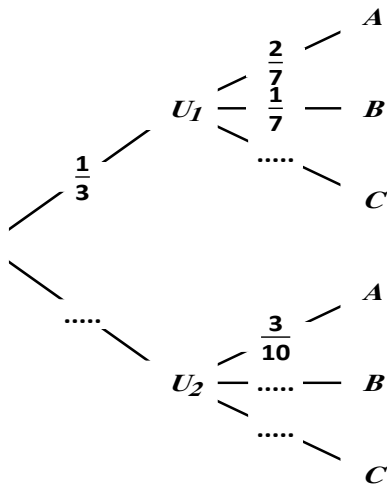
1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي : $\{ 100 - \alpha; 50 - \alpha; -\alpha \}$ ثم عرّف قانون احتماله .

2) بيّن أن لأمل الرياضيائي للمتغير العشوائي بدلالة هو : $E(x) = -\alpha + \frac{300}{7}$

ثم أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب .

شعبة: رياضيات

التمرين 55: دورة 2019 ر



صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و 2 كرتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6. إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كرتين وفي آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كرتين وفي آن واحد من الصندوق U_2 .
نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ:

A "سحب كرتين حمراوين"

B "سحب كرتين سوداوين"

C "سحب كرتين من لونين مختلفين".

(1) أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات.

(2) احسب احتمالات الأحداث A ، B و C.

(3) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.
(أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X.

(ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

(4) احسب الأمل الرياضي $E(X)$

التمرين 56: دورة 2018 ر

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3، 2، 3 وكرية بيضاء مرقمة بـ: -1.

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

(أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X، ثم عرّف قانون احتمال.

(ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

(ج) احسب احتمال الحادثة " $X^2 - X > 0$ ".

التمرين 57: دورة 2009 ر

- كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و6 حمراء .
نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.
1) أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.
ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.
-عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 58: دورة 2008 رياضيات نموذج وزاري

- يحتوي كيس على 12 كرة منها : 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ،
و 4 حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 .
نسحب عشوائيا، وفي آن واحد، كرتين من الكيس .
1- نعتبر الحادثتين : A : "سحب كرتين من نفس اللون " B : "سحب كرة خضراء على الأقل "
أ- احسب احتمال كل حادثة من الحوادث : $A \cap B$ ، B ، A
ب- هل الحادثتان A ، B مستقلتان ؟
2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع
العديدين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.
أ- أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .
ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .
ج- احسب التباين $VAR(X)$ ، واستنتج الانحراف المعياري $\delta(X)$

الجزء الثالث: تمارين بكالوريا النظام القديم

التمرين 59: دورة 2002 ع ط

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا تفرق بينها عند اللمس منها:
3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء .

- (1) نسحب من هذا الكيس ثلاث كرات في آن واحد . ما احتمال الحصول على :
أ - نفس اللون ؟ ، ب - الألوان الثلاثة ؟ ، ج - كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟
(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة

- أ - ما هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ؟
ب - احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين 60: دورة 2003 ع ط

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخرى تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والأخرى تحملان الرقم 3 .
نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد ، ونحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما .
(1) ما هو احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 ؟

- (2) ما هو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين ؟
(3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .
ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟

أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي .

التمرين 61: دورة 1996 ع ط

زهرة نرد مكعبة A لها وجه يحمل الرقم 1 ، ووجهان يحملان الرقم 2 وثلاثة أوجه تحمل الرقم 3
زهرة نرد مكعبة B لها وجه يحمل الرقم 1 ووجهان يحملان الرقم 2 ووجه يحمل الرقم 3
ووجهان يحملان الرقم 4

نفرض ان كل الأوجه في كل من المكعبين لها نفس حظوظ الظهور . نرمي الزهرتين في آن واحد ما احتمال أن يكون الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين :
(أ) زوجيين ، (ب) فرديين .

التمرين 62: دورة 1997 ع ط

يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10 (لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال

- 1) أحسب عدد السحاب الممكنة .
- 2) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية
- 3) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها أعداد أولية
- 4) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم كل واحد منها عدد غير أولي
- 5) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم إحداها على الأقل رقم أولي

التمرين 63: دورة 1996 ع ط

- يحتوي كيس على 14 قريصة: 4 قريصات تحمل الحرف (م) و 3 قريصات تحمل الحرف (د) و 3 قريصات تحمل الحرف (ي) و قريصتان تحملان الحرف (ن) و قريصتان تحملان الحرف (ة) نسحب في آن واحد 5 قريصات بلا اختيار (الإمكانات متساوية الاحتمال)
- 1) ما هو الاحتمال لكي تكون الحروف التي تحملها القريصات المسحوبة هي حروف كلمة "مدينة"
 - 2) ما هو الاحتمال لكي لا يحمل كل من القريصات المسحوبة الحرف (م) ؟
 - 3) ما هو الاحتمال لكي تحمل إحدى القريصات المسحوبة على الأقل الحرف (م) ؟
 - 4) ما هو الاحتمال لكي تحمل اثنتان - من بين القريصات المسحوبة - على الأقل الحرف (م) ؟

الجزء الرابع: بكالوريات اجنبية

التمرين 64: (فرنسا 2019/ش.علوم/N-Calédonie /ت الأستاذ جبالي/بتصرف)

تمت شركة مختصة بكراء السيارات، بصيانة سياراتها في الحظيرة. نعلم أن 20% من السيارات هي تحت الضمان، وأن 1% من السيارات التي تحت الضمان، تحتاج إلى صيانة بينما السيارات التي ليست تحت الضمان، فإن 10% منها تحتاج إلى صيانة. نختار، عشوائيًا، سيارة، من الحظيرة، ونعتبر الحادثتين الآتيتين.

G : "السيارة تحت الضمان". R : "السيارة تحتاج إلى الصيانة".

(1) نمذج الوضعية، بشجرة احتمالات.

(2) ا- احسب احتمال أن تكون السيارة تحت الضمان، وتحتاج إلى الصيانة.

ب- تحقق أن $p(R) = 0,082$.

ج- تبين أن السيارة المختارة تحتاج إلى الصيانة، ما احتمال أن تكون تحت الضمان؟

(3) أرادت الشركة التعاقد مع صاحب مرأب، لفحص سياراتها، فكانت شروط صاحب المرأب كالتالي: إذا كانت السيارة تحت الضمان، فالفحص مجاني؛ وإذا كانت ليست تحت الضمان ولا تحتاج إلى صيانة فتمن الفحص 100€. أما إذا كانت ليست تحت الضمان، وتحتاج إلى صيانة، فتمن الفحص 500€.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة ثمن الفحص.

ا- عيّن قانون احتمال X ، و احسب أمله الرياضي.

ب- إذا علمت أن الشركة تملك 250 سيارة في الحظيرة، وأنها أعدت ميزانية بمبلغ 250000€، لصيانة سياراتها، فهل هذا المبلغ يكفيها لتبزم العقد مع صاحب المرأب؟ علّل.

التمرين 65: (فرنسا 2018/ش.علوم/Pondichéry /ت الأستاذ جبالي/بتصرف)

تقوم مؤسسة بتوزيع السكر الذي يأتيها من مصنعين U و V ، في علبة يزن الواحد منها 1kg.

30% من السكر يأتي إلى المؤسسة من المصنع U ، والباقي يأتي إليها من المصنع V . نفرض أن 3% من السكر الآتي من المصنع U ، رقيق، و 95% من السكر الآتي من المصنع V ، خشن.

نأخذ، عشوائيًا، علبة سكر، ونعتبر الحوادث التالية:

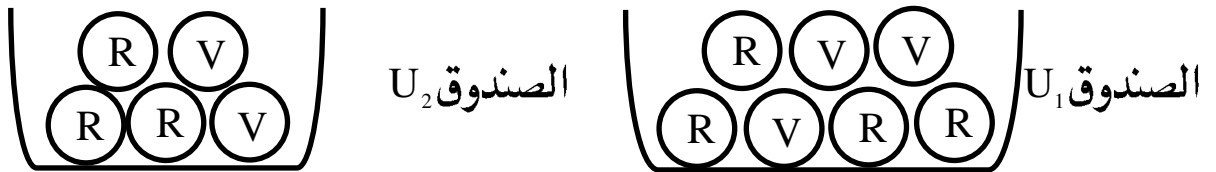
U : "العلبة تحتوي على سكر آت من المصنع U ". V : "العلبة تحتوي على سكر آت من المصنع V ".

F : " العلبة تحتوي على سكر رقيق "

- (1) احسب احتمال أن تكون العلبة تحتوي على سكر رقيق.
- (2) علماً أن العلبة تحتوي على سكر رقيق، ما احتمال أن يكون سكرها آتياً من المصنع U ؟
- (3) ترغب المؤسسة أن يكون 30% من السكر الرقيق، آتياً من المصنع U (أي $P_F(U) = 0,3$) كم تصبح، في هذه الحالة، النسبة المئوية من السكر الآتي من كل من المصنعين U و V ؟

التمرين 66: المغرب 2015 ع ت

يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات: 4 حمراء و 3 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس).
و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات: 3 حمراء و 2 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس).



(I) نعتبر التجربة التالية : نسحب وعشوائياً 3 كرات من الصندوق U_1 .
ليكن A الحادث " الحصول على كرة حمراء واحدة وكرتين خضراوين "
و ليكن B الحادث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون ".

$$\text{بيّن أن } P(A) = \frac{12}{35} \text{ و وأن } P(B) = \frac{1}{7}.$$

(II) نعتبر التجربة التالية : نسحب وعشوائياً كرتين من U_1 ثم نسحب كرة واحدة من U_2 .
ليكن C الحادث " الحصول على 3 كرات حمراء ". بيّن أن : $P(C) = \frac{6}{35}$.

التمرين 67: المغرب 2003 ع ت

يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء تحمل الأعداد 0 و 0 و 1 و 1 و 2 و 2
و كرتين سوادين تحملان العددين 0 و 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس).
نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين من الكيس .
(1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

- A " للكرتين نفس اللون " ، B " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين منعدم "
- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين ، حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

التمرين 68: المغرب 2003 ع ت الاستدراكية

يحتوي كيس على 6 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأعداد -2 و -1 و 0 و 1 و 1 و 2

نعتبر الاختبار التالي : 'نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس'.
 نعتبر ، بعد القيام بهذا الاختبار ، الحادثتين التاليين :
 A: "من بين الكرات المسحوبة ، توجد كرة على الأقل تحمل العدد 1".
 S، "بمجموع الاعداد المكتوبة على الكرات المسحوبة منعدم".
 أ) أحسب احتمال الحدث A. (ب) بين أن احتمال الحدث S يساوي $\frac{1}{5}$

التمرين 69: المغرب 2004 ع ت

يحتوي كيس على 9 بياض (لا يمكن التمييز بينها باللمس).
 بيدقان بيضاوين يحملان الرقم 1 وثلاثة بياض حمراء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 وأربع بياض سوداء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و 2.
 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بياض من الكيس .
 1) احسب احتمال الأحداث التالية:
 A: "البياض الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (بيدق من كل لون)"
 B: "البياض الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم".
 C: "من بين البياض المسحوبة يوجد على الأقل بيدق واحد أحمر"
 3) احسب احتمال الحادث: $A \cap B$.

التمرين 70: المغرب 2006 ع ت

يحتوي كيس U_1 على 5 بياض : ثلاث منها تحمل الرقم 2 وبيدقان يحملان الرقم 3.
 ويحتوي كيس ثاني U_2 على 5 بياض : ثلاث منها بيضاء واثنان أحمران (لا يمكن التمييز بين البياض باللمس) نسحب عشوائيا بيدق واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمه ،
 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد n كرة من الكيس U_2 بحيث n هو الرقم الذي يحمله البيدق المسحوب من الكيس U_1 .
 ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البياض الحمراء المسحوبة .
 1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.
 2) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

التمرين 71: المغرب 2007 ع ت

يحتوي كيس على 7 بياض متماثلة تحمل الاعداد:
 0 و 0 و -1 و 1 و 1 و 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
 نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 بياض من هذا الكيس. لتكن الحوادث الآتية:
 A: "لا توجد أية بيدقة من البياض المسحوبة تحمل الرقم 0".

B: "سحب 3 بياض تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى .

C: "مجموع الأرقام المسجلة على البياض المسحوبة معدوم .

(1) احسب $P(A)$ و $P(B)$.

(2) بين أن $P(C) = \frac{2}{7}$.

التمرين 72: تونس 2007 ش ر

يحتوي كيس على 4 زهر نرد لا نفرق بينها عند اللمس ، منها:

3 زهر نرد خضراء تحمل أوجه كل منها الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 . وزهر نرد أحمر تحمل أوجهها الأرقام 2 ، 2 ، 4 ، 4 ، 6 ، 6 .

(1) نسحب عشوائيا زهر نرد من الكيس . أحسب احتمال الحادثتين الآتيتين :

A: "زهر النرد المسحوب أحمر" . B: "زهر النرد المسحوب أخضر" .

(2) نسحب عشوائيا زهرة نرد من الكيس ثم نرميه ثلاث مرات متتابة .

نسمي C الحادثة : "الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات متتابة" .

أ- بين أن: $P(C/A) = 1$ و $P(C/B) = \frac{1}{8}$. استنتج $P(C)$.

(3) نفرض أن زهر النرد المسحوب أخضر . ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية من الرميات الثلاثة السابقة عدد الأوجه التي تحمل رقما زوجيا .

أ- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب- احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

الجزء الخامس: تمارين مقترحة

التمرين 73

- تأهل إلى أولمبياد الرياضيات من دول المغرب العربي 25 تلميذا. 3 تلاميذ و 5 تلميذات من المغرب
4 تلاميذ و تلميذتين من الجزائر و تلميذين و 4 تلميذات من تونس و تلميذين و 3 تلميذات من ليبيا
(1) نريد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء من هذه المجموعة
(أ) ما هو احتمال أن تضم اللجنة 4 تلميذات ؟
(ب) ما هو احتمال أن تضم اللجنة 4 أعضاء من نفس الدولة ؟
(ج) ما هو احتمال أن تضم اللجنة على الأقل عضوين من ليبيا ؟
(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد التلاميذ الذكور المتواجدين فيها.
(أ) أوجد قيم المتغير العشوائي X .
(ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين 74

- تبين من مجموعة 12 شخصا أن 5 منهم يشاهدون التلفزيون فقط و 4 يستمعون للمذياع فقط و 3
يشاهدون التلفزيون ويستمعون للمذياع معا.
أ- نختار 3 أشخاص بطريقة عشوائية من هذه المجموعة.
* عين احتمال لكي الأشخاص الثلاثة يشاهدون التلفزيون فقط
* عين احتمال لكي يوجد شخص واحد على الأقل يستمع للمذياع فقط من بين الأشخاص الثلاثة
ب- نختار شخصا واحدا وتبين أنه يشاهد التلفزيون فقط فما هو احتمال أنه يستمع للمذياع فقط.
ج - نختار شخصين ونهتم بالمتغير العشوائي بعدد الأشخاص اللذين يشاهدون التلفزيون
ويستمعون للمذياع معا من بين الشخصين المختارين .
عين قيم المتغير العشوائي ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضي .

التمرين 75

- صندوق به 8 كرات بيضاء و n كرة سوداء ($n \geq 2$). نفرض أن سحب كرة بيضاء يعطي ربح
نقطة وسحب كرة سوداء يفقد نقطتين . X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع
النقط المحصل عليها.
I/ نسحب من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي
(1) عين قيم المتغير العشوائي X . (2) عين قانون الاحتمال
(3) احسب الأمل الرياضي $E(x)$ ثم عين العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X) = 0$
II / نفرض الآن $n = 6$. نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد
(1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X . (2) احسب أمله الرياضي .

التمرين 76

طالب من قسم نمائي علمي (علوم تجريبية أو رياضيات أو تقني رياضي) يعير نفس الاهتمام لكل المواد دون تمييز حيث المواد العملية والأدبية لها نفس الأهمية في البكالوريا. إذا كان احتمال نجاحه في المواد العلمية (في متحان شهادة البكالوريا) هو $\frac{1}{3}$ و احتمال نجاحه في

المواد الأدبية هو $\frac{1}{4}$

1- احسب احتمال نجاحه في البكالوريا

2- ما هو احتمال نجاحه في المواد العلمية علما أنه تحصل على شهاد البكالوريا

التمرين 77

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2. علبة تحوي n كرية بيضاء و 3 كريات سوداء. نسحب من هذه العلبة كرتين في آن واحد.

(1) احسب بدلالة n احتمال سحب :

(أ) كرتين من لونين مختلفين. (ب) كرتين بيضاوين. (ج) على الأقل كرية سوداء.

(2) نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

(أ) عين القيم التي يأخذها X .

(ب) عين بدلالة n قانون احتمال X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(ج) عين قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق : $E(X) = 1$.

التمرين 78

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء مرقمة : $1, 1, 1, 0, -1$ و 5 كرات سوداء مرقمة : $1, 0, 0, -1$. لا نميز بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد من من هذا الصندوق. أولا: احسب احتمال الحوادث التالية :

A حادث سحب كرة واحدة فقط بيضاء ، B حادث سحب كرة بيضاء على الأقل .

C حادث سحب 3 كرات من نفس اللون. ، A حادث سحب 3 كرات من نفس الرقم.

F حادث سحب 3 كرات مجموع أرقامها معدوم.

ثانيا: نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة .

1- عين قيم المتغير العشوائي X .

2- عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين 79

1- كيس يحوي 10 قريصات لا نفرق بينها في اللمس منها 7 بيضاء مرقمة من 1 إلى 7 و 3 قريصات سوداء مرقمة من 1 إلى 3 نسحب في آن واحد قريصتين من الكيس.

- 2- (أ) نعتبر الحادثة A "الحصول على قريصتين بيضاويين"، بين أن احتمال الحادثة A يساوي: $\frac{7}{15}$
- (ب) نعتبر الحادثة B "الحصول على قريصتين تحملان رقمين فرديين"، احسب احتمال الحادثة B
- (ج) هل أن الحادثتين A و B مستقلتان؟ برر إجابتك.
- 3- نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ عدد القريصات البيضاء في السحب في آن واحد
- أ- عين قانون احتمال X. ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين 80

- يلعب تلميذ ب 20 كرة، 13 منها حمراء و 7 خضراء وضع 10 كريات حمراء و 3 كريات خضراء في علبة A كما وضع البقية في علبة B.
- (1) في أول لعبة يختار 3 كريات عشوائيا في آن واحد من العلبة A؛ نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.
- أ) عين القيم التي يأخذها X. ب) عين قانون احتمال X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.
- (2) في ثاني لعبة يختار عشوائيا إحدى العلبتين ويسحب كرة.
- أ) مثل شجرة الاحتمالات التي تصف هذه الوضعية.
- ب) احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.
- (ج) علما أن التلميذ سحب كرة حمراء؛ فما هو احتمال أن تكون من العلبة A؟

التمرين 81

- صندوق يحتوي على خمس كرات متشابهة لانفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :
- كرتين خضراوين و 3 كرات بيضاء . يرمي لاعب قطعة نقدية غير مزيفة مرة واحدة .
- إذا تحصل على وجه F ، يسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق .
- وإذا تحصل على ظهر P يسحب كرتين على التوالي وبارجاع أي يعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق قبل السحب الموالي . نعتبر الحدثين التاليين
- A: "الحصول على كرتين بيضاوين B: "الحصول على كرة خضراء على الأقل"
- (1) بين أن احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{33}{100}$ ثم احسب $P(B)$ احتمال الحدث B.
- (2) يدفع اللاعب m ديناراً حيث m عدد حقيقي موجب ، إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء يربح 100 دينار أما إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء يخسر 40 دينار ، نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل مخرج الربح الصافي المحصل عليه من طرف اللاعب.
- أ) عين قيم المتغير العشوائي Y ، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y .
- ب) عين قيمة m حتى تكون اللعبة عادلة .

التمرين 82

تحتوي علبة على 7 كرات لا نميز بينها عند اللمس ، 4 منها تحمل الرقم 1 و 2 كرتان تحملان الرقم 2 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 .

1- نسحب ثلاث كرات في آن واحد :

أ) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم " .

B : يوجد في الكرات المسحوبة الرقم 0 .

C : " مجموع الأرقام المسحوبة يساوي 3 " .

ب) علما أن مجموع الأرقام التي تحملها الكرات يساوي 3، ما هو احتمال أن تحمل نفس الرقم

2- X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب 3 كرات بمجموع الأرقام المسحوبة :

أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين 83

كيس A يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 1 ، 2 ، 2 ، 4 ، 4 ، 4 و كيس B يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 4 .

نسحب قريصة رقمها x من الكيس A ثم قريصة رقمها y من الكيس B .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين ($x = y$)

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (y, x) العدد x^y .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم بين أن : $P(X = 4) = \frac{5}{24}$ واحسب : $P(X \leq 4)$

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم تحقق أن أمله الرياضي يساوي $\frac{209}{8}$

التمرين 84

نفترض أن لدينا ثلث أكياس متماثلة ، الكيس الأول U_1 يحوي 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء ، الكيس الثاني U_2 يحوي كريتين حمراوين و كرية سوداء ، أما الكيس الثالث U_3 فيحوي كريتين حمراوين و 3 كريات سوداء (كل الكريات متمثلة ولا نميز بينها في اللمس) . نختار كيسا عشوائيا ونسحب منه كرية .

(1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص مبرزاً عليها احتمالات الحوادث

(2) إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء ، ما احتمال أن تكون من الكيس U_2 ؟ .

(3) نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد ونسحب منه كريتين في آن واحد. إذا كانت الكريتان المسحوبتان حمراوين يربح اللاعب 13 دج و إذا كانت الكريتان المسحوبتان

سوداون يخسر اللاعب 16 دج أما إذا كانت الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين يربح اللاعب 3 دج. ليكن X المتغير العشوائي لهذه اللعبة
 أ- عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X .
 ب- جد الأمل الرياضي لهذه اللعبة، هل اللعبة عادلة؟
 ج- أحسب التباين $V(X)$ و الانحراف المعياري $\delta(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين 85

نرمي زهرة نرد متوازنة ذات 6 أوجه مرقمة من 1 إلى 6 المرة الأولى ونسجل الرقم α ثم نرميها ثانية ونسجل الرقم β .
 (1) أحسب احتمال كل حادثة:
 A: "الرقمان α و β يحققان المساواة $2\alpha + 1 = \beta$ ".
 B: "الرقمان α و β يحققان المتباينة $|\alpha - \beta| < 1$ ".
 C: "الرقمان α و β يحققان المتباينة $|\alpha - \beta| > 5$ ".
 (2) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل رميتين بالعدد $|\alpha - \beta|$.
 أ) ما هي قيم X الممكنة؟ ب) أكتب قانون احتمال X . ج) أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
 (3) نكتب الآن بالرقمين α و β المعادلة $(E): x^2 + \alpha x + \beta = 0$ حيث:
 ونعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل رميتين عدد حلول المعادلة (E) .
 أ) ما هي قيم Y الممكنة؟
 ب) أكتب قانون احتمال Y .
 ج) أحسب أمله الرياضي $E(Y)$.

التمرين 86

لدينا وعائين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرّق بينها عند اللمس. الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و 3 كرات سوداء (n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1).
 الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء.
 نقوم بالتجربة E: "نسحب عشوائيا كرة من U_1 ونضعها في U_2 ، ثم نسحب كرة من U_2 ونضعها في U_1 ".
 (1) نعتبر الحادثة A: "بعد التجربة E يبقى الوعاءان على ما كانا عليه".
 أ) بيّن أن الإحتمال $p(A)$ للحادثة A يكتب: $p(A) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$.
 ب) عيّن نهاية $p(A)$ لما n يؤول إلى $+\infty$.
 (2) نعتبر الحادثة B: "بعد التجربة E الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط".

$$✓ \text{ تحقق من أن } : p(B) = \frac{6}{4(n+3)} .$$

(3) لاعب يدفع 20 ديناراً ويقوم بالتجربة E :

(*) إذا كان بعد التجربة ، الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء ، اللاعب يكسب $2n$ دينار .

(*) إذا كان الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين ، فإن اللاعب يكسب n دينار .

(*) إذا كان الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء ، فإن اللاعب لا يكسب شيئاً .

✓ اشرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 ؟ .

(4) فيما يلي نفرض أن $n > 10$ ، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح الجبري : $X = 2n - 20$.

✓ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X .

✓ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

✓ بين أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون الوعاء U_1 يشمل 25 كرة بيضاء على الأقل .

التمرين 87

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كلها متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللمس .

(1) ن سحب من الكيس 3 كرات عشوائياً وفي آن واحد .

❖ أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة كلها حمراء " .

B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .

C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .

D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

(2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث : $(n \geq 2)$ ، ثم ن سحب

كرتين على التوالي وبدون إرجاع

❖ نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، وسحب كرة سوداء يساوي (+5) نقطة

ليكن X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها .

أ) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .

ج) كيف نختار عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ .

التمرين 88

تحتوي علبة على كمية من القريصات ، حيث أن نصف القريصات بيضاء (B) و ثلث القريصات خضراء (V) ، و سدس القريصات صفراء (J) .

75% من القريصات البيضاء شكلها دائري (R) ، و 50% من القريصات الخضراء شكلها دائري و 25% من القريصات الصفراء شكلها دائري ، أما باقي القريصات فشكلها مربع (C) .
نسحب عشوائيا قريصة واحدة من العلبة .

(1) شكل شجرة الاحتمالات التي تمثل الوضعية .

(2) أحسب احتمال الحوادث التالية :

❖ A : " القريصة المسحوبة خضراء دائرية " .

❖ B : " القريصة المسحوبة بيضاء و دائرية الشكل " .

❖ C : " القريصة المسحوبة دائرية الشكل " .

	B	V	J	المجموع
R				
C				
المجموع				24

(3) سحبنا قريصة دائرية الشكل ، فما هو احتمال أن تكون خضراء ؟ .

(4) نفرض أن مجموع القريصات في العلبة هو 24

أ) أكمل الجدول المقابل .

ب) نسحب في آن واحد ثلاث قريصات من العلبة :

-جد احتمال أن تكون القريصات المسحوبة من نفس الشكل

-جد احتمال أن تكون القريصات المسحوبة من نفس اللون .

إذا كانت القريصات المسحوبة من نفس الشكل فما هو احتمال أن تكون من نفس اللون

التمرين 89

زهر نرد A متوازن ملون يحوي وجهها لونه أخضر V و وجهين لونهما أسود N و 3 أوجه لونها أحمر R
I - نرmi زهر النرد مرتين، ونسجل لون الوجه في كل مرة.

1- ما احتمال الحصول على وجهين أسودين.

2- نعتبر الحادثة C : " الحصول على وجهين من نفس اللون " . بين أن : $P(C) = \frac{7}{18}$

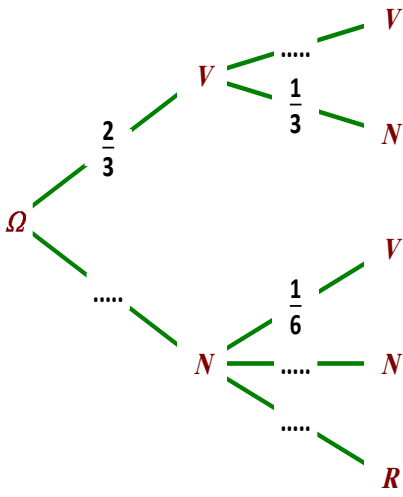
3- ما احتمال الحصول على وجهين من لونين مختلفين.

II - زهر نرد B متوازن ملون له 4 أوجه خضراء V ، و وجهين لونهما أسود N ، نرmi زهر النرد B :

- إذا تحصلنا على وجه أخضر نرmi مرة أخرى زهر النرد B ، ونسجل لون الوجه المتحصل عليه.

- إذا تحصلنا على وجه أسود نرmi زهر النرد A ، ونسجل لون الوجه المتحصل عليه.

1- أكمل شجرة الاحتمالات التالية:



2- بين أن احتمال الحصول على وجهين أخضرين هو: $\frac{4}{9}$

3- ما احتمال الحصول على وجه أخضر في الرمية الثانية،

4- علما أننا تحصلنا على وجه أخضر في الرمية الأولى ما

احتمال الحصول على وجه أخضر في الرمية الثانية.

5- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بالحصول على الوجه

الأسود خسارة 5 نقاط والوجه الأحمر ربح نقطة واحدة

والوجه الأخضر ربح α نقطة.

- عين قيمة α حتى تكون اللعبة عادلة

التمرين 90

(I) يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، حيث: $(n \geq 2)$ و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء، نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الوعاء:

(1) ما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

(2) نسمي $p(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون.

أ) بين أن: $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}$

ب) أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$ ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها.

(II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب ويقوم بنفس التجربة الأولى:

في البداية يدفع 30DA إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب 40DA، وإذا

وجدتهما من لونين مختلفين يكسب 5DA. نسمي الربح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع

أولا والمبلغ الذي يكسبه وليكن المتغير العشوائي X هو الربح الجبري للاعب

(1) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

(2) أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

(III) فيما يلي نعتبر $n = 2$ ، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي وبدون إرجاع:

(1) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج التجربة.

(2) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A: "سحب كرتين من نفس اللون"، B: "سحب كرة خضراء واحدة على الأقل".

(3) نفرض أن الكرية في السحبة الأولى خضراء، ما احتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية؟

التمرين 91

زهرة نرد مكعبة الشكل وجوها مرقمة بالأرقام من 1 إلى 6. p_k هو احتمال الحصول على

الرقم k ، $(1 \leq k \leq 6)$. هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

✓ الأعداد: $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ تشكل هذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r .

✓ والأعداد: p_1, p_2, p_4 تشكل هذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q .

(1) برهن أن: $p_k = \frac{k}{21}$ ، من أجل: $1 \leq k \leq 6$.

(2) نرمي هذه الزهرة مرة واحدة، ونعتبر الحوادث التالية:

❖ A : "العدد المحصل عليه زوجي".

❖ B : "العدد المحصل عليه أكبر من أو يساوي 3".

❖ C : "العدد المحصل عليه 3 أو 4".

أ) أحسب احتمال كل حادثة.

ب) أحسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علماً أنه زوجي.

ج) الحادثتان: A و B هل هما مستقلتان؟ الحادثتان: A و C هل هما مستقلتان؟

التمرين 92

تحتوي علبة على 3 كرات حمراء تحمل الأرقام: 1;2 و 1;3 و 2;1 و 3;2 كرتين بيضاوين تحملان الرقمين: 1;2 و 1;3

I) نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين من العلبة، ونعتبر الحادثتين:

A : "الكرتان المسحوبتان حمراوان" B : "الكرتان المسحوبتان تحملان رقمين مجموعهما عدد زوجي"

B : "الكرتان المسحوبتان تحملان رقمين مجموعهما عدد زوجي".

أ) أحسب الاحتمالات التالية: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(A \cap B)$ ، $p(A \cup B)$.

ب) هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

ج) إذا كانت الكرتان المسحوبتان حمراوين، فما هو احتمال أن يكون مجموع رقميهما زوجي؟

د) ما هو احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون و الرقم؟

II) التجربة التالية تقتضي سحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحب بمجموع الرقمين المحصل عليهما.

(1) أكتب قانون احتمال X . (2) أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 93

صندوق يحتوي على 6 قريصات حيث: 4 كرات حمراء و كرتين سوداوين، الكرات متماثلة ولا

نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائياً وفي آن واحد من العلبة 3 كرات من الصندوق.

1- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

2- نسحب عشوائياً و على التوالي ودون إرجاع كرتين من الصندوق.

أحسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A_0 "عدم سحب أي كرة سوداء"، A_1 "سحب كرة سوداء بالضبط"، A_2 "سحب كرتين سوداوين"
3- بعد السحب الأول بقيت في الصندوق 4 كرات ، نجري سحب آخر على التوالي ودون ارجاع
نعتبر الحوادث التالية:

B_0 "عدم سحب أي كرة سوداء"، B_1 "سحب كرة سوداء بالضبط"، B_2 "سحب كرتين سوداوين"
أ- احسب الإحتمالات التالية : $P_{A_0}(B_0)$ ، $P_{A_1}(B_0)$ ، $P_{A_2}(B_0)$ ، ثم استنتج $P(B_0)$.
ب- احسب احتمال الحصول على كرة سوداء بالضبط عند السحب الأول ، علما اننا حصلنا
على كرة سوداء بالضبط عند السحب الثاني.

التمرين 94

يلعب تلميذ ب 20 كرة، 13 منها حمراء و 7 خضراء وضع 10 كريات حمراء و 3 كريات خضراء
في علبة A كما وضع البقية في علبة B .

- (1) في أول لعبة يختار 3 كريات عشوائيا في آن واحد من العلبة A ؛ نسمي X المتغير العشوائي
الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في العلبة A .
أ) عين القيم التي يأخذها X . ب) عين قانون احتمال X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.
(2) في ثاني لعبة يختار عشوائيا إحدى العلبتين ويسحب كرة .
أ) مثل شجرة الاحتمالات التي تصف هذه الوضعية .
ب) احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .
ج) علما أن التلميذ سحب كرة حمراء ؛ فما هو احتمال أن تكون من العلبة A ؟

التمرين 95

يحتوي كيس على 10 كريات بحيث 5 كرات حمراء تحمل الأرقام : 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4
و 3 كرات خضراء تحمل الأرقام 5 ، 6 ، 7 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 8 و 9
1- نسحب عشوائيا كرتين من هذا الصندوق وفي آن واحد .

احسب احتمالات الحوادث التالية : A : "الكرتين المسحوبتين تحملان رقمان أوليان فيما بينهما"
B : "الكرتين المسحوبتين تحملان من لونين مختلفين" . C : "مجموع الأرقام المسحوبة عدد أولي" .
2- X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة من هذا الكيس بمكة العدد الحقيقي
 $\ln|x+y|$ حيث x و y هما الرقمان المسجلان على الكرتين المسحوبتين من هذا الكيس .

أ- عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب- أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين 96

لدينا 3 أكياس متماثلة ، الكيس الأول U_1 يحوي 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء ، الكيس
الثاني U_2 يحوي كرتين حمراوين و كرة سوداء ، أما الكيس الثالث U_3 فيحوي كرتين
حمراوين و 3 كريات سوداء (كل الكريات متماثلة ولا نميز بينها في اللمس) .

نختار كيسا عشوائيا ونسحب منه كرية .

- (1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص مبرزاً عليها احتمالات الحوادث
 - (2) إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء ، ما احتمال أن تكون من الكيس U_2 ؟.
 - (3) نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد ونسحب منه كرتين في آن واحد. نقتراح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب α (عدد طبيعي معطى) . فإذا سحب كرتين حمراوين يتحصل على 10DA و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يحصل على 5DA ، وإذا سحب كرتين سوداوين يربح ما دفعه . واليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .
- عرّف قانون المتغير العشوائي X ، ثم عين قيم α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين 97

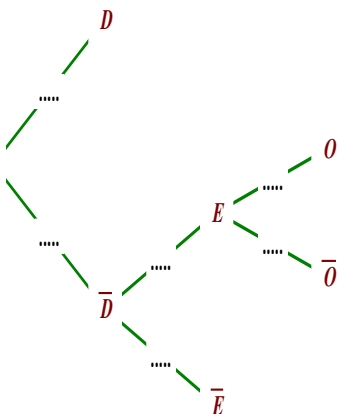
- في محل لبيع الأجهزة الالكترونية قمنا بدراسة سلوك الزبائن الذين يشترون جهاز تلفاز وثلاجة، بعد الدراسة كانت النتائج التالية:
- احتمال أن يشتري الزبون جهاز تلفاز هو 0.6.
 - احتمال أن يشتري الزبون ثلاجة بعدما يشتري جهاز تلفاز هو 0.4.
 - احتمال أن يشتري الزبون ثلاجة ولم يكن قد اشترى جهاز تلفاز هو 0.2
- (1) شكل شجرة الاحتمالات
- (2) ما احتمال أن يشتري الزبون جهاز تلفاز وثلاجة.
- (3) نعتبر أن احتمال شراء الزبون ثلاجة هو: $P(M) = 0.32$
- أ) إذا علمت أن الزبون اشترى ثلاجة، ما احتمال أن يشتري جهاز تلفاز؟
- ب) إذا علمت أن الزبون لم يشتري ثلاجة، ما احتمال أن يشتري جهاز تلفاز؟

التمرين 98

تقوم مدرسة البوليتاكن في فرنسا بتنظيم الدخول إلى السنة الأولى بالطريقة التالية:

يتم قبول 15 % من الطلبة الناجحين في البكالوريا الذين تحصلوا على معدل أكثر من 15 .

بقية الطلبة يجتازون امتحان كتابي نسبة النجاح فيه 60 % .



كل الطلبة الذين ينجحون في الامتحان الكتابي يتم استدعائهم إلى امتحان شفهي.

كل طالب له فرصة من 3 للنجاح في الامتحان الشفهي، والذين يجتازون الامتحان الشفهي يتم قبولهم في المدرسة.

نختار عشوائيا طالب ونعتبر الحوادث التالية:

- D: الطالب تم قبوله بناء على معدله الأكثر من 15.

- E: الطالب نجح في الامتحان الكتابي

- O: الطالب نجح في الامتحان الشفهي

- A: الطالب تم قبوله في المدرسة.

1- أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات التالية:

2- احسب $P(O)$ و $P(E)$

3- بين أن احتمال أن يتم قبول الطالب في المدرسة هو: $P(A) = 0,32$

التمرين 99

A، B و C ثلاثة صناديق. A يحوي كرتين حمراوين و 3 كرات زرقاء، B يحوي كرتين زرقاوين و 4 كرات خضراء، C يحوي كرة خضراء و كرة حمراء.

يقوم لاعب برمي زهر نرد غير مزيف ويسحب كرة واحدة من أحد الصناديق حيث:

- إذا تحصل على الأرقام 1، 2 أو 3 يسحب من A.

- إذا تحصل على الرقمين 4 أو 5 يسحب من B.

- إذا تحصل على الرقم 6 يسحب من C.

1- احسب احتمال الحصول على كرة حمراء.

2- نحصل على كرة خضراء، ما احتمال أن تكون من الصندوق B.

3- ما احتمال أن لا نحصل على كرة خضراء علما أننا تحصلنا عند رمي زهر النرد على الرقم 6

4- نحصل على كرة زرقاء، ما احتمال أن نكون قد تحصلنا عند رمي زهر النرد على الرقم 3.

5- هل الحادثتان "نختار الصندوق C" و "نحصل على كرة حمراء" مستقلتان؟ برر اجابتك.

التمرين 100

كيس يحوي 20 كرة لا نفرق بينها في اللمس، منها 10 كرات حمراء، 5 كرات سوداء، 3 كرات صفراء و 2 كرات خضراء. نسحب أربع كرات الواحدة تلو الأخرى دون ارجاعها للكيس، ونسجلها بنفس ترتيب خروجها حسب اللون.

1- احسب عدد الحالات الممكنة

2- جد $P(A)$ احتمال الحصول على كرة حمراء و كرة سوداء و كرة صفراء و كرة خضراء، بهذا الترتيب

6- احسب $P(E)$ احتمال الحصول على كرتين حمراوين و كرة صفراء و كرة خضراء



مجلة الرائد في الرياضيات



حلول تمارين الاحتمالات في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي



larbibelabidi @ gmail.com

العربي الجزائري Facebook

مجلة الرائد في الرياضيات

حلول تمارين الاحتمالات في البكالوريا

الشعب: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية + تقني رياضي + رياضيات

الجزء الثالث

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة + علوم دقيقة

الجزء الرابع

بكالوريات اجنبية

الجزء الخامس

تمارين مقترحة (مختصرة)

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

الجزء الأول: التمارين التدريبية

1- التحليل التوافقي

التمرين 01

تعيين عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام: 1، 2، 3، 4، 5، 6 في الحالات التالية:

مجموعة الامكانيات هي : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

أ) 3 أرقام : عدد القوائم ذات 3 عناصر من Ω هو $6^3 = 216$

ب) 3 أرقام مختلفة: عدد الترتيبات ذات 3 عناصر من Ω هو $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

ج) 6 أرقام مختلفة : عدد الترتيبات ذات 3 عناصر من Ω هو : $A_6^6 = 6! = 720$

التمرين 02

تعيين عدد الطرق المختلفة للحصول على كلمة "البكالوريا".

لتشكيل كلمة "البكالوريا" نستعمل الحروف: ا، ي، ا، ل، و، ر، ك، ا، ل، ب بحيث يتكرر فيها الحرف "ا" ثلاث مرات والحرف "ل" مرتين والحروف الأخرى مرة واحدة ولذا فإن عدد الترتيبات المختلفة للحصول على كلمة "البكالوريا" هو : $3! \cdot 2! = 12$

التمرين 03

تعيين عدد الطرق الممكنة لفتح القفل

عدد الطرق المختلفة لتشكيل الرقم السري والمشكل من اربع ارقام من بين الارقام:

1، 3، 5، 7، 9 هو عدد الطرق المختلفة هو عدد الترتيبات التالي: $A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$

التمرين 04

تعيين عدد الطرق التي يمكن لخمسة أشخاص أن يجلسوا:
أ) في صف فيه خمسة مقاعد.

عدد الطرق في هذه الحالة هو $5! = 120$

ب) حول طاولة مستديرة حولها خمسة مقاعد

عدد الطرق في هذه الحالة هو $(5-1)! = 4! = 24$

التمرين 05

1) عدد اللجان الممكن تشكيلها

عدد اللجان الممكن تشكيلها هو : $C_{10}^4 = 210$

2) عدد اللجان الممكن تشكيلها في الظروف

أ) الأعضاء الأربعة المختارين باحثات : عدد الحالات هو : $C_4^4 = 1$

ب) اللجنة تضم باحثة واحدة فقط :

$$\text{عدد الحالات هو : } C_4^1 \times C_6^3 = 80$$

ج) توجد باحثة واحدة على الأقل في اللجنة

$$\text{عدد الحالات هو : } C_4^1 \times C_6^3 + C_4^2 \times C_6^2 + C_4^3 \times C_6^1 + C_4^4 = 195$$

$$\text{طريقة أخرى : } C_{10}^4 - C_6^4 = 210 - 15 = 195$$

د) يوجد في اللجنة على الأكثر باحثان

$$\text{عدد الحالات هو : } C_6^2 \times C_4^2 + C_6^1 \times C_4^3 + C_4^4 = 115$$

التمرين 06

حساب عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كرات في الحالات التالية:

$$(1) \text{ 3 كرات من نفس اللون: عدد الحالات هو: } C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = 20 + 10 + 4 = 34$$

$$(2) \text{ 3 كرات تحمل نفس الرقم: عدد الحالات هو: } C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = 20 + 10 + 4 = 34$$

(3) كرات مجموع أرقامها 6: سحب 3 كرات تحمل الرقم 2، أو عند سحب 3 كرات مختلفة الأرقام

$$\text{ومنه عدد الحالات هو : } C_4^3 + (C_5^1 \times C_4^1 \times C_6^1) = 4 + 120 = 124$$

(4) 3 كرات واحدة على الأقل منها تحمل رقما فرديا

عدد الحالات لسحب 3 كرات واحدة منها على الأقل تحمل رقما فرديا ، أي كرة تحمل رقما فرديا والإثنان يحملان رقما زوجيا أو كرتان يحملان رقما فرديا و كرة تحمل رقما زوجيا أو 3 كرات تحمل كل منها رقما فرديا .

$$\text{ومنه عدد الحالات هو : } (C_{11}^1 \times C_4^2) + (C_{11}^2 \times C_4^1) + C_{11}^3 = 451$$

التمرين 07

(1) إيجاد العدد الطبيعي n في كل حالة:

$$2(C_n^0 + C_n^2 + C_n^3) = 5n + 2 \quad (أ)$$

$$\text{لدينا: } 2(C_n^0 + C_n^2 + C_n^3) = 5n + 2 \text{ أي: } 2 \left[1 + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} + \frac{n!}{(n-3)! \times 3!} \right] = 5n + 2$$

$$\text{أي: } 2 \left[1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right] = 5n + 2 \text{ بعد الحساب والتبسيط نجد :}$$

$$n^3 - 16n = 0 \text{ ، أي : } n(n^2 - 16) = 0 \text{ ومنه : } n = 0 \text{ ، أو } n = 4$$

$$(ب) \quad C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$$

$$\text{لدينا : } C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \text{ ، أي : } \frac{n!}{(n-3)! \times 3!} + \frac{2n!}{(2n-2)! \times 2!} = 8n$$

أي : $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{2n(2n-1)}{2} = 8n$ ، بعد الحساب و التبسيط نجد : $n^3 + 9n^2 - 52n = 0$ أي : $n(n^2 + 9n - 52) = 0$ ومنه : $n = 0$ أو $n = 4$ أو $n = -13$ (مرفوض) .

(2) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة التالية :

$$\begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \dots\dots (1) \\ C_{x+y}^2 = 10 \dots\dots (2) \end{cases}$ من (1) نجد : $\frac{(x+1)!}{(x+1-y)! \times y!} = \frac{x!}{(x-y+1)! \times (y-1)!}$ ،

أي : $\frac{(x+1)n!}{(x+1-y)! \times y(y-1)!} = \frac{x!}{(x-y+1)! \times (y-1)!}$ بعد الإختزال نجد :

$\frac{x+1}{y} = 1$ ، ومنه : $x+1 = y \dots\dots (1)$.

من (2) نجد : $\frac{(x+y)!}{(x+y-2)! \times 2!} = 10$ ، أي : $\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)!}{(x+y-2)! \times 2} = 10$.

أي : $(x+y)(x+y-1) = 20 \dots\dots (2)$.

الآن نعوض (1) في (2) نجد : $(2x+1)(2x) = 20$ ، أي : $2x^2 + x - 10 = 0$.

ومنه : $x_1 = 2$ أو $x_1 = \frac{-5}{2}$ (مرفوض) إذن : $x = 2$ و $y = 3$.

التمرين 08

(1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$

(*) لنتحقق من أجل $n = 0$ الطرف الأول $0 \times 0! = 0$ والطرف الثاني : $(0+1)! - 1 = 0$ ، (محقة) .

(*) لنفرض صحة المساواة عند n ، أي : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

(*) لثبت صحة المساواة عند $n+1$ ، أي : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$.

لدينا فرضا : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$ ، بإضافة $(n+1)(n+1)!$ نجد :

$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$

أي : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! \times (n+1+1) - 1$.

أي : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! \times (n+2) - 1$.

ومنه : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$ وهو المطلوب .

وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] n! = (2n)!$

(*) لنتحقق من أجل $n = 1$ ، أي : $2^1 \times [1] \times 1! = (2 \times 1)!$ ، ومنه : $2 = 2$ (محقة) .

(*) لنفرض صحة المساواة عند n ، أي : $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] n! = (2n)!$.

(*) لتثبت صحة المساواة عند $n + 1$ ، أي : $(n + 1)! = (2n + 2)!$: $2^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n + 1)] (n + 1)! = (2n + 2)!$.
نعلم أن : $2^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1)] (n + 1)! = 2^n \times 2 [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1)] (2n + 1)(n + 1) \times n!$:
أي : $2^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n + 1)] (n + 1)! = 2^n [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1)] n! \times 2(2n + 1)(n + 1)$:
لدينا فرضا : $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n - 1)] n! = (2n)!$:
ومنه : $2^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n + 1)] (n + 1)! = (2n)! \times (2n + 1) \times 2(n + 1)$:
أي : $2^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n + 1)] (n + 1)! = (2n)! \times (2n + 1) \times (2n + 2)$:
إذن : $2^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n + 1)] (n + 1)! = (2n + 2)!$ وهو المطلوب .
وأخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n - 1)] n! = (2n)!$:

التمرين 09

تعيين عدد الحالات الممكنة للحصول على:
أ) كرة بيضاء .

سحب كرة بيضاء وكرتين سوداويين أي عدد الحالات هو : $C_6^1 \times C_4^2 = 36$.

ب) كرة بيضاء على الأقل :

الحادث العكسي لهذا الحادث هو عدم سحب أي كرة بيضاء

ومنه عدد الحالات هو : $C_{10}^3 - C_4^3 = 120 - 4 = 116$

ج) 3 كرات ليست من نفس اللون :

سحب كرة بيضاء و كرتين سوداويين أو سحب كرتين بيضاويين و كرة سوداء

ومنه عدد الحالات هو : $C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 = 36 + 60 = 96$

2- أ) أثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $X_n = n^2 + 9n + 21$:

X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون

سحب كرتين من نفس اللون من الصندوق الذي يحوي $(n + 6)$ بيضاء و $(n + 4)$ سوداء

ومنه عدد الحالات هو : $X_n = C_{n+6}^2 + C_{n+4}^2 = \frac{(n+6)!}{2!(n+4)!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!}$

تبسيط العبارة $X_n = \frac{(n+6)(n+5)(n+4)!}{2!(n+4)!} + \frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{2!(n+2)!} = \frac{(n+6)(n+5) + (n+4)(n+3)}{2}$

ومنه : $X_n = \frac{(n+6)(n+5) + (n+4)(n+3)}{2} = \frac{2n^2 + 18n + 42}{2} = n^2 + 9n + 21$

ب) تعيين عدد الكرات التي نظيفها للصندوق حتى يكون $X_n = 10713$:

$X_n = 10713$ تكافئ $n^2 + 9n + 21 = 10713$ وتكافئ $n^2 + 9n - 10692 = 0$

نستعمل المميز لحل هذه المعادلة : $\Delta = 42849$

ومنه يوجد حلاين هما : $n_1 = -108 \notin \mathbb{N}$ مرفوض و $n_1 = 99$ مقبول

التمرين 10

1) عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كرات في آن واحد في كل حالة :
أ) الحصول على 3 كرات أرقامها فردية:

لدينا: 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 والأرقام الفردية منها هي: 1، 3، وعددها هو: 2
و 6 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 6 والأرقام الفردية منها هي: 1، 3، 5، وعددها هو: 3
و 8 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 8 والأرقام الفردية منها هي: 1، 3، 5، 7، وعددها هو: 4
وعليه عدد الكرات التي تحمل أرقام فردية هو: 9.

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!.6!} = 84$$

ومنه عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة:

ب) الحصول على كرة حمراء على الأقل

عدد الكرات الحمراء 4 والحادث العكسي لهذا الحادث هو عدم الحصول على كرة حمراء
ومنه عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة: $C_{18}^3 - C_{14}^3 = \frac{18!}{3!.15!} - \frac{14!}{3!.11!} = 816 - 364 = 452$

ج) الحصول على كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4

عدد الكرات التي تحمل الرقم 4 هو 3 ونأخذ واحدة فقط منها.

$$C_3^1 \times C_{15}^2 = \frac{3!}{1!.2!} \times \frac{15!}{2!.13!} = 3 \times 105 = 315$$

وعليه عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة:

2) عدد الحالات الممكنة لسحب 3 مع إعادة الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي في كل حالة :

ملاحظة: بنفس الطريقة في الجواب السابق لكن نستبدل التوفيقه بالقائمة فقط وعليه يكون:

أ) الحصول على 3 كرات أرقامها فردية: $9^3 = 729$

ب) الحصول على كرة حمراء على الأقل: $18^3 - 14^3 = 5832 - 2744 = 3088$

ج) الحصول على كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4: $3^1 \times 15^2 \cdot 3 = 2025$

التمرين 11

تعيين عدد الطرق الممكنة لوضع الكتب في الرف في كل حالة :

لدينا: 3 كتب للرياضيات وكتابين للفيزياء وأربعة كتب للأدب العربي

أ) الكتب ذات نفس المادة متجاورة:

$$(3! \times 2! \times 4!) \cdot 3! = 1728$$

عدد الطرق هو:

ب) كتب الأدب العربي فقط متجاورة

$$(5! \times 4!) \cdot 2! = 5760$$

عدد الطرق هو:

ج) دون شرط .

$$9! = 362880$$

عدد الطرق هو:

2- حساب الاحتمالات

أنواع السحب

التمرين 12

حساب احتمالات الحوادث A ، D ، E ، F و G في كل حالة من الحالات الآتية :
(1) السحب في آن واحد .

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو : $C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو : $C_5^3 = 10$ وعليه احتمال الحادث A هو : $P(A) = \frac{10}{220}$

عدد الحالات الملائمة للحدث D هو : $C_4^3 + C_5^3 + C_3^3 = 15$ وعليه احتمال الحادث D هو : $P(D) = \frac{15}{220}$

عدد الحالات الملائمة للحدث E هو : $C_4^1 \times C_5^1 \times C_3^1 = 60$ وعليه احتمال الحادث E هو : $P(E) = \frac{60}{220}$

عدد الحالات الملائمة للحدث F هو : $C_5^2 \times C_7^1 = 70$ وعليه احتمال الحادث F هو : $P(F) = \frac{70}{220}$

عدد الحالات الملائمة للحدث G هو : $C_{12}^3 - C_7^3 = 185$ وعليه احتمال الحادث G هو : $P(G) = \frac{185}{220}$

(2) السحب على التوالي وبإرجاع .

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو : $12^3 = 1728$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو : $5^3 = 125$ وعليه احتمال الحادث A هو : $P(A) = \frac{125}{1728}$

عدد الحالات الملائمة للحدث D هو : $4^3 + 5^3 + 3^3 = 216$ وعليه احتمال الحادث D هو : $P(D) = \frac{216}{1728}$

عدد الحالات الملائمة للحدث E هو : $4 \times 5 \times 3 = 60$ وعليه احتمال الحادث E هو : $P(E) = \frac{360}{1728}$

عدد الحالات الملائمة للحدث F هو : $5^2 \times 7 = 175$ وعليه احتمال الحادث F هو : $P(F) = \frac{175}{1728}$

عدد الحالات الملائمة للحدث G هو : $12^3 - 7^3 = 1385$ وعليه احتمال الحادث G هو : $P(G) = \frac{1385}{1728}$

(3) السحب على التوالي وبدون إرجاع .

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو : $A_{12}^3 = 1320$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو : $A_5^3 = 60$ وعليه احتمال الحادث A هو : $P(A) = \frac{60}{1320}$

عدد الحالات الملائمة للحدث D هو : $A_4^3 + A_5^3 + A_3^3 = 90$ وعليه احتمال الحادث D هو : $P(D) = \frac{90}{1320}$

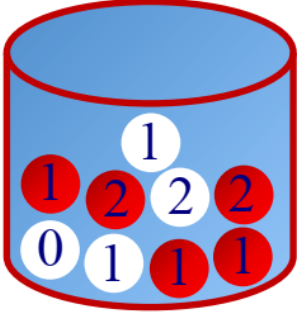
عدد الحالات الملائمة للحدث E هو: $3! = 360$ وعليه احتمال الحدث E هو: $P(E) = \frac{360}{1320}$

عدد الحالات الملائمة للحدث F هو: $3 \times A_5^2 \times A_7^1 = 420$ وعليه احتمال الحدث F هو: $P(F) = \frac{420}{1320}$

عدد الحالات الملائمة للحدث G هو: $A_{12}^3 - A_7^3 = 1110$ وعليه احتمال الحدث G هو: $P(G) = \frac{1110}{1320}$

التمرين 13

حساب احتمالات A ، D ، E ، F في كل حالة من الحالات الآتية :
(1) السحب في آن واحد .



عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو: $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $C_5^3 + C_4^3 = 14$

وعليه احتمال الحدث A هو: $P(A) = \frac{14}{84}$

عدد الحالات الملائمة للحدث D هو: $C_9^3 - C_4^3 = 80$ وعليه احتمال الحدث D هو: $P(D) = \frac{80}{84}$

عدد الحالات الملائمة للحدث E هو: $C_1^3 + C_5^3 + C_3^3 = 11$ وعليه احتمال الحدث E هو: $P(E) = \frac{11}{84}$

عدد الحالات الملائمة للحدث F هو: $C_5^2 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_3^2 = 33$ وعليه احتمال الحدث F هو: $P(F) = \frac{33}{84}$

(2) السحب على التوالي وبإرجاع .

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو: $9^3 = 729$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $5^3 + 4^3 = 189$ وعليه احتمال الحدث A هو: $P(A) = \frac{189}{729}$

عدد الحالات الملائمة للحدث D هو: $9^3 - 4^3 = 665$ وعليه احتمال الحدث D هو: $P(D) = \frac{665}{729}$

عدد الحالات الملائمة للحدث E هو: $5^3 + 3^3 = 152$ وعليه احتمال الحدث E هو: $P(E) = \frac{152}{729}$

عدد الحالات الملائمة للحدث F هو: $5^2 \times 3^1 + 1^1 \times 3^2 = 252$ وعليه احتمال الحدث F هو: $P(F) = \frac{252}{729}$

(3) السحب على التوالي وبدون إرجاع .

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو: $A_9^3 = 504$

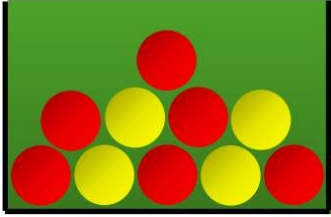
عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $A_5^3 + A_4^3 = 84$ وعليه احتمال الحدث A هو: $P(A) = \frac{84}{504}$

عدد الحالات الملائمة للحدث D هو: $A_9^3 - A_4^3 = 480$ وعليه احتمال الحدث D هو: $P(D) = \frac{480}{504}$

عدد الحالات الملائمة للحدث E هو: $A_5^3 + A_3^3 = 66$ وعليه احتمال الحدث E هو: $P(E) = \frac{66}{504}$

عدد الحالات الملائمة للحدث F هو: $A_5^2 \times A_3^1 \cdot 3 + A_1^1 \times A_3^2 \cdot 3 = 198$ وعليه احتمال الحدث F هو: $P(F) = \frac{198}{504}$

التمرين 14



حساب $P(A)$ و $P(B)$

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو: $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$

$P(A)$ هو احتمال الحدث A: "الحصول على اللونين معا"

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $A_6^2 \times A_4^1 \cdot 3 + A_6^1 \times A_4^2 \cdot 3 = 576$ (3 هو معامل الترتيب)

وعليه $P(A) = \frac{576}{720} = \frac{4}{5}$

$P(B)$ هو احتمال الحدث B: "الحصول على لون واحد"

عدد الحالات الملائمة للحدث B هو: $A_6^3 + A_4^3 = 144$ وعليه $P(B) = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$

ملاحظات

(1) يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة باستعمال شجرة الاحتمالات.

(2) الحادثة B: هي حادثة عكسية للحادثة A وعليه: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

التمرين 15

(1) حساب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة هو: $8^2 = 64$

نسمي الحدث A: "الحصول على كرتين من نفس اللون."

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$.

وعليه احتمال الحدث A هو: $P(A) = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$

نسمي الحدث B: "الحصول على كرتين من لونين مختلفين."

عدد الحالات الملائمة للحدث B هو: $(5^1 \cdot 3^1) \cdot 2 = 30$. حيث 2 هو معامل الترتيب

وعليه احتمال الحدث B هو: $P(B) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

ملاحظات

(1) يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة باستعمال شجرة الاحتمالات.

(2) الحادثة B: "الحصول على كرتين من نفس اللون" هي حادثة عكسية للحادثة A وعليه

يمكن حسابها بالطريقة التالية: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$

الاحتمالات الشرطية

التمرين 16

حساب الاحتمالات التالية:

عدد الحالات الممكنة هو: 900 عدد تلاميذ ثانوية

1- احتمال ان يكون التلميذ خارجيا.

عدد الحالات الملائمة للحدث هو 600 وعليه احتمال هذا الحدث هو: $P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$

2- احتمال ان يكون التلميذ من السنة الأولى .

عدد الحالات الملائمة للحدث هو 350 وعليه احتمال هذا الحدث هو: $P(I) = \frac{350}{900} = \frac{7}{18}$

3- احتمال ان يكون التلميذ من السنة الأولى وخارجيا.

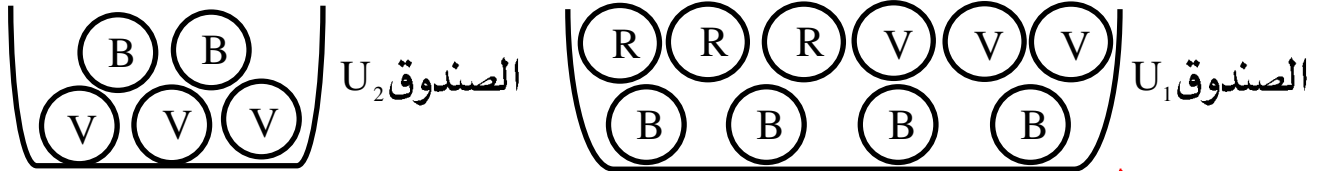
عدد الحالات الملائمة للحدث هو 250 وعليه احتمال هذا الحدث هو: $P(I \cap E) = \frac{250}{900} = \frac{5}{18}$

4- احتمال ان يكون التلميذ من السنة الأولى علما انه خارجي.

هذا الاحتمال هو احتمال شرطي والمعرف بالعلاقة $P(I/E) = P_E(I) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{5}{12}$

التمرين 17

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء ويحتوي صندوق U_2 على 3 كرات خضراء و كرتين بيضاوين.



1) حساب الحادثة "B سحب كرة بيضاء".

حدث سحب كرة بيضاء يمكن ان تكون من الكيس U_1 او من الكيس U_2

إذا كان الرقم المحصل عليه من مضاعف للعدد 3 ومنه احتمال هو $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ و غير ذلك هو $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

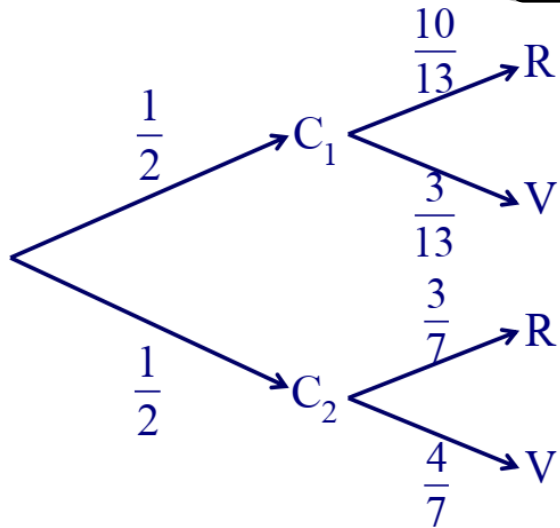
احتمال الحصول على كرة بيضاء من الكيس U_1 هو $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ومن الكيس U_2 هو $\frac{2}{5}$

وعليه $P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

2) حساب كرة من الصندوق U_1 علما انها بيضاء.

هذا الاحتمال هو احتمال شرطي والمعرف بالعلاقة $P_B(U_1) = \frac{P(B \cap U_1)}{P(B)} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{3}$

التمرين 18



1) تمثيل بشجرة متوازنة الوضعية المرافقة لهذه اللعبة.

احتمال ان يختار الطفل العلبة C_1 هو $P(C_1) = \frac{1}{2}$

احتمال ان يختار الطفل العلبة C_2 هو $P(C_2) = \frac{1}{2}$

وعليه شجرة المتوازنة الوضعية المرفقة لهذه اللعبة تكون كما يلي

2) حساب احتمال الحادثة R .

الحادثة R "يختار الطفل كرة حمراء". باستعمال شجرة الاحتمالات السابقة نجد:

$$P(R) = P(R \cap C_1) + P(R \cap C_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{109}{182}$$

3) حساب الاحتمال $P_R(C_2)$

$P_R(C_1)$ هو احتمال أن يكون قد أخذها من العلبة المكعبة علما أنه أخذ كرة حمراء

$$P(R \cap C_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13} = \frac{5}{13} \text{ حيث } P_R(C_1) = \frac{P(R \cap C_1)}{P(R)} = \frac{5}{13} \cdot \frac{182}{109} = \frac{70}{109}$$

التمرين 19

1) تكمل الجدول التالي

	عدد الشرائح المعيبة	عدد الشرائح غير المعيبة	المجموع
عدد الشرائح من إنتاج الورشة A	48	1152	1200
عدد الشرائح من إنتاج الورشة B	24	776	
المجموع	72	1928	2000

2) حساب الاحتمالات التالية: $P(D)$ ، $P(A \cap D)$ و $P_D(A)$.

* $P(D)$ هو احتمال الحادثة D : الشريحة بها عيوب من إنتاج A الورشة أو الورشة B

$$P(D) = \frac{48 + 24}{2000} = \frac{72}{2000} = \frac{9}{250}$$

* $P(A \cap D)$ هو احتمال الحادثة $A \cap D$: الشريحة بها عيوب ومن إنتاج A الورشة

$$P(A \cap D) = \frac{48}{2000} = \frac{6}{250}$$

* $P_D(A)$ هو احتمال الحادثة الشريجة من انتاج الورشة A علما انها بما عيوب

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{6}{250} \cdot \frac{250}{9} = \frac{2}{3} \text{ وعليه:}$$

(ب) حساب $P(\bar{D})$ ، $P(\bar{D} \cap B)$ و $P_{\bar{D}}(B)$

* $P(\bar{D})$ هو احتمال الحادث العكسية للحادث D وعليه: $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{9}{250} = \frac{241}{250}$

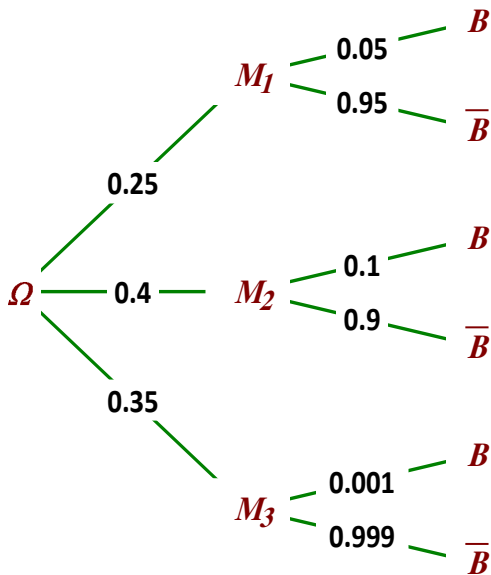
* $P(\bar{D} \cap B)$ هو احتمال الحادث الشريجة ليس بما عيوب و من انتاج الورشة B

$$P(\bar{D} \cap B) = \frac{776}{2000} = \frac{97}{250} \text{ وعليه}$$

* $P_{\bar{D}}(B)$ هو احتمال الحادث الشريجة من انتاج الورشة B علما انها غير معيبة

$$P_{\bar{D}}(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{97}{250} \cdot \frac{250}{241} = \frac{97}{241} \text{ وعليه}$$

التمرين 20



1. تكوين شجرة متوازنة تترجم الوضعية .

2. حساب احتمال الحادثة B التلميذ يعيد السنة .

الحادثة B التلميذ يعيد السنة هو ان يكون التلميذ معيد من المتوسطة أو من المتوسطة M_1 أو من المتوسطة M_2 أو من المتوسطة M_3 وعليه:

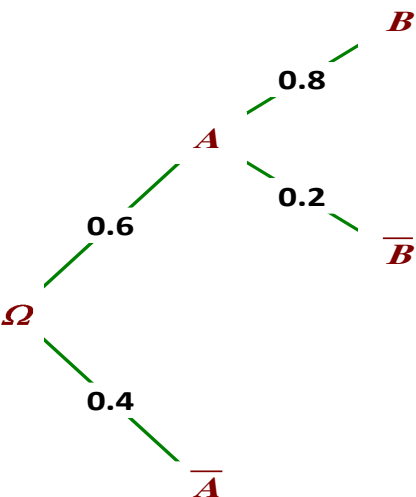
$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$$

باستعمال الشجرة نجد:

$$P(B) = 0,25 \times 0,05 + 0,40 \times 0,1 + 0,35 \times 0,001$$

$$P(B) = 0,05285 \text{ ومنه:}$$

التمرين 21



حساب احتمال الحدث B: "الشخص المختار لديه

انخفاض معدل مستوى القلوكوز في الدم".

ليكن A حادث هو الشخص تناول الدواء

و B حادث هو الشخص لديه انخفاض في مستوى

القلوكوز في الدم .

لتعيين احتمال الحادث B نستعمل الشجرة المقابلة

باستعمال الشجرة نجد: $P(B) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$

التمرين 22

1) حساب احتمال ان يصيب رستم وراضي الهدف معا.

نسمي A حادث أن يصيب رستم الهدف و B حادث أن يصيب راضي الهدف

الحادثان A و B مستقلان معناه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ومنه احتمال ان يصيب رستم وراضي الهدف معا هو: $P(A \cap B) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$

2) حساب احتمال ان يصاب الهدف.

احتمال ان يصاب الهدف (من طرف رستم او راضي) هو: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ومنه $P(A \cup B) = 0,7 + 0,5 - 0,35 = 0,85$

التمرين 23

1) حساب الاحتمالات التالية: $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ لماذا؟

لدينا: الحادث $A = \{1; 2\}$ هو: "ظهور عدد اصغر من اويساوي 2" ومنه: $P(A) = \frac{2}{6}$

الحادث $B = \{5; 6\}$ هو: "ظهور عدد اكبر تماما من 4" ومنه: $P(B) = \frac{2}{6}$

ومنه الحادث $A \cap B = \emptyset$ وعليه $P(A \cap B) = 0$ لان الحادثان A و B غير متلائمين

لحادثتان A و B غير مستقلتين لان $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

استنتاج الاحتمال $P(A \cup B)$.

نعلم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ومنه $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2) هل الحادثتان D و C مستقلتان؟ لماذا؟

لدينا: الحادث $D = \{2; 4; 6\}$ هو: "ظهور عدد زوجي" ومنه: $P(D) = \frac{3}{6}$

الحادث $C = \{1; 3; 5\}$ هو: "ظهور عدد فردي" ومنه: $P(C) = \frac{3}{6}$

ومنه الحادث $D \cap C = \emptyset$ وعليه $P(D \cap C) = 0$ ولدينا: $P(D) \times P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

وعليه الحادثتان D و C غير مستقلتان لان $P(D \cap C) \neq P(D) \times P(C)$

حساب $P(C)$ ثم حساب بطريقتين مختلفتين $P(D)$.

الجواب السابق $P(C) = \frac{3}{6}$ و $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

حساب $P(D)$ بطريقة ثانية: $P(D \cup C) = P(D) + P(C)$

نعلم: $(D \cup C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ومنه $P(D \cup C) = 1$

وعليه: $P(D) = P(D \cup C) - P(C) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) هل الحادثان D و E مستقلتان؟ لماذا؟ احسب $P(D \cup E)$.

لدينا: الحادث $E = \{2; 3; 5\}$ هو: "ظهور عدد أولي" ومنه: $P(E) = \frac{3}{6}$

ومن الحادث $D \cap E = \{2\}$ وعليه $P(D \cap E) = \frac{1}{6}$ ولدينا: $P(D) \times P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

وعليه الحادثان D و E غير مستقلتان لأن $P(D \cap E) \neq P(D) \times P(E)$

حساب الاحتمال $P(D \cup E)$.

نعلم: $P(D \cup E) = P(D) + P(E)$ ومنه $P(D \cup E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

دستور ثنائي الحد

التمرين 24

1) باستعمال دستور ثنائي الحد نشر العبارات التالية:

تذكير: دستور ثنائي الحد لنيوتن $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} \cdot b^p$

* ومنه: $(x + 1)^3 = \sum_{p=0}^{p=3} C_3^p (x)^{3-p} (1)^p = C_3^0 (x)^3 (1)^0 + C_3^1 (x)^2 (1)^1 + C_3^2 (x)^1 (1)^2 + C_3^3 (x)^0 (1)^3$

ومنه: $(x + 1)^3 = (x)^3 + 3(x)^2 + 3(x) + 1$

* $(x - 2)^4 = \sum_{p=0}^{p=4} C_4^p (x)^{4-p} (1)^p = C_4^0 (x)^4 (-2)^0 + C_4^1 (x)^3 (-2)^1 + C_4^2 (x)^2 (-2)^2 + C_4^3 (x)^1 (-2)^3 + C_4^4 (x)^0 (-2)^4$

ومنه: $(x - 2)^4 = x^4 - 12x^3 + 32x^2 - 12x + 16$

$(2x - 3y)^5 = \sum_{p=0}^{p=5} C_5^p (2x)^{5-p} (-3y)^p = 32x^5 - 30(x)^4 (y)^1 + 720(x)^3 (y)^2 - 1040(x)^2 (y)^3 + 810(x)^1 (y)^4 - 243(y)^5$

2- أ) كتابة الحد الذي درجته 10.

لدينا: $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15} = \sum_{p=0}^{p=15} C_{315}^p (x^3)^{15-p} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p = \sum_{p=0}^{p=15} (-2)^p C_{315}^p x^{-5p+45}$

يكون الحد درجته إذا كان $-5p + 15 = 10$ ومنه $p = 1$

وعليه الحد درجته تساوي 10 هو: $(-2)^1 C_{315}^1 x^{40} = -30x^{40}$

ب) إيجاد معامل الحد التاسع. باعتبار الترتيب تنازلي من الأكبر درجة إلى الأقل درجة

معامل الحد التاسع نحصل عليه من أجل $p = 8$ ومنه معامله هو $(-2)^8 C_{315}^8 = 9884160$

ج) إيجاد الحد الثابت

الحد الثابت هو الذي درجته 0 وعليه يكون الحد ثابت إذا كان $-5p + 15 = 0$ ومنه $p = 3$

ومن الحد الثابت هو $(-2)^3 C_{315}^3 x^0 = -3640$

تمارين اخرى متنوعة

التمرين 25

حساب احتمال كل حادثة :

طريقة السحب على التوالي مع إعادة البطاقة المسحوبة

عدد الحالات الكلية لسحب بطاقتين هو $7^2 = 49$

الحادث A هو: "سحب بطاقتين رقميهما فرديان"

يوجد 4 بطاقات تحمل رقما فرديا من بين 7 بطاقات ومنه عددا للحالات الملائمة هي: $4^2 = 16$

ومنه احتمال الحادث A هو: $P(A) = \frac{16}{49}$

الحادث B هو "سحب بطاقة رقمها زوجي والأخرى رقمها مربع تام "

يوجد 3 بطاقات تحمل رقما زوجيا و توجد بطاقتان تحمل رقما مربع تام من بين 7 بطاقات

ومنه عددا للحالات الملائمة هي: $3^1 \cdot 2^1 \cdot 2 = 12$ حيث 2 هو معامل الترتيب

ومنه احتمال B الحادث هو: $P(B) = \frac{12}{49}$

الحادث C هو "سحب بطاقة على الأقل رقمها اولي:"

يوجد 4 بطاقات تحمل رقما أوليا من بين 7 بطاقات وهي: 2، 3، 5 و 7

ومنه عددا للحالات الملائمة هي: $4^2 + 4^1 \cdot 3^1 \cdot 2 = 16 + 24 = 40$ حيث 2 هو معامل الترتيب

ومنه احتمال C الحادث هو: $P(C) = \frac{40}{49}$

طريقة 2: $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{3^2}{49} = \frac{40}{49}$ حيث $\bar{C}$ الحادث العكسي للحادث C

الحادث D هو "سحب بطاقتين مجموع رقميهما زوجي"

الحادث العكسي لهذا الحادث هو : سحب بطاقتان مجموع رقميهما فردي أي احدهما زوجي

والأخرى فردي وعدد الحالات في هذه الحالة هو: $4^1 \cdot 3^1 \cdot 2 = 24$ حيث 2 هو معامل الترتيب

ومنه احتمال D الحادث هو: $P(D) = 1 - \frac{24}{49} = \frac{25}{49}$

التمرين 26

1-حساب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية:

الحادث A هو: "سحب ثلاث كريات جداء ارقامها يساوي 6" .

لدينا: خمس كريات مرقمة ب 1 ثلاث كريات ب 2 وكريتين مرقمتان ب 3

عدد الحالات الكلية لسحب ثلاث كريات في الآن الواحد هو: $C_{10}^3 = 120$

لدينا: جداء ارقام الكريات يساوي 6 معناه كرة رقمها 1 وكرة رقمها 2 وكرة رقمها 3:

عدد الحالات الملائمة للحادث A هو: $C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 30$

ومنه احتمال الحادث A هو: $P(A) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

الحادث B هو: "سحب ثلاث كريات جداء ارقامها مربع تام"

الأعداد مربعها تام هي: 9 أو 4 أو 1 التي يمكن تشكيلها عند سحب 3 كريات من الأرقام 1، 2، 3 لدينا: ثلاث كريات جداء ارقامها مربع تام معناه ثلاث كرات تحمل الرقم 1 أو كرة رقمها 1 وكرتين رقمهما 3 أو كرة رقمها 1 وكرتين رقمهما 2 .

ومنه عدد الحالات للحادث B هو: $C_5^3 + C_5^1 \times C_3^2 + C_5^1 \times C_2^2 = 10 + 15 + 5 = 30$

ومنه احتمال الحادث B هو: $P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

الحادث C هو: "سحب ثلاث كريات جداء ارقامها اولي"

الاعداد التي تكون اولية وهي جداء 3 أرقام من بين الأرقام 1، 2، 3 هي: 1، 2، 3 كريات جداء ارقامها اولي معناه كرة رقمها 3 وكرتين رقمهما 1 أو كرة رقمها 2 وكرتين رقمهما 3

عدد الحالات للحادث C هو: $C_5^2 \times C_3^1 + C_5^2 \times C_2^1 = 50$ ومنه احتمال الحادث C هو: $P(C) = \frac{50}{120}$

2- أ- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

X يرفق بكل سحبة ، جداء ارقام الكريات المسحوبة معناه $X = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18\}$

$$P(X=1) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{120} = \frac{30}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^2 \times C_2^1}{120} = \frac{20}{120}$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{120} = \frac{15}{120}$$

$$P(X=6) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{120} = \frac{30}{120}$$

$$P(X=8) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$$

$$P(X=9) = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{120} = \frac{5}{120}$$

$$P(X=12) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{120} = \frac{6}{120}$$

$$P(X=18) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{120} = \frac{3}{120}$$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والملخص في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4	6	8	9	12	18	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{3}{120}$	1

ب- حساب الأمل الرياضي للمتغير X .

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=8} x_i \cdot P_i : \text{العلاقة معرف بالعلامة}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=8} x_i \cdot P_i = \frac{1 \times 10 + 2 \times 30 + 3 \times 20 + 4 \times 15 + 6 \times 30 + 8 \times 1 + 9 \times 5 + 12 \times 6 + 18 \times 3}{120} = \frac{193}{40}$$

التمرين 27

حساب احتمال كل حادثة :

عدد الحالات الكلية لسحب كرتين على التوالي دون ارجاع الكرة هو : $A_5^2 = 5.4 = 20$
(1) حساب احتمال الحادث A: "سحب كرتين من نفس اللون".

عدد الحالات الملائمة للحادث A هو : $A_2^2 + A_3^2 = 8$ ومنه احتمال A هو : $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

(2) حساب احتمال الحادث B: "سحب كرة بيضاء ثم كرة سوداء"

عدد الحالات الملائمة للحادث B هو : $A_2^1 \cdot A_3^1 = 6$ ومنه احتمال الحادث B هو : $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(3) حساب احتمال الحادث C: "سحب كرتين مختلفين في اللون".

عدد الحالات الملائمة للحادث C هو : $A_2^1 \cdot A_3^1 + A_3^1 \cdot A_2^1 = 12$ ومنه احتمال C هو : $P(C) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

التمرين 28

1- حساب عدد اللجان الممكنة .

القسم مكون من 16 تلميذ بحيث 10 ذكور و 6 اناث واللجنة تتكون من 3 افراد

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!.13!} = 560 : \text{ومنه عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو}$$

2- أ- حساب احتمال الحادثة E .

الحادثة E هي: "أعضاء اللجنة من نفس الجنس" معناه اللجنة تشمل 3 ذكور أو 3 إناث
عدد أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو: $C_{10}^3 + C_6^3 = 120 + 20 = 140$

ومنه احتمال الحادث E هو: $P(E) = \frac{140}{560} = \frac{1}{4}$

ب- استنتج احتمال الحادثة F

الحادثة F هي: أعضاء اللجنة من الجنسين معا. وهي الحادثة العكسية للحادثة E

وعليه احتمال الحادث F هو: $P(F) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3- حساب ما هو الاحتمال لكي تتضمن اللجنة أعضاء من الجنسين معا ، وان لا يتواجد بها التلميذ A والتلميذة B في ان واحد .

عدد الحالات هو اختيار التلميذ A و 2 من بقية التلاميذ أو اختيار التلميذة B و 2 من بقية التلاميذ ثم نقص منها الحالات التي يكون فيها أعضاء اللجنة من نفس الجنس لان السؤال يشترط أن تتضمن اللجنة أعضاء من الجنسين ولا يكون فيها كل الاعضاء من نفس الجنس.

ومنه: $C_1^1 \times C_{15}^2 + C_1^1 \times C_{15}^2 - (C_{10}^3 + C_6^3) = 105 + 105 - 140 = 70$

ومنه احتمال هذه الحادثة هو $P(E) = \frac{70}{560} = \frac{1}{8}$

4- تحديد قانون احتمال X ثم حساب الامل الرياضياتي : $E(X)$.

المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الاناث المتواجدة باللجنة ومنه $X = \{0;1;2;3\}$

$P(X=0) = \frac{C_{10}^3}{560} = \frac{120}{560}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة لا تشمل أنثى

$P(X=1) = \frac{C_6^1 \times C_{10}^2}{560} = \frac{270}{560}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة تشمل أنثى واحدة فقط

$P(X=2) = \frac{C_6^2 \times C_{10}^1}{560} = \frac{150}{560}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة تشمل 2 من الإناث

$P(X=3) = \frac{C_6^3}{560} = \frac{20}{560}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة تشمل 3 أنثى من الإناث

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ملخصة في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{120}{560}$	$\frac{270}{560}$	$\frac{150}{560}$	$\frac{20}{560}$	1

$E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 120 + 1 \times 270 + 2 \times 150 + 3 \times 20}{560} = \frac{63}{56}$

نعلم ان: $\sum_{i=1}^{i=6} P_i = 1$ مجموع الاحتمالات يساوي 1

ولدينا: $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

أي: $P_6 = \frac{1}{64} P_1$ و $P_5 = \frac{1}{32} P_1$ ، $P_4 = \frac{1}{16} P_1$ و $P_3 = \frac{1}{8} P_1$ ، $P_3 = \frac{1}{4} P_1$ ، $P_2 = \frac{1}{2} P_1$

وعليه $\sum_{i=1}^{i=6} P_i = 1$ تكافئ $P_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 1$ ومعناه $2P_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right) = 1$ أي $P_1 = \frac{32}{63}$

ومنه: $P_6 = \frac{1}{63}$ و $P_5 = \frac{2}{63}$ ، $P_4 = \frac{4}{63}$ ، $P_3 = \frac{8}{63}$ ، $P_2 = \frac{16}{63}$

3-أ) حساب احتمال ظهور رقم زوجي

احتمال ظهور رقم زوجي هو: $P_6 + P_4 + P_2 = \frac{16}{63} + \frac{4}{63} + \frac{1}{63} = \frac{25}{63}$

ب) حساب احتمال ظهور رقم مضاعف للعدد 3

احتمال ظهور رقم زوجي هو: $P_6 + P_3 = \frac{16}{63} + \frac{8}{63} = \frac{24}{63} = \frac{8}{21}$

تعريف قانون الإحتمال وحساب أمله الرياضياتي ثم التباين والانحراف المعياري

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه. ومنه: $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والمخلص في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4	5	6	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$	1

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $E(X) = \sum_{i=1}^{i=6} x_i \cdot P_i$

$E(X) = \sum_{i=1}^{i=6} x_i \cdot P_i = \frac{1 \times 32 + 2 \times 16 + 3 \times 8 + 4 \times 4 + 5 \times 2 + 6 \times 1}{63} = \frac{40}{21}$

التباين للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $Var(X) = \sum_{i=1}^{i=6} (x_i - E(X))^2 \cdot P_i$

$$\text{Var}(X) = \frac{(1 - \frac{40}{21})^2 \times 32 + (2 - \frac{40}{21})^2 \times 16 + (3 - \frac{40}{21})^2 \times 8 + (4 - \frac{40}{21})^2 \times 4 + (5 - \frac{40}{21})^2 \times 2 + (6 - \frac{40}{21})^2 \times 1}{63} = 1.42$$

$$\delta(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1.42} = 1.2$$

التمرين 30

الزهرة 1 \ 2	1	2	2	3	4	4
1	2	3	3	4	5	5
2	3	4	4	5	6	6
2	3	4	4	5	6	6
5	6	7	7	8	9	9
5	6	7	7	8	9	9
6	7	8	8	9	10	10

1- ملأ الجدول

2- قيم المجموع هي مجموعة الإمكانيات

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

3- حساب احتمال كل مجموع (قانون الاحتمال)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

4- احسب الاحتمالات التالية:

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36} \text{ : احتمال الحصول على مجموع فردي هو } P(A)$$

$$P(B) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ : احتمال الحصول على مجموع مضاعف للعدد 3 هو } P(B)$$

$$P(C) = \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36} \text{ : احتمال الحصول على مجموع فردي ومضاعف للعدد 3 هو } P(C)$$

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(C) = \frac{7}{36} \text{ : احتمال الحصول على مجموع فردي أو مضاعف للعدد 3 هو } P(D)$$

5- أ) تكمل الجدول: يلعب شخص اللعبة التالية:

أ) إذا كان المجموع $\{2, 3\}$ يربح 100 دج ، ب) إذا كان المجموع $\{4, 5\}$ يربح 20 دج
ج) إذا كان المجموع $\{6, 7, 8\}$ يخسر 45 دج . د) إذا كان المجموع $\{9, 10\}$ لا يخسر ولا يربح.

العلامة	100	20	-45	0
الاحتمال	$\frac{5}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{7}{36}$

ب) حساب الأمل الرياضي، هل هذه اللعبة عادلة؟

الأمل الرياضي: $E(X) = 100 \times \frac{5}{36} + 20 \times \frac{9}{36} + (-45) \times \frac{15}{36} + 0 \times \frac{7}{36} \approx 0.14$ ومنه اللعبة مربحة

ج) حساب الانحراف المعياري، ماذا تستنتج؟

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i}$

$$\sigma(X) = \sqrt{\left(100 - \frac{5}{36}\right)^2 \times \frac{5}{36} + \left(20 - \frac{5}{36}\right)^2 \times \frac{9}{36} + \left(-45 - \frac{5}{36}\right)^2 \times \frac{15}{36} + \left(0 - \frac{5}{36}\right)^2 \times \frac{7}{36}}$$
$$= \sqrt{2332.62} = 48.3$$

نستنتج: مع أن اللعبة مربحة إلا أن الربح ذوتشتت كبير وبالتالي لا ينصح بهذه اللعبة.

التمرين 31

1) حساب احتمال كل من الأحداث التالية:

تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 4 أربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه إبراهيم و امرأة واحدة اسمها فاطمة، نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام.

عدد الحالات الممكنة لتكوين لجنة هو: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!.9!} = 220$

حساب احتمال الحادث A "تكوين لجنة تضم 3 رجال".

عدد أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو: $C_8^3 = \frac{8!}{3!.5!} = 56$

ومنه احتمال الحادث A هو: $P(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$

حساب احتمال الحادث B "تكوين لجنة تضم رجلا و امرأتين".

عدد أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو: $C_8^1 \times C_4^2 = 8 \cdot \frac{4!}{2!.2!} = 48$

ومنه احتمال الحادث B هو: $P(B) = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$

حساب احتمال الحادث C "تكوين لجنة تضم إبراهيم".

عدد أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو: $C_1^1 \times C_{10}^2 = 1 \cdot \frac{10!}{2!.8!} = 45$

ومنه احتمال الحادث C هو: $P(C) = \frac{45}{220} = \frac{9}{44}$

حساب احتمال الحادث D "تكوين لجنة تضم إما إبراهيم أو فاطمة".

عدد أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو: $C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_{10}^2 = 2 \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 90$

ومنه احتمال الحادث D هو: $P(D) = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$

2- أ) تعيين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X وتعريف قانون احتماله .
 X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة.

وعليه قيم المتغير العشوائي هي: $X = \{0; 1; 2; 3\}$

$P(X=0) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{4}{220}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة لا تشمل أي ذكر.

$P(X=1) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{48}{220}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة تشمل رجل و 2 من الإناث

$P(X=2) = \frac{C_8^2 \times C_4^1}{220} = \frac{112}{220}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة تشمل رجلين وأنثى

$P(X=3) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$ معناه احتمال ان تكون اللجنة تشمل 3 رجال

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والمخلص في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{4}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{56}{220}$	1

ب) حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i$

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 4 + 1 \times 48 + 2 \times 112 + 3 \times 56}{220} = \frac{440}{220} = 2$$

التباين للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $Var(X) = \sum_{i=0}^3 (x_i - E(X))^2 \cdot P_i$

$$Var(X) = \frac{(0-2)^2 \times 4 + (1-2)^2 \times 48 + (2-2)^2 \times 112 + (3-2)^2 \times 56}{220} = \frac{120}{220} = \frac{6}{11}$$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $\delta(X) = \sqrt{Var(X)}$

$$\delta(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{6}{11}} \text{ ومنه:}$$

1) حساب احتمال كل من الأحداث التالية :

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متميزة عند اللمس . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق و نسجل لونها ، ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

أ) حساب احتمال الحادث A "الحصول على كرتين بيضاوين" .

عدد الطرق الكلية للحصول على كرتين هو : $10^2 = 100$

عدد الطرق الكلية للحصول على كرتين بيضاوين هو : $7^2 = 49$

ومنه احتمال هذا الحادث هو : $P(A) = \frac{49}{100}$

ب) حساب احتمال الحادث B "الحصول على كرتين من نفس اللون" .

عدد الطرق الكلية للحصول على كرتين من نفس اللون هو : $7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$

ومنه احتمال هذا الحادث هو : $P(B) = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$

2- أ) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و حساب أمله الرياضي $E(X)$.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع النقط المحصل عليها .

بحيث تمنح لكل كرة بيضاء العلامة $(\alpha \in \mathbb{R})$ ولكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$

وعليه قيم المتغير العشوائي هي : $X = \{-2\alpha; 0; 2\alpha\}$

معناه احتمال سحب كرة سوداوين $P(X = -2\alpha) = \frac{3^2}{100} = \frac{9}{100}$

معناه احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين $P(X = 0) = \frac{2 \times 3^1 \times 7^1}{100} = \frac{42}{100}$

معناه احتمال سحب كرتين بيضاوين $P(X = 2\alpha) = \frac{7^2}{100} = \frac{49}{100}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$

بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والمخلص في الجدول التالي :

x_i	-2α	0	2α	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$	1

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة : $E(X) = \sum_{i=0}^{i=2} x_i \cdot P_i$

$$E(X) = \sum_{i=0}^2 x_i \cdot P_i = \frac{-2\alpha \times 9 + 0 \times 42 + 2\alpha \times 49}{100} = \frac{80\alpha}{100} = \frac{4\alpha}{5}$$

(ب) تعيين قيمة العدد الحقيقي حتى تكون اللعبة مربحة .

تكون اللعبة مربحة إذا كان $E(X) > 0$ ومنه $\frac{4\alpha}{5} > 0$ ومعناه $\alpha > 0$

(3) تعيين عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علم أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$

عند إضافة $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق يصبح فيه $(n+7)$ منها n كرة سوداء و 7 كرة بيضاء
عدد الطرق الكلية للحصول على كرتين هو: $(n+7)^2$

عدد الطرق الكلية للحصول على كرتين بيضاوين هو: $7^2 = 49$

ومنه احتمال هذا الحادث هو: $P(A) = \frac{49}{(n+7)^2}$ ولدينا $P(A) = \frac{1}{4}$

ومنه $\frac{49}{(n+7)^2} = \frac{1}{4}$ ومنه $\frac{7}{(n+7)} = \frac{1}{2}$ وعليه $n+7=14$ أي $n=7$

ومنه عدد الكرات السوداء التي نضيفها للصندوق هو: $n=7-3=4$

التمرين 33

(1) أ) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

لحساب احتمالات الحوادث المطلوبة

نشكل شجرة الاحتمالات التالية:

(1) أ) حساب احتمال كل من الأحداث التالية :

A "الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء".

باستعمال الشجرة المقابلة نجد: $P(A) = \frac{4}{7}$

B "الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء".

باستعمال الشجرة المقابلة نجد: $P(B) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$

(ب) استنتاج حساب الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة .

نرمز لهذه الحادثة بالرمز C

الحادثة C هو لانجري السحبة الثالثة يجب ان نتوقف عند السحبة الأولى أو عند السحبة الثانية أي "سحب كرة سوداء في المرة الأولى" أو "سحب كرة سوداء في المرة الثانية"

نستنتج أن: $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

2- اعطاء قانون الاحتمال المتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضي

X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها ومنه $X = \{1; 2; 3; 4\}$

$$P(X=1) = P(A) = \frac{4}{7} = \frac{20}{35}$$

$$P(X=2) = P(B) = \frac{2}{7} = \frac{10}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_5^1} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_5^1} \times \frac{C_4^1}{C_4^1} = \frac{1}{35}$$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والمخلص في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{20}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i \text{ : العلاقة معرف بالعلامة}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i = \frac{1 \times 20 + 2 \times 10 + 3 \times 4 + 4 \times 1}{35} = \frac{56}{35}$$

التمرين 34

1- حساب احتمال ظهور وجه يحمل الرقم 6.

$$P_6 = 1 - \sum_{i=1}^{i=5} P_i = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,15) = 0,15 \text{ ومنه } \sum_{i=1}^{i=6} P_i = 1 \text{ نعلم أن:}$$

2- حساب احتمال الحصول على وجه يحمل رقما فرديا.

احتمال الحصول على وجه يحمل رقما فرديا هو:

$$P_1 + P_3 + P_5 = 0,1 + 0,3 + 0,15 = 0,55$$

3- حساب احتمال الحصول على وجه يحمل رقما أكبر تماما من 4.

احتمال الحصول على وجه يحمل رقما أكبر تماما من 4 هو:

$$\sum_{i=5}^{i=6} P_i = P_5 + P_6 = 0,15 + 0,15 = 0,30$$

4- حساب احتمال الحصول على وجه يحمل رقما يقسم العدد 2019

لدينا: $2019 = 3 \times 673$ ومنه قواسم العدد 2019 هي 1 ، 3 ، 673 و 2019
ومنه الأعداد التي تقسم 2019 الأصغر من أو تساوي 6 هي 1 و 3

احتمال الحصول على وجه يحمل رقما يقسم العدد 2019 هو: $P_1 + P_3 = 0,1 + 0,3 = 0,40$

التمرين 35

حساب احتمال الحوادث التالية:

نعتبر C حادثة يلبس ربطة عنق و B حادثة يلبس قميص أبيض والجدول التالي يحدد عدد كل صف من المجموعة

المجموع	$\bar{C}$	C	
85	35	50	B
165	95	70	$\bar{B}$
250	130	120	المجموع

1- حساب احتمال أن يكون رجلا يلبس ربطة عنق.

باستعمال الجدول السابق نجد: $P(C) = \frac{120}{250} = \frac{12}{25}$

2- حساب احتمال أن يكون رجلا يلبس ربطة عنق وقميص أبيض.

باستعمال الجدول السابق نجد: $P(B \cap C) = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$

3- حساب احتمال أن يكون رجلا يلبس ربطة عنق أو قميص أبيض.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{85}{250} + \frac{120}{250} - \frac{50}{250} = \frac{155}{250} = \frac{31}{50}$$

4- حساب احتمال أن يكون رجلا لا يلبس ربطة عنق ولا يلبس قميص أبيض.

$$P(\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{95}{250} = \frac{19}{50}$$

الجزء الثاني: تمارين البكالوريا

شعبة التسيير والاقتصاد

التمرين 36: دورة 2019 م 1

لحساب الاحتمالات المطلوبة
نشكل الجول التالي

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

1) حساب احتمال الحصول على رقمين زوجيين.

عدد الحالات الكلية هو 36. نسمي A حادث الحصول على رقمين زوجيين.
لدينا: $A = \{(2;2); (2;4); (2;6); (4;2); (4;6); (6;4); (6;6); (6;2); (4;4)\}$ وعددها 9.

وعليه احتمال الحادث A هو $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

2) حساب احتمال الحصول على رقمين جداء هما يساوي 6

نسمي B حادث الحصول على رقمين جداء هما يساوي 6

$B = \{(1;6); (2;3); (6;1); (3;2)\}$ وعددها 4 وعليه احتمال الحادث B هو $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

3) حساب احتمال الحصول على رقمين أحدهما ضعف للأخر.

نسمي C حادث الحصول على رقمين أحدهما ضعف للأخر

لدينا: $C = \{(1;2); (2;4); (3;6); (2;1); (4;2); (6;3)\}$ وعددها 6.

وعليه احتمال الحادث C هو $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

4) حساب احتمال الحصول على رقمين زوجيين أحدهما هو 2

نسمي D حادث الحصول على رقمين زوجيين أحدهما هو 2

لدينا: $D = \{(2;2); (2;4); (2;1); (4;2); (1;2)\}$ وعددها 5.

وعليه احتمال الحادث D هو $P(D) = \frac{5}{36}$

1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة: (E) $(4x^2 + 3x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

لدينا: (E) تكافئ (1) $(x^2 - 5x + 6) = 0$ أو (2) $(4x^2 + 3x - 1) = 0$

(1) $(x^2 - 5x + 6) = 0$ المميز $\Delta = 25$ ومنه $x_1 = 2$ أو $x_2 = 3$

(2) $(4x^2 + 3x - 1) = 0$ المميز $\Delta = 25$ ومنه $x_1 = -1$ أو $x_2 = \frac{1}{4}$

وعليه حلول المعادلة (E) هي $S = \left\{ 2; 3; -1; \frac{1}{4} \right\}$

2) تحديد قيمة العدد الحقيقي α .

لدينا: $p_4 = 2\alpha$ و $p_3 = \alpha$ ، $p_2 = \alpha^2$ ، $p_1 = 3\alpha^2$

نعلم أن: $\sum_{i=1}^6 P_i = 1$ ومنه $3\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + 2\alpha = 1$ وتكافئ $4\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0$

ومنه $\alpha = -1$ (مرفوض لأن الاحتمال موجب) أو $\alpha = \frac{1}{4}$ وهو المطلوب

3) حساب احتمال الأحداث التالية :

حساب احتمال الحادث A: "سحب كرية تحمل رقما فرديا"

احتمال A: "سحب كرية تحمل رقما فرديا" هو:

$$P(A) = 3\alpha^2 + \alpha = 3 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

حساب احتمال الحادث B: "سحب كرية تحمل الرقم 4"

احتمال B: "سحب كرية تحمل الرقم 4" هو :

$$P(B) = 2\alpha = \frac{1}{2}$$

حساب احتمال الحادث C: "سحب كرية تحمل رقما اصغر من او يساوي 3"

احتمال C: "سحب كرية تحمل رقما اصغر من او يساوي 3" هو :

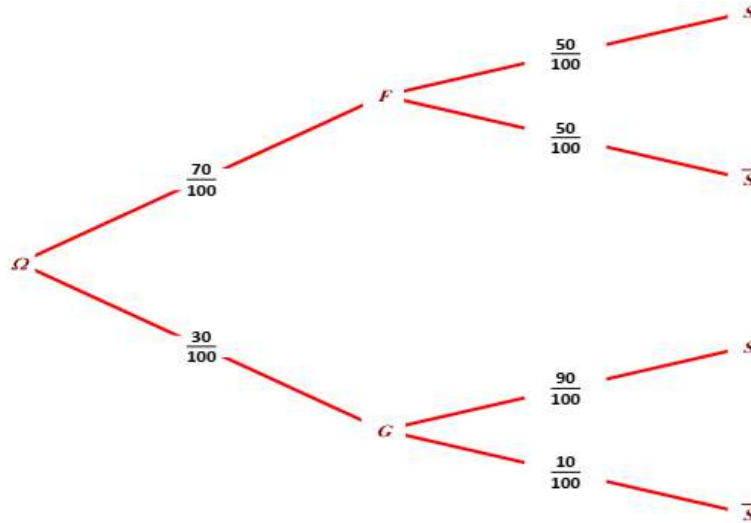
$$P(C) = p_1 + p_2 + p_3 = 4\alpha^2 + \alpha = \frac{1}{2}$$

حساب احتمال الحادث D: "سحب كرية تحمل رقما حاد للمعادلة (E)"

احتمال D: "سحب كرية تحمل رقما حاد للمعادلة (E)" هو:

$$P(D) = p_2 + p_3 = \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

1- انجاز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .



2- حساب الاحتمالات التالية: $P(S)$ ، $P(G \cap \bar{S})$ ، $P_S(F)$ و $P_S(G)$

* $P(S)$ هو احتمال ان يكون التلميذ من هذا القسم يمارس هذه الرياضة أي التلميذ المختار انشئ تمارس هذه الرياضة أو ذكر يمارس هذه الرياضة وعليه:

$$p(S) = p(F \cap S) + p(G \cap S) = \frac{70}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{100(35 + 27)}{10^4} = \frac{62}{10^2} = 0,62$$

* $P(G \cap \bar{S})$ هو احتمال ان يكون التلميذ من هذا القسم ذكر ويمارس هذه الرياضة

$$P(G \cap \bar{S}) = P(G) \times P_G(\bar{S}) = \frac{30}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{3}{100} = 0,03 \text{ وعليه}$$

* $P_{\bar{S}}(F)$ هو احتمال ان يكون التلميذ من هذا القسم انشئ علما ان لا تمارس هذه الرياضة

$$P_{\bar{S}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(F \cap \bar{S})}{1 - P(S)} = \frac{\frac{70}{100} \times \frac{50}{100}}{1 - \frac{6200}{10^4}} = \frac{3500}{3800} = 0,92 \text{ وعليه}$$

* $P_S(G)$ هو احتمال ان يكون التلميذ من هذا القسم ذكرا علما انه تمارس هذه الرياضة

$$P_S(G) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{30 \times 90}{6200} = \frac{27}{62} = 0,44 \text{ وعليه}$$

3- استقلالية الحدثين G و $\bar{S}$

الحادثان G و $\bar{S}$ غير مستقلين لأن: $P(G \cap \bar{S}) \neq P(G) \times P(\bar{S})$

لأن: $P(G \cap \bar{S}) = 0,03$ و $P(G) \times P(\bar{S}) = 0,3 \times 0,01 = 0,003$

التمرين 39: دورة 2018 م 2 بتصرف

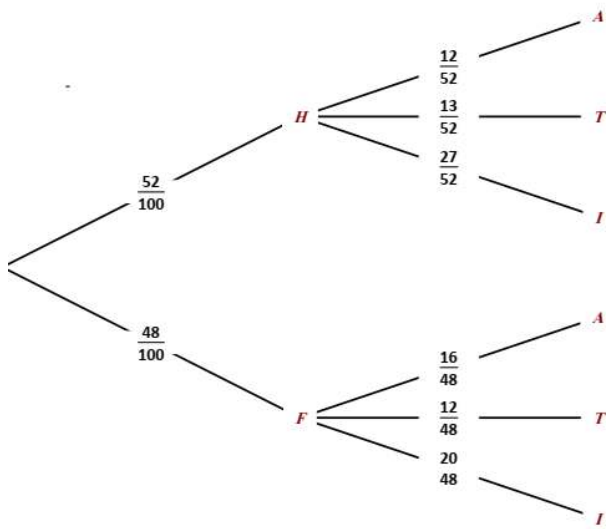
1-أ) تبين أن احتمال أن يكون الموظف رجلا هو: $P(H) = 0,52$

	الاداريون A	المهندسون I	العمال T	المجموع
رجال	12 %	13 %	27 %	52 %
نساء	16 %	12 %	20 %	48 %
المجموع	28 %	25 %	47 %	100 %

$$P(H) = \frac{12 + 13 + 27}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

احتمال أن يكون الموظف رجلا هو: $P(H) = 0,52$

انجاز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .
حساب $P(H \cap T)$ و $P(F \cap I)$.



$P(H \cap T)$ هو احتمال أن يكون الموظف المختار رجلا وعاملا أي:

$$P(H \cap T) = P(H) \times P_H(T) = \frac{52}{100} \times \frac{27}{52} = \frac{27}{100}$$

$P(F \cap I)$ هو احتمال أن يكون الموظف المختار امرأة ومهندسة أي:

$$P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = \frac{48}{100} \times \frac{12}{48} = \frac{12}{100}$$

3- حساب احتمال أن يكون الموظف مهندسا.

احتمال أن يكون الموظف مهندسا هو أن يكون رجلا مهندسا أو امرأة مهندسة

$$P(I) = P(H \cap I) + P(F \cap I) = P(H) \times P_H(I) + P(F) \times P_F(I) = \frac{13}{100} + \frac{12}{100} = \frac{25}{100} = 0,25$$

4- حساب احتمال أن يكون الموظف رجلا علما أنه إداري.

$$P_H(A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)}$$

احتمال أن يكون الموظف رجلا علما أنه إداري هو الإحتمال الشرطي

$$P(H \cap A) = P(H) \times P_H(A) = \frac{52}{100} \times \frac{3}{13} = 0,12$$

حيث: $0,12 = \frac{3}{25}$

$$P(A) = P(H \cap A) + P(F \cap A) = P(H) \times P_H(A) + P(F) \times P_F(A) = \frac{12}{100} + \frac{16}{100} = \frac{28}{100} = 0,28$$

$$P_H(A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

ومنه: $\frac{3}{7}$

التمرين 40: دورة 2017 م 2

تعيين الإقتراح الصحيح مع التبرير :

(1) A و B حادثتان مستقلتان ، معناه : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

أي : $p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,03}{0,4} = 0,075$ ، إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (ب) .

(2) A و B حادثتان ، $p(A \cap B) = \frac{3}{100}$ و $p_A(B) = \frac{1}{4}$. لدينا : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

ومنه : $p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p_A(B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{1}{4}} = \frac{3 \times 4}{100} = \frac{3}{25}$. إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (أ) .

(3) A و B حادثتان : $p(A) = 0,4$ و $p(B) = 0,5$ ، $p(A \cup B) = 0,55$.

لدينا : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ، نعلم أن : $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,55 = 0,45$.

أي : $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,45 = 0,45$. ومنه : $p(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,45 = 0,45$.

إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (ب) .

(4) لدينا من الجدول : $0,12 + 0,50 + \beta + 0,30 = 1$ أي : $\beta = 1 - 0,12 - 0,50 - 0,30 = 0,08$.

لدينا أيضا : $0,32 + 0,74 - 0,9 = 0,08$ ، ومنه : $\alpha = \frac{0,32 + 0,74 - 0,9}{0,08} = 2$ ، $(-2)0,12 + (-1)0,50 + (\alpha)0,08 + (3)0,3 = 0,32$.

إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (ج) .

التمرين 41: دورة 2017 م 1

(1) شجرة الاحتمالات التي تنمذج الوضعية :

أنظر الشكل الشجرة أدناه

(2) حساب احتمال الحوادث :

(أ) حادثة المترشح أنثى و من شعبة التسيير و الإقتصاد

$$p(A) = p(F \cap G) = 0,53 \times 0,10 = 0,053$$

(ب) حادثة المترشح من شعبة التسيير و الإقتصاد :

$$p(B) = p(M \cap G) + p(F \cap G)$$

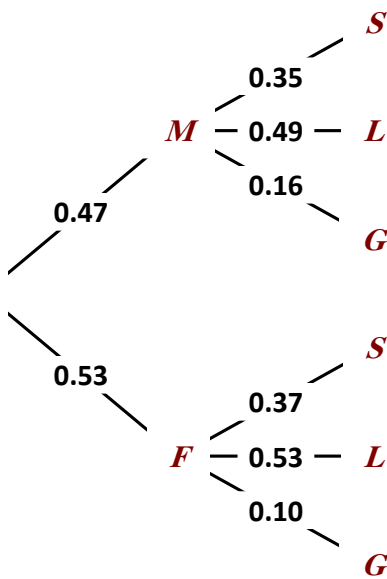
$$p(B) = p(G) = 0,0752 + 0,053 = 0,1282$$

$$p(M \cap G) = 0,47 \times 0,16 = 0,0752$$

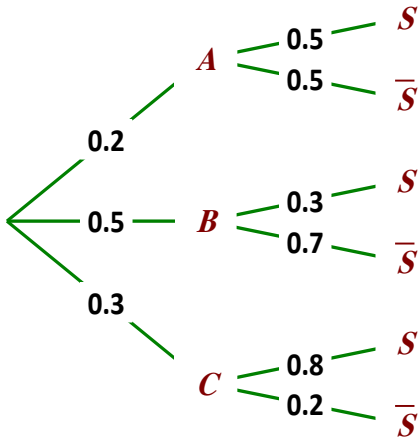
(ج) حادثة المترشح أنثى علما أنه من شعبة التسيير :

$$p(C) = \frac{0,053}{0,1282} = 0,4134$$

$$p(C) = p_G(F) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)}$$



التمرين 42: دورة 2016 م 2



- 1) إكمال شجرة الاحتمالات : أنظر الشكل المقابل .
- 2) أ) حساب احتمال الحوادث التالية :

$$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,2 \times 0,5 = 0,10$$

$$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$$

$$p(C \cap S) = p(C) \times p_C(S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$$

ب) إستنتاج أن يكون الزبون معجب بالوجهة المختارة

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$$

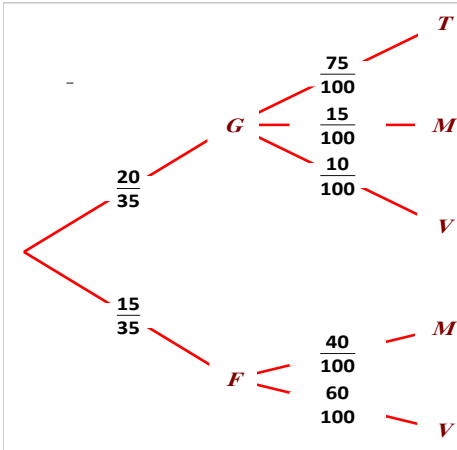
$$p(S) = 0,10 + 0,15 + 0,24 = 0,49$$

3) حساب الإحتمال الشرطي : $p_{\bar{S}}(B)$

$$P_{\bar{S}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(B \cap \bar{S})}{1 - P(S)} = \frac{0,5 \times 0,7}{1 - 0,49} = 0,686$$

$$p(B \cap \bar{S}) = p(B) \times p_B(\bar{S}) = 0,5 \times 0,7 = 0,35 \text{ و } p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 1 - 0,49 = 0,51$$

التمرين 43: دورة 2012 م 1 بتصرف



1) إنجاز شجرة الاحتمالات :

أنظر الشكل الموالي :

2) حساب $p(V)$ احتمال أن تتحقق الحادثة V :

$$p(V) = p(G \cap V) + p(F \cap V)$$

$$p(V) = \frac{11}{35} \text{ ومنه } p(V) = \frac{2}{35} + \frac{9}{35} = \frac{11}{35}$$

3) حساب الإحتمال الشرطي : $p_V(G)$

$$p_V(G) = \frac{2}{11} \text{ ومنه } p_V(G) = \frac{35}{11} = \frac{2}{11} \text{ أي } p_V(G) = \frac{p(G \cap V)}{p(V)}$$

4) حساب احتمال أن يكون التلميذ لا يمارس كرة القدم :

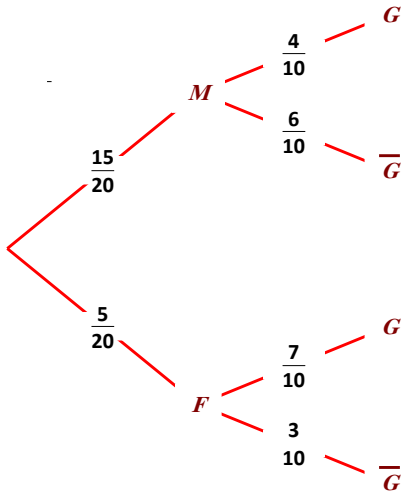
أي نحسب احتمال الحادثة العكسية لحادثة التلميذ يمارس كرة القدم ، وذلك بحساب $p(\bar{T})$:

$$p(\bar{T}) = 1 - p(T) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

ومنه احتمال حادثة التلميذ لا يمارس كرة القدم هو : $\frac{4}{7}$.

ننوه أنه لا يوجد من البنات من تمارس كرة القدم .

التمرين 44: دورة 2013 م1



تعيين الجواب الصحيح مع التبرير :
(نقوم بنمذجة الوضعية بشجرة الاحتمالات لتسهيل الحل)
1) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاص بالرياضيات :

من شجرة الاحتمالات : $p(M) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (أ) .

2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاص بشعبة التسيير :

$$p(G) = p(M \cap G) + p(F \cap G) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{7}{10}\right)$$

أي : $p(G) = \frac{12}{40} + \frac{7}{40} = \frac{19}{40} = 0,475$. إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (ب) .

3) احتمال أن يكون الكتاب رياضيات خاص بشعبة التسيير :

$$p(M \cap G) = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ أي } , p(M \cap G) = p(M) \times p(G) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{10}$$

إذن الإجابة الصحيحة هي : الإجابة (ج) .

4) الاحتمال الشرطي $p_G(M)$:

$$p_G(M) = \frac{p(M \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}$$

التمرين 45: دورة 2008

1-أ) حساب احتمال الحصول على كرة واحدة تحمل الرقم 1

نسمي A الحادثة: "الحصول على كرة تحمل الرقم 1" ومنه: $P(A) = \frac{C_3^1}{C_7^1} = \frac{3}{7}$

ب) حساب احتمال الحصول على كرة لونها أحمر وتحمل الرقم 1

نسمي B الحادثة: "الحصول على كرة لونها أحمر"

ونسمي $A \cap B$ الحادثة: "الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1"

عدد الكرات الحمراء التي تحمل الرقم 1 هو 2 ومنه $P(A \cap B) = \frac{C_2^1}{C_7^1} = \frac{2}{7}$

ومنه الاحتمال المطلوب هو : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$

2-أ) حساب احتمال الحصول كرتين تحمل كل منهما رقما فرديا

نسمي C الحادثة: "الحصول على كرتين تحمل كل منهما رقما فرديا"

عدد الكرات الفردية هو 3 و عدد الكرات الإجمالي هو 7
 ومنه: عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين تحمل كل منهما رقما فرديا هو $A_3^2 = 6$
 ومنه: عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين هو $A_7^2 = 42$
 وعليه الاحتمال المطلوب هو: $P(C) = \frac{A_3^2}{A_7^2} = \frac{1}{7}$

(ب) حساب احتمال الحصول كرتين من نفس اللون.

نسمي D الحادثة: "الحصول على كرتين نفس اللون"
 ومنه: عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين من نفس اللون هو $A_3^2 + A_4^2 = 6 + 12 = 18$
 وعليه الإحتمال المطلوب هو: $P(D) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_7^2} = \frac{3}{7}$

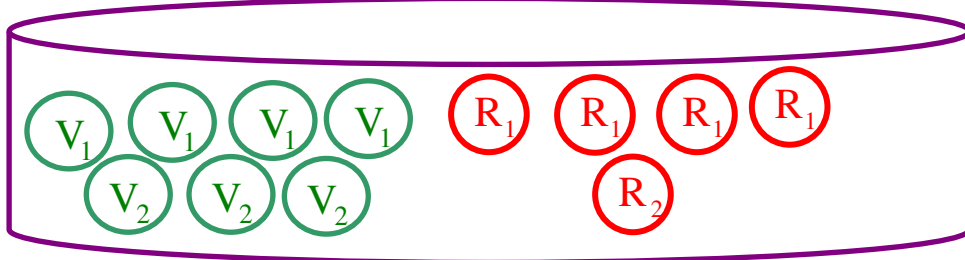
(ج) حساب احتمال الحصول كرتين مجموع رقميهما الظاهرين 3

نسمي E الحادثة: "الحصول على كرتين مجموع رقميهما الظاهرين 3"
 ومنه: عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين مجموع الرقمين الظاهرين 3 هو $A_3^1 \times A_3^1 = 9$
 وعليه الإحتمال المطلوب هو: $P(E) = \frac{A_3^1 \times A_3^1}{A_7^2} = \frac{3}{14}$

شعبة: علوم تجريبية

التمرين 46: دورة 2019 م1

محتوى الكيس



1) إثبات أن احتمال الحادث A هو: $P(A) = \frac{31}{66}$ وحساب الحادث B

الحادث A هو سحب كرتين من نفس اللون من بين 12 كرة في أن واحد

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من بين 12 كرة هو: $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(10)!} = 66$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين حمراوين أو سحب كرتين

خضراوين هو: $C_5^2 + C_7^2 = \frac{5!}{2!(3)!} + \frac{7!}{2!(5)!} = 10 + 21 = 31$

وعليه احتمال الحادث A هو: $P(A) = \frac{31}{66}$

الحادث B هو سحب كرتين تحملان نفس الرقم من بين 12 كرة في أن واحد

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين من نفس الرقم أي سحب كرتين من بين 8 كرات تحمل الرقم 1 أو سحب كرتين من بين 4 كرات تحمل الرقم 2 هو:

$P(B) = \frac{34}{66}$ وعليه احتمال الحادث A هو: $C_8^2 + C_4^2 = \frac{8!}{2!(6)!} + \frac{4!}{2!(2)!} = 28 + 6 = 34$

2) حساب احتمال الحادث سحب كرتين تحملان نفس الرقم علما انهما من نفس اللون

احتمال حادث سحب كرتين تحملان نفس الرقم علما انهما من نفس اللون هو الاحتمال

الشرطي التالي: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

الحادث $A \cap B$ هو سحب كرتين من نفس اللون ومن نفس الرقم أي سحب كرتين حمراوين

وتحملان الرقم 1 أو كرتين خضراوين تحملان الرقم 1 أو كرتين خضراوين تحملان الرقم 2

عدد الحالات الملائمة هو: $P_A(B) = \frac{15}{66}$ وعليه $C_4^2 + C_4^2 + C_3^2 = \frac{4!}{2!(2)!} + \frac{4!}{2!(2)!} + \frac{3!}{2!(1)!} = 15$

3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X حساب أمله الرياضي $E(X)$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس بعد سحب كرتين من الكيس في أن واحد.

عدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق هو: 3 عند سحب كرتين حمراوين أو 4 عند سحب كرة حمراء واحدة فقط أو 5 عند عدم سحب كرة حمراء

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = \{3; 4; 5\}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والملخص في الجدول التالي:

x_i	3	4	5	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$	1

حيث: إحتمال سحب كرتين حمراوين هو: $P(X = 3) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66}$

إحتمال سحب كرة حمراء واحدة فقط هو: $P(X = 4) = \frac{C_5^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{35}{66}$

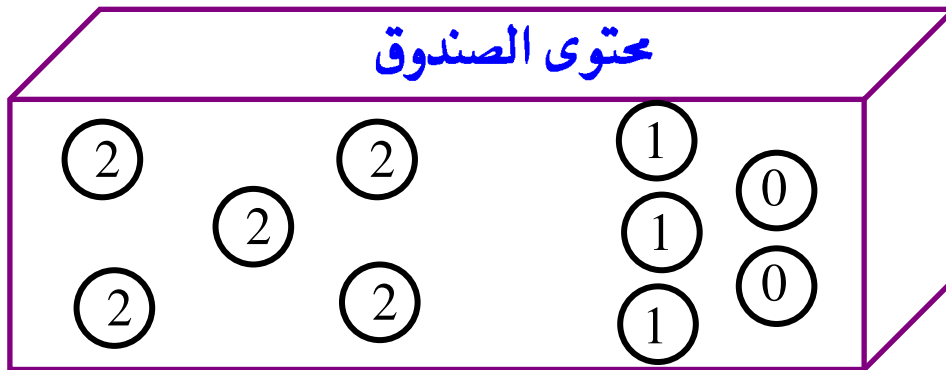
إحتمال عدم سحب كرة حمراء هو: $P(X = 5) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{21}{66}$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $E(X) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot P_i$

$$E(X) = \sum_{i=0}^2 x_i \cdot P_i = \frac{3 \times 10 + 4 \times 35 + 5 \times 21}{66} = \frac{275}{66}$$

التمرين 47: دورة 2019 م 2



1) تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب: جداء الأرقام المسجلة على الكرات المسحوبة

جاء الأرقام المسجلة على الكرات هو: 0، 1، 2، 4، 8

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = \{0; 1; 2; 4; 8\}$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ الموضح كما يلي:

* احتمال سحب ثلاث كرات جاء أرقامها 0 .

أي: سحب كرتين رقميهما 0 واخرى لا يساوي 0 أو كرة تحمل الرقم 0 وكرتين لا تحملان الرقم 0

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2 \times C_8^1 + C_2^1 \times C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{8 + 56}{120} = \frac{64}{120}$$

* احتمال سحب ثلاث كرات جاء أرقامها 1 .

$$P(X = 1) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

* احتمال سحب ثلاث كرات جاء أرقامها 2 .

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{15}{120}$$

* احتمال سحب ثلاث كرات جاء أرقامها 4 .

$$P(X = 4) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$$

* احتمال سحب ثلاث كرات جاء أرقامها 8 .

$$P(X = 8) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

ونلخص النتائج السابقة في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	4	8	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$	1

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=4} x_i \cdot P_i$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=4} x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 64 + 1 \times 1 + 2 \times 15 + 4 \times 30 + 8 \times 10}{120} = \frac{231}{120} = \frac{77}{40}$$

(2) تبين ان احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$

عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا هو: 7 كريتين تحملان الرقم 0 و 5 كريات تحمل

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! 4!} = 35$$

$$\frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

(3) حساب احتمال سحب كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي السحب في هذه الحالة : على التوالي ودون ارجاع

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{10-2!} = 90$$

نسمي B حادث سحب كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي

ونسمي C حادث سحب كرتين تحملان رقمين جداءهما زوجي

احتمال سحب كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي هو $P_c(B)$

$$P_c(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

حيث: $P(B \cap C)$ احتمال حادث سحب كرتين مجموع رقميهما فردي وجداءهما زوجي

الحادث $B \cap C$ معناه سحب كرية رقما 0 والاخرى رقما 1 أو رقما 2 والاخرى رقما 1

$$P(B \cap C) = \frac{(A_2^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1)2}{A_{10}^2} = \frac{(2 \times 3 + 3 \times 5)2}{90} = \frac{42}{90}$$

الحادث C معناه سحب كرتين رقميهما زوجيين أو احدهما رقما زوجي والاخرى فردي

$$P_c(B) = \frac{42}{90} \cdot \frac{90}{84} = \frac{1}{2} \text{ وعليه } P(C) = \frac{A_7^2 + A_3^1 \times A_7^1 \times 2}{A_{10}^2} = \frac{42 + 42}{90} = \frac{84}{90}$$

التمرين 48: دورة 2018

1-أ) حساب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها اربع كريات بيضاء مرقمة ب: 1، 2، 2، 3،

ثلاث كريات مرقمة حمراء مرقمة ب: 2، 2، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة ب: 2، 3، 3

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! 7!} = 120$$

$$C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 \times 3 = 36$$

$$P(A) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

عدد الحالات الملائمة للحدث B هو : $C_4^3 + C_5^3 = 4 + 10 = 14$

$$P(B) = \frac{14}{120} = \frac{7}{60} \text{ : ومنه احتمال الحدث B هو:}$$

(ب) بيّن أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ، ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

الحدث $A \cap B$ هو الحصول ثلاث كرات تحمل ألوان العلم الوطني وتحمل نفس الرقم سحب كرة بيضاء تحمل الرقم 3 وكرة حمراء تحمل الرقم 3 وكرة خضراء تحمل الرقم 3 أو كرة بيضاء تحمل الرقم 2 وكرة حمراء تحمل الرقم 2 وكرة خضراء تحمل الرقم 2

ومن عدد الحالات الملائمة لهذا الحدث هو : $C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 2 + 4 = 6$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} \text{ : ومنه احتمال الحدث B هو:}$$

$$P_A(B) = \frac{6}{120} \times \frac{120}{36} = \frac{1}{6} \text{ ومنه } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نعلم أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{ومن: } P(A \cup B) = \frac{36}{120} + \frac{14}{120} - \frac{6}{120} = \frac{36+14-6}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

2) تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

ملاحظة: توجد 5 كرات تحمل رقما فرديا و 5 كرات تحمل رقما زوجيا المتغير العشوائي X يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = \{0; 1; 2; 3\}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ الموضح كما يلي:

* احتمال سحب ثلاث كرات كلها زوجية لا توجد أية كرة تحمل رقما فرديا

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 \times C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

* احتمال سحب ثلاث كرات واحدة تحمل رقم فردي وكرتان تحمل رقم زوجي .

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120}$$

* احتمال سحب ثلاث كرات واحدة تحمل رقم زوجي وكرتان تحمل رقم فردي

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{50}{120}$$

*إحتمال سحب ثلاث كرات تحمل رقما فرديا

$$P(X = 3) = \frac{C_5^0 \times C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

ومنه احتمال هذه الحادثة هو:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{10}{120}$	1

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i \cdot P_i \text{ : الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 10 + 1 \times 50 + 2 \times 50 + 3 \times 10}{120} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2} \text{ : ومنه}$$

التمرين 49: دورة 2008 ع تجريبية نموذج وزارتي

1-أ) حساب احتمالات الحوادث التالية: A، B و C

*الحادثة A هي: "يسحب اللاعب كرية بيضاء واحدة فقط" أي سحب كرية واحدة بيضاء من بين 5 كريات بيضاء و كريتين سوداوين من بين 7 كريات خضراء

$$\text{ومنه عدد الحالات الملائمة هو: } C_5^1 \times C_7^2 = 5 \times 21 = 105$$

$$P(A) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44} \text{ : ومنه } C_{12}^3 = 220 \text{ وعدد الحالات الكلية هو}$$

*الحادثة B هي: "يسحب اللاعب كريتين بيضاوين فقط" أي سحب كريتين بيضاوين من بين 5 كريات بيضاء و كرية واحدة سوداء من بين 7 كريات خضراء

$$\text{ومنه عدد الحالات الملائمة هو } C_5^2 \times C_7^1 = 10 \times 7 = 70$$

$$P(B) = \frac{70}{220} = \frac{7}{22} \text{ : ومنه } C_{12}^3 = 220 \text{ وعدد الحالات الكلية هو}$$

*الحادثة C هي: "يسحب اللاعب 3 كريات بيضاء" أي سحب ثلاث كريات بيضاء من بين 5 كريات بيضاء . ومنه عدد الحالات الملائمة هو $C_5^3 = 10$

$$\text{ومنه عدد الحالات الكلية هو } C_{12}^3 = 220 \text{ ومنه } P(C) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

ب) تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرق بكل سحب، مجموع الربح المحصل .

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = 0; 10; 20; 30$
قانون الاحتمال للمتغير العشوائي ملخص في الجدول التالي:

x_i	0	10	20	30
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{220}$	$\frac{105}{220}$	$\frac{70}{220}$	$\frac{10}{220}$

حيث: * احتمال عدم الحصول على أية كرية بيضاء هو: $P(X = 0) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{35}{220}$

* احتمال الحصول على كرية واحدة فقط بيضاء هو: $P(X = 10) = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{105}{220}$

* احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو: $P(X = 20) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{70}{220}$

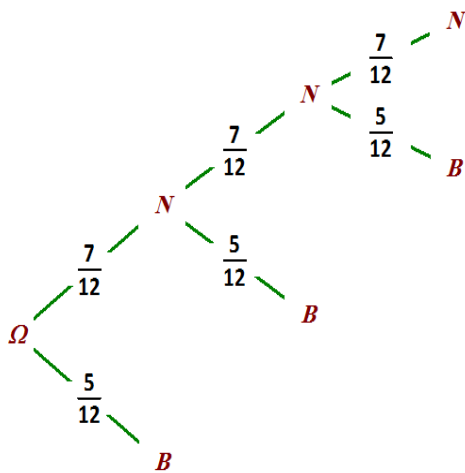
* احتمال الحصول على ثلاث كريات بيضاء هو: $P(X = 30) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{10}{220}$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 35 + 10 \times 105 + 20 \times 70 + 30 \times 10}{220} = \frac{2750}{220} = \frac{275}{22} = 12,5$$

2) حساب احتمالات الحوادث التالية:



لحساب احتمالات الحوادث D ، E ، F و G
نشكل شجرة الاحتمالات التالية.

D : "يربح اللاعب في السحب الأول".

من خلال الشجرة المقابلة نجد $P(D) = \frac{5}{12}$

E : "يربح اللاعب في السحب الثاني".

من خلال الشجرة المقابلة نجد $P(E) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

F : "يربح اللاعب في السحب الثالث".

من خلال الشجرة المقابلة نجد $P(F) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{245}{1728}$

G : "لا يربح اللاعب أي شيء". $P(G) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12}$

للإجابة على الأسئلة يمكن تشكيل الشجرة التالية

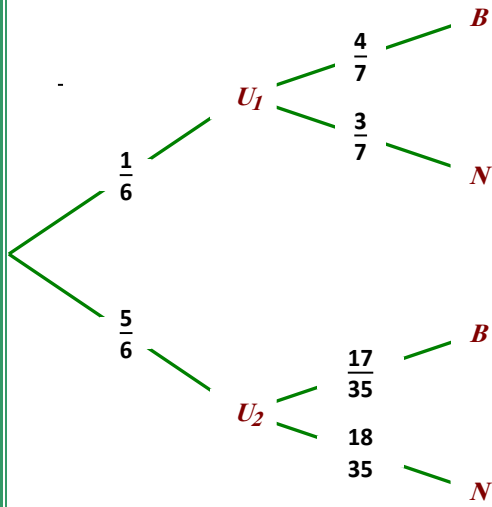
1. البرهان أن احتمال سحب قريضة بيضاء هو 0,5.

إحتمال سحب كرة بيضاء:

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{6} \times \frac{17}{35} = \frac{4}{42} + \frac{17}{42} = 0.5$$

2. احتمال سحب كرة من الكيس U_1 علما أنها بيضاء:

$$P_B(U_1) = \frac{P(B \cap U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{21} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{21}$$



يحتوي كيس على ثلاث كرات بيضاء تحمل الارقام 1، 2، و3 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1 و2 . نسحب من الكيس ثلاث كرات في أن واحد.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة.

تعيين الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المقترحة مع التبرير

1) تعيين قيم المتغير العشوائي

الإجابة ج صحيحة: التبرير

عدد الكرات السوداء هو 2 وعليه قيم المتغير العشوائي هي: 0 أو 1 أو 2 أي $X = \{0; 1; 2\}$
الإجابة ج صحيحة

2) تعيين قيمة الامل الرياضي

الإجابة ب صحيحة: التبرير

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والمملخص في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

حيث: إحتمال عدم سحب اية كرة سوداء هو: $P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$

إحتمال سحب كرة سوداء واحدة فقط هو: $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10}$

إحتمال سحب كرتين سوداوين هو: $P(X = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: $E(X) = \sum_{i=0}^{i=2} x_i \cdot P_i$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=2} x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 1 + 1 \times 6 + 2 \times 3}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

3) حساب احتمال سحب كرة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة

الإجابة ج صحيحة: التبرير

نسمي A حادث سحب سوداء ونسمي B حادث سحب تحمل الرقم 1

احتمال حادث سحب سوداء وتحمل الرقم 1 هو $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = \frac{C_1^1 \cdot C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

توجد كرة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 وعليه:

4) حساب احتمال سحب كرة تحمل باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الأرقام المسحوبة على 13 هو 1.

الإجابة أ صحيحة: التبرير

نسمي C حادث سحب كرة تحمل باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الأرقام المسحوبة على 13 هو 1.

لدينا مجموع مربعات الأرقام المسحوبة هو: $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ وباقي قسمة 14 على 13 هو 1

وعليه عدد الحالات الملائمة هو: $C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 4$

$$P(C) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ومنه الإحتمال المطلوب هو $\frac{2}{5}$

التمرين 52: دورة 2019 ت ر م 2

1) حساب احتمال الحوادث التالية:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$$

عدد الحالات الممكنة هي: 84

أ) حساب احتمال الحادثة A: "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

$$C_4^1 \times C_5^2 = 4 \times 10 = 40$$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هي: 40

$$P(A) = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

ومنه احتمال الحادث A هو: $\frac{10}{21}$

ب) حساب احتمال الحادثة B: "الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر".

$$C_4^2 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^2 + C_5^3 = 30 + 40 + 10 = 80$$

عدد الحالات الملائمة للحدث B هي: 80

$$P(B) = \frac{80}{84} = \frac{20}{21}$$

ومنه احتمال الحادث B هو: $\frac{20}{21}$

ج) حساب احتمال الحادثة C: "الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية".

الأعداد غير الأولية هي:

$$C_4^3 = 4$$

1 و 4 وعددها 4 أرقام وبالتالي: عدد الحالات الملائمة للحدث C هي: 4

$$P(C) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

ومنه احتمال الحادث C هو: $\frac{1}{21}$

2- أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X، ثم تعريف قانون احتماله.

المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

ومنه قيم المتغير العشوائي هو: $X = \{0;1;2;3\}$
 قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$
 بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ الموضح كما يلي:

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 \times C_4^3}{84} = \frac{4}{84} \text{ احتمال سحب ثلاث كرات لا تحمل رقما أوليا هو:}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_4^2}{84} = \frac{30}{84} \text{ احتمال سحب واحدة فقط تحمل رقما أوليا هو:}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{84} = \frac{40}{84} \text{ احتمال سحب كرتين تحملان رقمين أوليين ورقم غير أولي هو:}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^0 \times C_5^3}{84} = \frac{10}{84} \text{ احتمال سحب ثلاث كرات تحمل رقما أوليا هو:}$$

ونلخص النتائج السابقة في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$	1

(ب) حساب $P(X^2 - X \leq 0)$.

$$P(X^2 - X \leq 0) \text{ معناه } P(0 \leq X \leq 1) \text{ أي } P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$\text{ومنه: } P(X^2 - X \leq 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{10 + 30}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

التمرين 53: دورة 2018 ت ر

(I) أ) احسب احتمال الحادثة A: "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

عدد الحالات الكلية لسحب كرتين في آن واحد من بين 7 كرات هو: $C_7^2 = 21$

عدد الحالات الملائمة: "سحب كرتين مختلفتين في اللون" هو $C_4^1 \times C_3^1 = 12$

$$\text{ومنه احتمال الحادث A هو: } P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

أ) احسب احتمال الحادثة B: "سحب كرتين من نفس اللون".

عدد الحالات الملائمة: "سحب كرتين مختلفتين في اللون" هو $C_4^2 + C_3^2 = 6 + 3 = 9$

$$\text{ومنه احتمال الحادث A هو: } P(B) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

III-1) تبرير أن قيم المتغير العشوائي هي: $\{-\alpha; 50 - \alpha; 100 - \alpha\}$ ثم تعريف قانون احتماله

دفع اللاعب $\alpha(DA)$ وسحب كرتين بيضاوين وتحصل على 100DA ومعناه $X = 100 - \alpha$

دفع اللاعب $\alpha(DA)$ وسحب كرتين خضراوين ويخسر ما دفعه ومعناه $X = -\alpha$

دفع اللاعب $\alpha(DA)$ وسحب كرتين مختلفتين في اللون وتحصل على 50DA ومعناه $X = 50 - \alpha$

مجلة الرائد: المتاليات العددية: 2019-2020 45 إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

2) تبين أن لأمل الرياضي للمتغير العشوائي بدلالة هو: $E(x) = -\alpha + \frac{300}{7}$

لحساب الأمل الرياضي نحسب احتمال حوادث قيم المتغير العشوائي X

$$P(X = 100 - \alpha) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

احتمال سحب كرتين بيضاوين هو:

$$P(X = -\alpha) = \frac{C_4^2}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

احتمال سحب كرتين خضراوين هو:

$$P(X = 50 - \alpha) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون هو:

ونلخص النتائج السابقة في الجدول التالي:

x_i	$100 - \alpha$	$-\alpha$	$50 - \alpha$	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i \cdot P_i$$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i \cdot P_i = \frac{(100 - \alpha) \times 1 + (-\alpha) \times 2 + (50 - \alpha) \times 4}{7} = \frac{300}{7} - \alpha$$

ومنه:

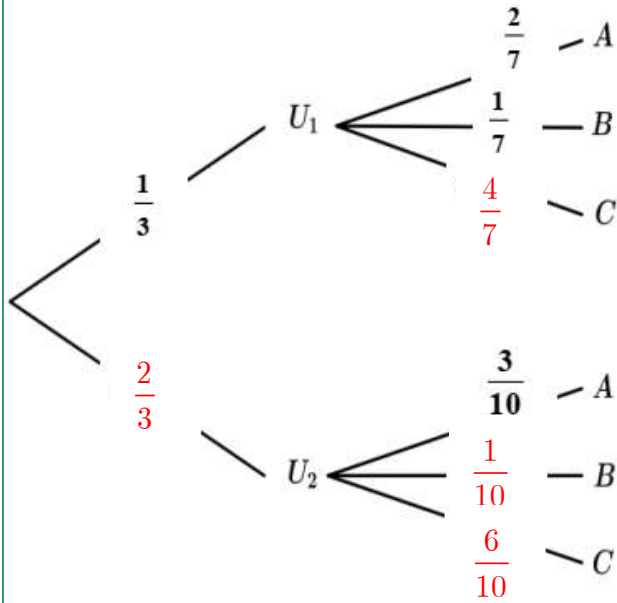
إيجاد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب

$$E(X) > 0 \text{ ومعناه } \frac{300}{7} - \alpha > 0 \text{ ومعناه } \alpha < \frac{300}{7} \text{ أي } \alpha < 42,85$$

ومنه أكبر قيمة للعدد α هي 42

شعبة: رياضيات

التمرين 55: دورة 2019 ر



1) نقل وتكملة شجرة الاحتمالات.

لتكملة الشجرة ينبغي علينا حساب كلا من:

$$P_{U_2}(B) \text{ و } P_{U_2}(C), P_{U_1}(C), P(U_2)$$

$$P_{U_1}(C) = 1 - [P_{U_1}(A) + P_{U_1}(B)] = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{2}{3}$$

$$P_{U_2}(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P_{U_2}(C) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

2) حساب احتمالات الاحداث A، B و C.

باستعمال الشجرة السابقة نجد:

$$P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A) = P(U_1) \cdot P_{U_1}(A) + P(U_2) \cdot P_{U_2}(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{2}{21} + \frac{1}{5} = \frac{31}{105} \text{ ومنه:}$$

$$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) = P(U_1) \cdot P_{U_1}(B) + P(U_2) \cdot P_{U_2}(B)$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{21} + \frac{1}{15} = \frac{12}{105} \text{ ومنه:}$$

$$P(C) = P(U_1 \cap C) + P(U_2 \cap C) = P(U_1) \cdot P_{U_1}(C) + P(U_2) \cdot P_{U_2}(C)$$

$$P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{4}{21} + \frac{2}{5} = \frac{62}{105}$$

3- أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = 0; 1; 2$

ب) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

عدد الكرات الحمراء الاجمالي هو: 7 وعدد الكرات غير الحمراء الاجمالي هو 5

ولدينا الصندوق $U_1 = \{4R + 3N\}$ و الصندوق $U_2 = \{3R + 2N\}$

$$P(X = 0) = P(B) = \frac{12}{105} \text{ عدم سحب أية كرة حمراء من الصندوقين}$$

$$P(X = 2) = P(A) = \frac{31}{105} \text{ سحب كرتين حمراوين}$$

$$P(X = 1) = P(C) = \frac{62}{105} \text{ سحب كرة حمراء واحدة فقط من الصندوقين حمراء واحدة فقط}$$

x_i	0	1	2	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$	1

نلخص النتائج السابقة في الجول التالي

(4) حساب الأمل الرياضي $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i \text{ :العلاقة بمعرف العشوائي معرف بالعلاقة}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=2} x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 12 + 1 \times 62 + 2 \times 31}{105} = \frac{124}{105}$$

التمرين 56: دورة 2018 ر

1) حساب احتمال الحوادث التالية:

حساب احتمال الحادثة A "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي $U = \{5R + 3V + 1B\}$

عدد الحالات الكلية لسحب 4 كريات في آن واحد من بين 9 كريات هو: $C_9^4 = 126$

عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $C_5^4 = 5$ ومن احتمال الحادث هو: $P(A) = \frac{5}{126}$

حساب احتمال الحادثة B "الحصول على كرة بيضاء على الأكثر".

عدد الحالات الملائمة للحدث B هو: $C_1^1 \times C_8^3 + C_1^0 \times C_8^4 = C_9^4 = 126$

ومن احتمال الحادث هو: $P(B) = \frac{126}{126} = 1$ حادث أكيد

حساب احتمال الحادثة C "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

لدينا: كرتين تحملان الرقم 1، 4 كرات تحمل الرقم 2، كرة واحدة تحمل الرقم 3

كرة واحدة تحمل الرقم 3- و كرة واحدة تحمل الرقم 1-

ولدينا: $0 = -1 - 3 + 2 + 2$ أو $0 = -3 + 3 - 1 + 1$

ومن عدد الحالات الملائمة للحدث C هو: $C_1^1 \times C_1^1 \times C_4^2 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 = 8$

ومن احتمال الحادث هو: $P(C) = \frac{8}{126} = \frac{4}{63}$

2- أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X، ثم تعريف قانون احتماله.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = 0;1;2;3$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والمملخص في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{15}{126}$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3 \times C_6^1}{126} = \frac{6}{126}$$

احتمال سحب 3 كرات خضراء

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2 \times C_6^2}{126} = \frac{45}{126}$$

احتمال سحب كرتين خضراوين.

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 \times C_6^3}{126} = \frac{60}{126}$$

احتمال سحب كرة واحدة خضراء

$$P(X = 3) = \frac{C_3^0 \times C_6^4}{126} = \frac{15}{126}$$

احتمال عدم سحب أية كرة خضراء

ب) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i$$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة:

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 6 + 1 \times 45 + 2 \times 60 + 3 \times 15}{126} = \frac{210}{126} = \frac{5}{3}$$

ج) حساب احتمال الحادثة " $X^2 - X > 0$ ".

$X^2 - X > 0$ تكافئ $X(X-1) > 0$ وتكافئ $X < 0$ أو $X > 1$ ومعناه $X \in \{2;3\}$

$$P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{60 + 15}{126} = \frac{75}{126} = \frac{25}{42}$$

ومنه احتمال الحادثة $X^2 - X > 0$ هي $\frac{25}{42}$

التمرين 57: دورة 2009 ر

1أ- حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء $U = \{6R + 4B\}$
 عدد الحالات الكلية لسحب 3 كريات في آن واحد من بين 10 كريات هو: $C_{10}^3 = 120$
 عدد الحالات للحدث A للحصول على 3 كريات بيضاء هو: $C_4^3 = 4$

$$P(A) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

ومن احتمال الحادث هو:

ب- حساب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

الحادث B للحصول على الأقل على كرية حمراء هو الحادث العكسي للحادث A

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

ومنه احتمال الحادث B هو:

2- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضي E(X).

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة. عند القيام بالسحب ، إما أن نحصل على 3 كرات بيضاء ، أو كرتين بيضاوين ، أو كرة بيضاء ، أو لا نحصل على أية كرة بيضاء . ومنه قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(x_i)$ والمملخص في الجدول المقابل :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{30}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

حيث : * احتمال عدم الحصول على أية كرة بيضاء هو : $P(X = 0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$

* احتمال الحصول على كرية واحدة فقط بيضاء هو : $P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$

* احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو : $P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$

* احتمال الحصول على ثلاث كريات بيضاء هو : $P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$

ب - حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة :

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 30 + 1 \times 60 + 2 \times 36 + 3 \times 4}{120} = \frac{144}{120} = 1,2$$

التمرين 58: دورة 2008 رياضيات نموذج وزاري

1- أ) حساب احتمال كل حادثة من الحوادث : A ، B و $A \cap B$.

الحادثة A: "سحب كرتين من نفس اللون" معناه: كرتان بيضاوان أو كرتان حمراوان أو كرتان

خضراوان ومنه: $P(A) = \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{3 + 6 + 10}{66} = \frac{19}{66}$

الحادثة B: "سحب كرة خضراء على الأقل" ومعناه: كرة خضراء وكرة غير خضراء أو كرتان

$$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_7^1 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{35 + 10}{66} = \frac{45}{66}$$

الحادثة $A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون و سحب كرة خضراء على الأقل".

$$P(A \cap B) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66}$$

ومعناه: سحب كرتين خضراوين. ومنه:

ب) دراسة استقلالية الحادثين A و B

الحادثتان A ، B مستقلتان معناه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{66} \dots (1) \text{ لدينا:}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{19}{66} \times \frac{15}{66} = \frac{19.5}{66.22} = \frac{95}{1452} \dots (2)$$

ومن جهة أخرى (2) و (1) نستنتج ان الحادثتين A ، B غير مستقلتين

2-أ) إعطاء قانون احتمال المتغير العشوائي X

المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

وعليه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = 2; 3; 4; 5$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي $P(X = x_i)$ والملخص في الجدول التالي:

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{6}{66}$

حيث: * احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 2 أي كرتين تحملان الرقم 1 من بين

$$5 \text{ كرات تحمل الرقم 1 هو: } P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66}$$

* احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 3 أي كرة تحمل الرقم 1 من بين 5 و

$$P(X = 3) = \frac{C_5^1 \times C_6^1}{C_{12}^2} = \frac{30}{66}$$

كرة تحمل الرقم 2 من بين 6 كرات هو:

* احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 4 أي كرة تحمل الرقم 1 من بين 5 و كرة تحمل الرقم 3 أو كرتين تحملان الرقم 2 من بين 6 كرات تحمل الرقم 2

$$P(X = 4) = \frac{C_1^1 \times C_5^1 + C_6^2}{C_{12}^2} = \frac{5 + 15}{66} = \frac{20}{66} \text{ هو:}$$

* احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 5 أي كرة تحمل الرقم 2 من بين 6 و كرة

$$\text{تحمل الرقم 3 هو: } P(X = 5) = \frac{C_1^1 \times C_6^1}{C_{12}^2} = \frac{6}{66}$$

ب- حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i \text{ : الأمل الرياضي للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة:}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot P_i = \frac{2 \times 10 + 3 \times 30 + 4 \times 20 + 5 \times 6}{66} = \frac{220}{66} = \frac{10}{3}$$

ج- حساب التباين Var(X) واستنتاج الانحراف المعياري $\sigma(X)$

$$\text{التباين للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة: } \text{Var}(X) = \sum_{i=0}^{i=n} (x_i - E(X))^2 \cdot P_i$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(2 - \frac{10}{3})^2 \times 10 + (3 - \frac{10}{3})^2 \times 30 + (4 - \frac{10}{3})^2 \times 20 + (5 - \frac{10}{3})^2 \times 6}{66} = \frac{420}{66.9} = \frac{70}{99} = 0,70$$

$$\delta(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \text{ : الانحراف المعياري للمتغير العشوائي معرف بالعلاقة:}$$

$$\delta(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{70}{99}} = \sqrt{0.70} = 0.83 \text{ ومنه:}$$

الجزء الثالث: بكالوريات النظام القديم

التمرين 59: دورة 2002 ع ط

1- أ) احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

عدد السحبات الممكنة هو : $C_{10}^3 = 120$

نسمي A حادثة : "الحصول على كرتين من نفس اللون"

عدد الحالات الملائمة هو : $C_3^3 + C_3^3 + C_4^3 = 1 + 1 + 4 = 6$ وعليه $P(A) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

ب- احتمال الحصول على ثلاث كرات تحمل الألوان الثلاثة

نسمي B حادثة : "الحصول ثلاث كرات تحمل الألوان الثلاثة"

عدد الحالات الملائمة هو $C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1 = 3 \times 3 \times 4 = 36$ وعليه $P(B) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

ج- احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل

نسمي C حادثة : "الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل"

عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3 = 100$ ومنه $P(C) = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$

2- أ) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
وقانون الاحتمال ملخص في الجدول المقابل:

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{30}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

حيث: * احتمال عدم الحصول على أية كرة بيضاء هو : $P(X = 0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$

* احتمال الحصول على كرة واحدة فقط بيضاء هو : $P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$

* احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو : $P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$

* احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء هو : $P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$

ب - حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P_i = \frac{0 \times 30 + 1 \times 60 + 2 \times 36 + 3 \times 4}{120} = \frac{144}{120} = 1,2$$

(1) احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماماً من 6 .

نسمي A الحادثة: سحب قريصتين مجموع رقميهما أكبر تماماً من 6

عدد السحبات الممكنة هو : $C_7^2 = 21$

الاعداد المسجلة على الكرات هي : 1, 5, 5, 2, 2, 3, 3 ومنه الحالات التي يكون فيها المجموع أكبر

تماماً من 6 هي : $5 + 2 = 7$ و $5 + 3 = 8$ و $5 + 5 = 10$

عدد الحالات الملائمة هو : $C_2^2 + C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 = 9$

ومنه احتمال A الحادثة هو : $P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

(2) احتمال أن المجموع أكبر تماماً من 6 علماً أنهما بيضاوان :

نسمي B حادثة : "سحب قريصتين بيضاوان"

الإحتمال المطلوب هو : $P(A \cap B) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$ لأن $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{C_3^2}{C_7^2}$

(3) قيم المتغير العشوائي X :

قيم المتغير العشوائي X هي : 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 10 .

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

حيث : * احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 3 هو : $P(X = 3) = \frac{C_2^1 \times C_1^1}{C_7^2} = \frac{2}{21}$

*: احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 4 هو : $P(X = 4) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$

*: احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 5 هو : $P(X = 5) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$

*: احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 6 هو : $P(X = 6) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$

*: احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 7 هو : $P(X = 7) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$

*: احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 8 هو : $P(X = 8) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$

*: احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 10 هو : $P(X = 10) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$

x_i	3	4	5	6	7	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i \cdot P_i = \frac{3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 3 + 7 \times 4 + 8 \times 4 + 10 \times 1}{21} = 6$$

التمرين 61: دورة 1996 ع ط

أ) احتمال أن يكون الرقمان زوجيين

عدد الحالات الممكنة هو : $C_6^1 \times C_6^1 = 36$

نسمي A الحادثة: "الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين عدد زوجين"

عدد الحالات الملائمة هو : $C_2^1 \times C_4^1 = 8$ ومنه احتمال A الحادثة هو $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

ب) احتمال أن يكون الرقمان فرديين

نسمي B الحادثة: "الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين عدد فرديين"

عدد الحالات الملائمة هو : $C_2^1 \times C_4^1 = 8$ ومنه احتمال A الحادثة هو $P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

طريقة أخرى: للإجابة على السؤالين أ) و ب) نشكل الجدول التالي :
إحتمال الحادثة A هو :

	1	2	2	3	3	3
1	(1;1)	(1;2)	(1;2)	(1;3)	(1;3)	(1;3)
2	(2;1)	(2;2)	(2;2)	(2;3)	(2;3)	(2;3)
2	(2;1)	(2;2)	(2;2)	(2;3)	(2;3)	(2;3)
3	(3;1)	(3;2)	(3;2)	(3;3)	(3;3)	(3;3)
4	(4;1)	(4;2)	(4;2)	(4;3)	(4;3)	(4;3)
4	(4;1)	(4;2)	(4;2)	(4;3)	(4;3)	(4;3)

$$P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

إحتمال الحادثة B هو :

$$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

التمرين 62: دورة 1997 ع ط

1) حساب عدد السحبات الممكنة

عدد السحبات الممكنة هو : $C_{10}^3 = 120$

2) احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية

نسمي A الحادثة: "سحب 3 قريصات أرقامها زوجية". أي $A = \{2;4;6;8;10\}$

عدد الحالات الملائمة هو : $C_5^3 = 10$ ومنه احتمال A الحادثة هو $P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

3) احتمال سحب 3 قريصات أرقامها أولية :

نسمي B الحادثة: "سحب 3 قريصات أرقامها أولية". أي $B = \{2; 3; 5; 7\}$

عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^3 = 4$ ومنه احتمال B الحادثة هو $P(B) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

4) احتمال سحب 3 قريصات أرقامها غير أولية :

نسمي C الحادثة: "سحب 3 قريصات أرقامها غير أولية". أي $C = \{1; 4; 6; 8; 9; 10\}$

عدد الحالات الملائمة هو : $C_6^3 = 20$ ومنه احتمال C الحادثة هو $P(C) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

5) احتمال أن يكون رقم واحد على الأقل أولياً :

إحتمال أن يكون رقم واحد على الأقل أولياً هو $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

التمرين 63: دورة 1996 ع ط

1) حساب احتمال لكي تكون الحروف التي تحملها القريصات المسحوبة هي حروف كلمة "مدينة"

عدد السحبات الممكنة هو : $C_{14}^5 = 2002$

نسمي A حادثة : "الحروف التي تحملها القريصات المسحوبة هي حروف كلمة "مدينة"

عدد الحالات الملائمة للحادثة A هي : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 144$ ومنه $P(A) = \frac{144}{2002}$

2) حساب احتمال لكي لا يحمل كل من القريصات المسحوبة الحرف (م).

نسمي B حادثة : "لا يحمل كل من القريصات المسحوبة الحرف (م)"

عدد الحالات الملائمة للحادثة B هي : $C_{10}^5 = 252$ ومنه $P(B) = \frac{252}{2002}$

3) حساب احتمال لكي تحمل إحدى القريصات المسحوبة على الأقل الحرف (م)

هذا الحادث هو الحادث العكسي للحادث B ومنه : $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{252}{2002} = \frac{1750}{2002}$

4) حساب احتمال لكي تحمل اثنتان - من بين القريصات المسحوبة - على الأقل الحرف (م)

نسمي C حادثة : "لكي تحمل اثنتان - من بين القريصات المسحوبة - على الأقل الحرف (م)"
عدد الحالات الملائمة للحادثة C هي

$$P(C) = \frac{910}{2002} \text{ ومنه } C_4^2 \times C_{10}^3 + C_4^3 \times C_{10}^2 + C_4^4 \times C_{10}^1 = 910:$$

الجزء الرابع: بكالوريات اجنبية

التمرين 64: (فرنسا 2019/ش. علوم/N-Calédonie)

1) نمذج الوضعية، بشجرة احتمالات.

2-أ) حساب احتمال أن تكون السيارة تحت الضمان وتحتاج إلى الصيانة.

$$P(R \cap G) = 0.2 \times 0.01 = 0.002$$

ب) التحقق أن $p(R) = 0,082$.

$$P(R) = P(R \cap G) + P(R \cap \bar{G}) = 0.002 + 0.8 \times 0.1 = 0.082$$

ج- حساب احتمال أن تكون تحت الضمان.

حساب احتمال ان تكون تحت الضمان علما انها تحتاج الى صيانة

$$P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0.002}{0.82} = 0.024$$

3-أ) تعيين قانون احتمال X ، وحساب أمله الرياضي.

X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة ثمن الفحص ومنه $X = 0; 100; 500$

حساب احتمال الحوادث التالية $P(X = 0)$ ، $P(X = 100)$ و $P(X = 500)$

السيارة تحت الضمان: $P(X = 0) = P(G) = 0.2$

السيارة ليست تحت الضمان ولا تحتاج إلى صيانة: $P(X = 100) = P(\bar{R} \cap \bar{G}) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

السيارة ليست تحت الضمان وتحتاج إلى صيانة: $P(X = 500) = P(R \cap \bar{G}) = 0.8 \times 0.1 = 0.08$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$

بالعدد الحقيقي والملخص

في الجدول المقابل:

x_i	0	100	500	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{100}$	$\frac{72}{100}$	$\frac{8}{100}$	1

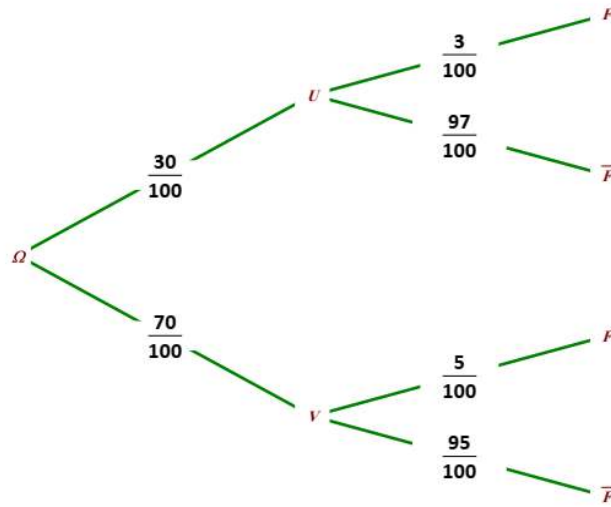
$$E(X) = 0 \times 0.2 + 100 \times 0.72 + 500 \times 0.08 = 112$$

ب) هل المبلغ يكفي لشراء العقد مع صاحب المرائب مع التعليل.

ثمن الصيانة يساوي متوسط ثمن صيانة السيارة الواحدة في عدد السيارات $Pr = 112 \times 250 = 28000$

المبلغ لا يكفي لأن الشركة خصصت مبلغا 25000 وهو أقل من الثمن المطلوب 28000

للإجابة على الأسئلة يمكن تشكيل الشجرة التالية



1) حساب احتمال أن تكون العلبة تحتوي على سكر رقيق.

احتمال أن تكون العلبة تحتوي على سكر رقيق هو $P(F)$ حيث:

$$P(F) = P(F \cap U) + P(F \cap V) = P(U) \times P_U(F) + P(V) \times P_V(F)$$

$$P(F) = 0,009 + 0,035 = 0,044 \text{ بالاعتماد على الشجرة السابقة نجد:}$$

2) حساب احتمال أن يكون السكر آتياً من المصنع U علماً أنه رقيق

احتمال أن يكون سكر آتياً من المصنع U علماً أنه رقيق احتمال شرطي $P_U(F)$

$$\text{نعلم أن } P_F(U) = \frac{P(F \cap U)}{P(F)} = \frac{0,009}{0,044} = 0,205$$

3) حساب النسبة المئوية من السكر الآتي من كل من المصنعين U و V

ترغب المؤسسة أن يكون 30% من السكر الرقيق، آتياً من المصنع U (أي $P_F(U) = 0,3$)

$$P_F(U) = \frac{P(F \cap U)}{P(F)} = \frac{P(U) \times P_U(F)}{P(U) \times P_U(F) + P(V) \times P_V(F)} = 0,3 \text{ نعلم أن}$$

$$P(U) \times 0,03 = P(U) \times 0,009 + P(V) \times 0,015 \text{ أي } \frac{P(U) \times 0,03}{P(U) \times 0,03 + P(V) \times 0,05} = 0,3 \text{ ومنه:}$$

بعد التبسيط نجد: $7P(U) = 5P(V)$ ونعلم أن $P(U) + P(V) = 1$ أي $P(V) = 1 - P(U)$

$$\text{ومنه: } 7P(U) = 5P(V) = 5 - 5P(U) \text{ وعليه: } P(U) = \frac{5}{12} = 0,42 \text{ و } P(V) = \frac{7}{12} = 0,58$$

التمرين 66: المغرب 2015 ع ت

(I) تبين أن $P(A) = \frac{12}{35}$ ، وأن $P(B) = \frac{1}{7}$.

عدد الحالات الممكنة هو : $C_7^3 = 35$

* لدينا A الحادثة " الحصول على كرة حمراء واحدة وكرتين خضراوين"
عدد الكرات الحمراء هو 4 وعدد الكرات الخضراء هو 3

عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^1 \times C_3^2 = 12$ ومنه احتمال A الحادثة هو $P(A) = \frac{12}{35}$

* لدينا B الحادثة " الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^3 + C_3^3 = 5$ ومنه احتمال الحادثة B هو $P(B) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

(II) تبين أن : $P(C) = \frac{6}{35}$

التجربة هي سحب وعشوائيا كرتين من U_1 ثم سحب كرة واحدة من U_2 .
ومنه عدد الحالات الممكنة هو : $C_7^2 \times C_5^1 = 21 \times 5 = 105$

عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^2 \times C_3^1 = 6 \times 3 = 18$ ومنه احتمال C هو : $P(C) = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}$

التمرين 67: المغرب 2003 ع ت

(1) حساب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

التجربة هي سحب كرتين من الصندوق الذي يشمل 8 كرات في آن واحد
ومنه عدد الحالات الممكنة هي $C_8^2 = 28$

الحادثة A هي " سحب كرتين من نفس اللون" ومعناه كرتين بيضاوين أو كرتين سوداوين
ومنه عدد الحالات الملائمة هي : $C_6^2 + C_2^2 = 15 + 1 = 16$

ومنه احتمال A الحادثة هو $P(A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

الحادثة B هي " سحب كرتين جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين منعدم"
يكون جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين منعدم معناه احدى الكرتين تحمل الرقم 0 والأخرى تحمل 1 أو 2 أو الكرتين تحملان الرقم 0

ولدينا عدد الكرات التي تحمل الرقم 0 هو 4 والتي تحمل رقم يختلف عن 0 هو 4 أيضا

عدد الحالات الملائمة هو $C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2 = 4 \times 4 + 6 = 22$ ومنه احتمال B هو $P(B) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$

(2) تحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

قيم المتغير العشوائي X هي قيم المجاميع الممكنة وهي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو التطبيق الذي يرفق بكل قيمة $x_i \in X$ بالعدد الحقيقي P_i والملخص في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{3}{28}$

* احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 0 (قريصتان من بين أربع قريصات تحمل الرقم 0)

$$P(X = 0) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} \text{ هو:}$$

* احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 1 (قريصة من بين أربع قريصات تحمل الرقم 0

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} \text{ هو: وقريصة تحمل الرقم 1 من بين 3 قريصات تحمل الرقم 1}$$

* احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 2 (سحب قريصتين من بين 3 قريصات تحمل الرقم 2) أو (قريصة واحدة رقمها 2 وقريصة رقمها 0 من بين 4 قريصات تحمل الرقم 0)

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 + C_4^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{7}{28} \text{ هو:}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3}{28} \text{ هو: * احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 5}$$

التمرين 68: المغرب 2003 ع ت الاستراكية

يحتوي كيس على 6 كرات وتحمل الأعداد -2 و -1 و 0 و 1 و 2

أ) حساب احتمال الحادث A.

عدد الحالات الكلية هو $C_6^3 = 20$ سحب ثلاث كرات من بين ستة كرات

A: الحادثة " من بين الكرات المسحوبة ، توجد كرة على الأقل تحمل العدد 1 ."

سحب كرة على الأقل تحمل العدد 1 "معناه سحب كرة واحدة من بين كرتين تحملان الرقم 1

مع كرتين لا تحملان الرقم 1 أو سحب كرتين تحملان الرقم 1 مع كرة لا تحمل الرقم 1

$$\text{وعليه عدد الحالات الملائمة هو } C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 = 2.6 + 1.4 = 16$$

$$\text{ومنه احتمال الحادثة A هو: } P(A) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\text{طريقة 2: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{4}{5} \text{ حيث } \bar{A} \text{ الحادث العكسي للحادث A}$$

أي $\bar{A}$: الحادثة " لا توجد من بين الكرات المسحوبة تحمل العدد 1 " .

لدينا: عدد الحالات الملائمة هو $C_4^3 = 4$ أي $P(\bar{A}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(ب) تبين أن احتمال الحدث S يساوي $\frac{1}{5}$

الحادثة S هي "مجموع الأعداد المكتوبة على الكرات المسحوبة منعدم".

مجموع الكرات المسحوبة منعدم معناه توجد ثلاث حالات هي:

الحالة الأولى: $(-1) + (0) + (1)$ أو الحالة الثانية: $(-2) + (0) + (2)$ أو الحالة الثالثة: $(-2) + (1) + (1)$

ومنه عدد الحالات الملائمة هو: $C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_2^2 = 4$

ومنه احتمال الحادثة S هو: $P(S) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

التمرين 69: المغرب 2004 ع ت

(1) حساب احتمال الأحداث التالية:

يحتوي كيس على 9 بيادق (لا يمكن التمييز بينها باللمس).

بيدقان بيضاوين يحملان الرقم 1 وثلاثة بيادق حمراء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 وأربع بيادق سوداء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و 2.

عدد الحالات الكلية هو $C_9^3 = 84$ سحب ثلاث بيادق من بين 9 بيادق.

(أ) لدينا: A: الحادثة " البيادق الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (بيدق من كل لون)"

أي: بيدقة حمراء وبيدقة بيضاء وبيدقة سوداء

عدد الحالات الملائمة هو: $C_2^1 \times C_3^1 \times C_4^1 = 2 \times 3 \times 4 = 24$ وعليه احتمال A هو: $P(A) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

(ب) لدينا: الحادثة B: " البيادق الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم".

ثلاثة تحمل الرقم 1 والتي عدد 5 أو ثلاثة بيادق تحمل الرقم 2 والتي عدد 3

ومنه: عدد الحالات الملائمة هو: $C_6^3 + C_3^3 = 20 + 1 = 21$ ومنه احتمال B هو $P(B) = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$

(ج) لدينا الحادثة C: " من بين البيادق المسحوبة يوجد على الأقل بيدق واحد أحمر "

حيث $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = \frac{16}{21}$ الحادثة العكسية للحدث C

أي $\bar{C}$: الحادثة " لا توجد من بين الكرات المسحوبة بيدق واحد أحمر " .

لدينا: عدد الحالات الملائمة هو $C_6^3 = 20$ أي $P(\bar{C}) = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$

(2) حساب احتمال الحادث: $A \cap B$.

الحادث : $A \cap B$ تعني سحب ثلاث بيادق مختلفة الألوان و كلها تحمل نفس الرقم.
أي سحب ثلاث بيادق مختلفة الألوان وتحمل الرقم 1

عدد الحالات الملائمة هو: $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ وعليه احتمال $A \cap B$ هو: $P(A \cap B) = \frac{8}{84} = \frac{2}{21}$

التمرين 70: المغرب 2006 ع ت

1) تحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

$P2$ الحادثة "السحب من الكيس U_1 بيدق يحمل الرقم 2 و منه : $P(P2) = \frac{3}{5}$

$P3$ الحادثة "السحب من الكيس U_1 بيدق يحمل الرقم 3 و منه : $P(P3) = \frac{2}{5}$

$0R$ هي الحادثة "سحب 0 بيدق أحمر" و احتمالها : $P(0R) = \frac{C_2^0 \times C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

و تعني سحب 3 بيادق بيضاء عندما $n = 3$ و احتمالها : $P(0R) = \frac{C_2^0 \times C_3^3}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

$1R$ هي الحادثة "سحب 1 بيدق أحمر و البقية بيضاء" و هي تعني سحب بيدق أبيض و بيدق

أحمر عندما $n = 2$ و احتمالها : $P(1R) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{6}{10}$

و تعني سحب بيدقين أبيضين و واحد أحمر عندما $n = 3$ و احتمالها : $P(1R) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^2} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{6}{10}$

$2R$ هي الحادثة "سحب 2 بيدق أحمر و البقية بيضاء إن وجدت" و هي تعني سحب بيدقين

أحمرين عندما $n = 2$ و احتمالها : $P(2R) = \frac{C_2^2 \times C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

و تعني سحب بيدقين أحمرين و واحد أبيض عندما $n = 3$ و احتمالها

$P(2R) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{1 \times 3}{10} = \frac{3}{10}$

و منه: حسب شجرة الاحتمالات نجد :

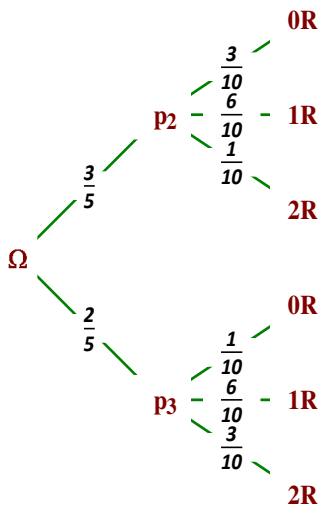
احتمال سحب 0 بيدق أحمر: $P(0R) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{11}{50}$

احتمال سحب 1 بيدق أحمر: $P(1R) = \frac{3}{5} \times \frac{6}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{30}{50}$

احتمال سحب 2 بيدق أحمر: $P(1R) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

2) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

$$E(X) = 0 \times \frac{11}{50} + 1 \times \frac{30}{50} + 2 \times \frac{9}{50} = \frac{48}{50}$$



x_i	0	1	2
P_i	$\frac{11}{50}$	$\frac{30}{50}$	$\frac{9}{50}$

التمرين 71: المغرب 2007 ع ت

(1) حساب $P(A)$ و $P(B)$.

*الحادثة A: عدم وجود كرة تحمل الرقم 0 إذن الحادثة $\bar{A}$ " كل الكرات المسحوبة تحمل الرقم 0

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_3^3}{C_7^3} = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

*الحادثة B: "سحب 3 بياض تحمل أرقاماً مختلفة مثني مثني .

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{C_7^3} = \frac{3 \times 3}{35} = \frac{9}{35}$$

(2) تبين أن $P(C) = \frac{2}{7}$.

*الحادثة C: "بمجموع الأرقام المسجلة على البياض المسحوبة معدوم.

أي: سحب (3 كرات تحمل الرقم 0) أو (كرة تحمل الرقم 0 و كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم -1)

ومنه عدد الحالات الملائمة للحدث C هو: $C_3^3 + C_1^1 \times C_3^1 \times C_3^1 = 1 + 1 \times 3 \times 3 = 10$

$$P(C) = \frac{C_3^3 + C_1^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

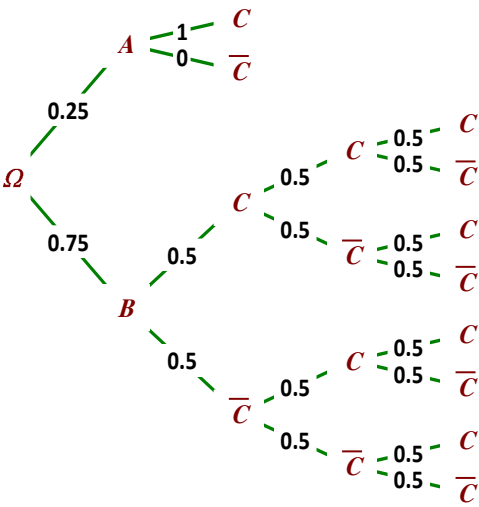
التمرين 72: تونس 2007 ش ر

(1) حساب احتمال الحادتين A و B:

$$P(B) = \frac{3}{4}, \quad P(A) = \frac{1}{4}$$

(2) تبين أن: $P(C/A) = 1$ و $P(C/B) = \frac{1}{8}$.

C أرقام زوجية و $\bar{C}$ أرقام فردية
إستنتاج $P(C)$.



$$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(C/A) \times P(A) + P(C/B) \times P(B) = 1 \times 0.25 + 0.125 \times 0.75 = 0.34375$$

(3) أ- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

x_i	0	1	2	3
P_i	0.125	3×0.125	3×0.125	0.125

ب- حساب الأمل الرياضي المتغير العشوائي X.

$$E(x) = 0 \times 0.125 + 1 \times 3 \times 0.125 + 2 \times 3 \times 0.125 + 3 \times 0.125 = 1.5$$