

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{1}{x^2})$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل)

1° مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا

خطوط التمثيل أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2° أ° أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq 3$

ب° أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة

3° أ° بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_n - 1)$

ب° استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني

في كل ما يلي n عدد طبيعي غير معدوم

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعرف الدالة f_n على المجال $]-1, +\infty[$ بـ: $f_n(x) = x^n \ln(x+1)$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1° لتكن g_n الدالة المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ: $g_n(x) = n \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

برهن أن :

أ° إذا كان $-1 < x < 0$ فإن $g_n(x) < 0$

ب° إذا كان $x > 0$ فإن $g_n(x) > 0$

2° أ° أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x)$ (لاحظ n زوجي و n فردي)

ب° تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1, +\infty[$

$f_n'(x) = x^{n-1} g_n(x)$: ومن أجل كل $n > 1$

ج° شكل جدول تغيرات الدالة f_n

3° أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

4° أرسم (C_1) ، (C_2)

التمرين الثالث:

- لتكن المعادلة التفاضلية المعرفة على i بـ : $y' + y = 4xe^x$ (1)
- 1° حل في i المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ (2) حيث y دالة قابلة للاشتقاق على i
- 2° أ°/ بين أن الدالة u المعرفة على i بـ : $u(x) = (2x - 1)e^x$ هي حلا للمعادلة (1)
- ب°/ اثبت أن: الدالة v حلا للمعادلة (2) معناه الدالة $u + v$ حلا للمعادلة (1)
- ج°/ استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)
- 3° عين الدالة f حيث f هي حل للمعادلة التفاضلية (1) و تحقق $f(0) = 1$
- 4° نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = e^{-n}f(n)$
- أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$

التمرين الرابع

- I) لتكن g الدالة المعرفة على i بـ : $g(x) = 4e^{-x} - 4x + 5$
- 1° أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2° أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
- 3° بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.45 ; 1.5[$
- 4° استنتج إشارة $g(x)$
- II) لتكن f الدالة المعرفة على i بـ : $f(x) = \frac{(4x - 1)e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1° أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- 2° أ°/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب°/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)
- ج°/ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)
- 3° أ°/ بين أنه من أجل كل x من i : $f'(x) = \frac{e^{-x}g(x)}{(1 + e^{-x})^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- ب°/ بين أن $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ثم عين حصراً للعدد $f(\alpha)$
- 4° أرسم (Δ) و (C_f)
- 5° m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = mx - 1$