

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن):

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نستطيع التفرقة بينها عند اللمس منها:

3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء. نسحب من هذا الكيس ثلاث كرات في آن واحد. (0.25ن).

- (1) ما هو احتمال الحصول على نفس اللون؟ ما هو احتمال الحصول على الألوان الثلاثة؟ ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل. (0.25ن+0.25ن+0.25ن).
- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات "عدد الكرات البيضاء المسحوبة". ما هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ؟ (عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X). (1.25ن).
- (3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X . (0.5ن+0.5ن).
- (4) أحسب التباين $V(X)$ و الإنحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X . (0.5ن+0.25ن).

التمرين الثاني (5ن):

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية، معرفتان كما يلي:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

- (1) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n = 2^{n+1} + 1$. (1ن).
- (2) أحسب $PGCD(x_8; x_9)$ ، ماذا تلاحظ؟ هل العددين x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؟ (1ن).
- (3) عيّن $PGCD(x_{2017}; x_{2018})$ ، $PGCD(x_{1438}; x_{1439})$ ثم $PGCD(x_{2967}; x_{2968})$. (0.75ن).
- (4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$. عبّر عن y_n بدلالة n . (0.5ن+0.25ن).
- (4) أدرس حسب قيم p باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5. (0.5ن).
- (5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $d_n = PGCD(x_n; y_n)$. برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ثم إستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(x_n; y_n) = 1$. (0.75ن+0.25ن).

التمرين الثالث(ن4):

- (1) حل المعادلة التفاضلية : $f' - f = 0$ علماً أنّ : $f(0) = 2$. (ن1).
- (2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم ، نُعرّف المتتالية العددية (u_n) بـ : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \ln f(u_n) \end{cases}$ برهن أنّ المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. (ن1).
- (3) أوجد عبارة الحد العام u_n بدلالة n . (ن1).
- (4) برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإنّ :
(ن1) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)n^2 + \left(3 - \frac{\ln 2}{2}\right)n$

التمرين الرابع(ن7):

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x + \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right|$ و (C_f) تمثيلها البياني.
- (1) أ- أدرس تغيّرات الدالة f و المستقيمات المقاربة. (ن0.75+ن1.75).
- ب- أدرس وضعية المستقيم المقارب المائل (Δ) بالنسبة لـ (C_f) . (ن1).
- (2) أ- أثبت أنّه من أجل كل $x \in D_f$: $f(2-x) + f(x) = 2$ ، ماذا تستنتج؟ (ن0.25).
- ب- هل النقطة $\omega(1; 1)$ نقطة إنعطاف للبيان (C_f) ؟ (ن0.25).
- (3) بيّن أنّ المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]0.5; 0.51[$. (ن0.75).
- (4) أنشئ بدقة كل من (Δ) و (C_f) . (ن0.75+ن0.25).
- (5) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:
$$x - m - \ln \left| \frac{1-x}{3+x} \right| = 0$$
- (6) لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = \left| |x| + \ln \left| \frac{|x|+1}{|x|-3} \right| \right|$ و (C_g) تمثيلها البياني.
- عيّن مجموعة تعريف الدالة g ثمّ بيّن أنّها زوجية. ماذا تستنتج؟ (ن0.75).
- (7) إشرح كيف يُمكن إنشاء المنحنى (C_g) بإستعمال البيان (C_f) ثمّ أنشئ (C_g) . (ن0.5).

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

في ثانوية ما ، 25% من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15% منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10% مستواهم ضعيف في المادتين معاً. نختار عشوائياً تلميذاً واحداً من هذه الثانوية.

- (1) ما احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفاً في مادة الرياضيات و مادة الفيزياء معاً. (1ن).
- (2) ما احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفاً في مادة الرياضيات أو في مادة الفيزياء . (1ن).
- (3) إذا كان التلميذ مستواه ضعيفاً في مادة الفيزياء ، ما احتمال أن يكون مستواه ضعيفاً في مادة الرياضيات أيضاً؟ (1ن).
- (4) إذا كان التلميذ مستواه ضعيفاً في مادة الرياضيات، ما احتمال أن يكون مستواه ضعيفاً في مادة الفيزياء أيضاً؟ (1ن).

التمرين الثاني (5ن):

n عدد طبيعي . نعتبر الأعداد:

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 , b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ و } c_n = 2 \times 10^n + 10$$

- (1) أحسب كل من b_3 و c_3 ، بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 و أن b_3 عدد أولي. (1ن).
- (2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $a_{2n} = b_n \times (c_n - 9)$ ، ثم إستنتج تحليلاً إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 . (1ن).
- (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(b_n; 11)$. إستنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما. (1ن).
- (4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $b_3x + c_3y = 1 \dots \dots (E)$. بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$. (1ن).
- (5) تحقق أن $(-731; 727)$ حلاً للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . (1ن).

التمرين الثالث (4ن):

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول : $u_0 = e$ و من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ و لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة بـ : $v_n = \ln(u_n)$.
- (1) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0 . (1ن).
 - (2) أوجد عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج عبارة u_n بدلالة n . (1ن).
 - (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :
 $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$
أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $P_n = e^{S_n}$. (1ن).
 - (4) إستنتج عبارة P_n بدلالة n . أوجد نهاية S_n ثمّ إستنتج نهاية P_n لما n يؤول إلى $+\infty$. (1ن).

التمرين الرابع (7ن):

- I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + e^{x-1}$
 - (1) أدرس تغيّرات الدالة f مستنتجاً إشارتها. (1.5ن).
 - II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $g(x) = 1 + \ln(e^{x-1} - x)$ ، و (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 - (1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g . (0.5ن).
 - (2) أحسب النهايات عند حدود مجموعة تعريف الدالة g . (0.75ن).
 - (3) شكّل جدول تغيّرات الدالة g . (0.25ن).
 - (4) أحسب نهاية $[g(x) - x]$ لما x يؤول إلى $+\infty$ ، ماذا تستنتج؟ (0.25ن+0.25ن).
 - (5) أحسب $g(0)$ ثمّ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً آخرأً وحيداً α حيث : $1.75 < \alpha < 1.76$. (1ن).
 - (6) أرسم (C_g) . (1ن).
- III) ليكن n عدد طبيعي .
 - (1) أحسب العبارة : $I_n = \int_n^{n+1} [x + f(x)]$. (0.5ن).
 - (2) بيّن أنّ (I_n) متتالية هندسية. (0.5ن).
 - (3) أحسب المجموع : $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}$ بدلالة n . (0.5ن).

إنتهى الموضوع الثاني