

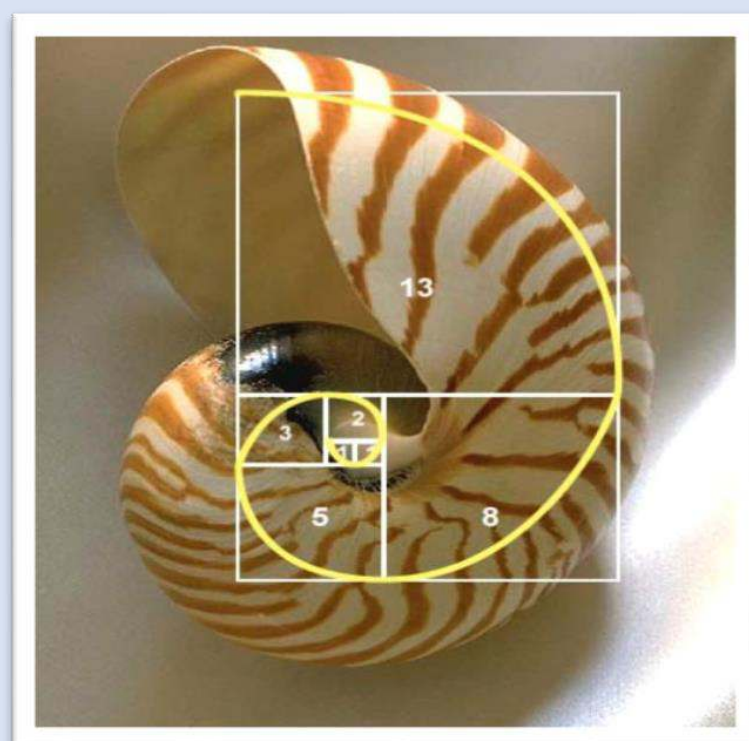
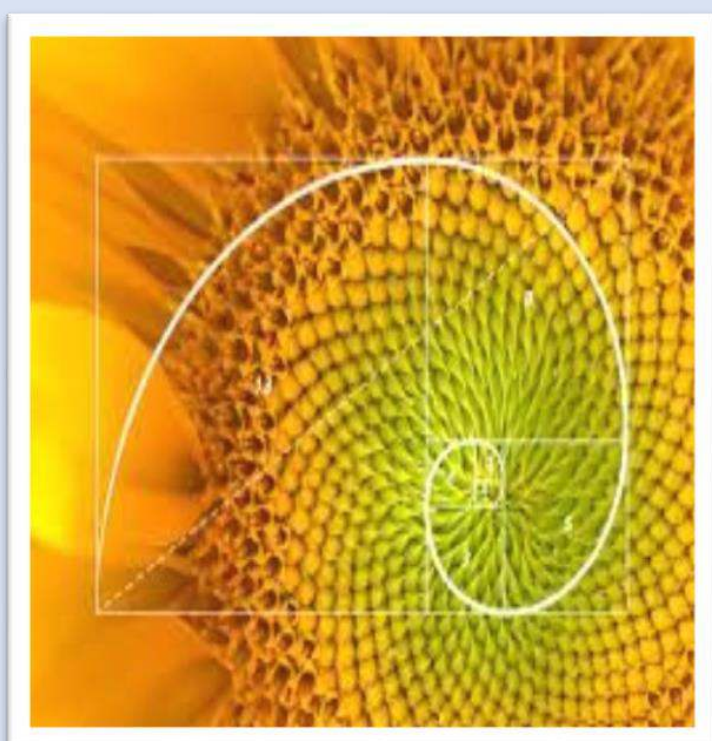
الرياضيات في الثانوية

للسنوات الثانية والثالثة

21 تمرين نموذجي في

المتواليات العددية

Les suites numériques



كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

تمارين في المتتاليات العددية

التمرين الأول :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها

$$q \text{ حيث : } \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية ثم استنتج u_1 .

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

د- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_1 = 2$ و من

$$\text{أجل كل عدد طبيعي } n \geq 1 : v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

أ- أحسب v_2 و v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ . بين أن } (w_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2}$$

ج- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الثاني :

لتكن (u_n) $_{n \geq 1}$ متتالية حسابية بحيث :

$$\begin{cases} u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} = 132 \\ u_2 + u_4 = 18 \end{cases}$$

(1) أحسب الأساس r لهذه المتتالية و الحد الأول u_1 .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $3S_n \leq 32$.

التمرين الثالث :

I- لتكن (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(1) جد r أساس هذه المتتالية ثم استنتج إتجاه تغيرها .

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right)$$

II- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة التراجعية :

$$n \in \mathbb{N} , \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = (\alpha^2 - 3)v_n + 2\alpha^2 - \alpha \end{cases}$$

(1) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية حسابية

(2) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

التمرين الرابع :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ ،

$u_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

و المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(1) أحسب v_0 ، v_1 .

(2) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q .

(3) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج المجموع S_n

$$\text{حيث } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

(4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_n - u_0$ ثم

$$\text{استنتج أن : } u_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] + 1$$

(5) أحسب $\lim S_n$ ثم استنتج $\lim u_n$.

التمرين الخامس :

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و

$$t_n = 3u_n + 8v_n$$

(1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

و حدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

المتاليات العددية - ثانية ثانوي -

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

(4) أحسب المجموعين T_n و R_n حيث :

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$R_n = w_0^2 + w_1^2 + \dots + w_n^2 \text{ و}$$

و الجداء P_n حيث : $P_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$

III- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n = \frac{8}{2^n} + 2n + 8$

✓ أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

التمرين السابع :

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية حيث : $u_2 = 2$ و $u_5 = \frac{27}{4}$

(1) عين q أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0 .

(2) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ماذا تستنتج فيما يخص تقارب المتتالية (u_n) ؟

(3) أحسب المجموعين : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$

$$S'_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \text{ و}$$

(4) أحسب المجموع T_n حيث :

$$T_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \dots + \sqrt{u_n}$$

التمرين الثامن :

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية متزايدة حيث : $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_2 \times u_4 = 189 \end{cases}$

(1) عين الأساس r لهذه المتتالية ثم u_0 .

(2) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

(4) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S = 396$.

التمرين التاسع :

I- $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية حيث : $u_{10} = 16$ و $u_{15} = 41$

(1) عين الحد الأول u_0 و الأساس r للمتتالية (u_n) .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) عين الحد الذي رتبته 10 للمتتالية (u_n) .

(4) بين أن العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) .

(2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

(3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

(4) عين كلا من u_n و v_n بدلالة n .

(5) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين السادس :

I- لتكن المتتالية الحسابية (u_n) التي حدها الأول u_0 و أساسها r حيث :

$$\begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases}$$

(1) أحسب r ، u_0 و u_2 .

(2) أكتب u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

(4) عين قيمة n حتى يكون $S_n \geq 2586$.

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = 6$

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{2} - 1 : n \text{ عدد طبيعي}$$

(1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ، أرسم المستقيم (Δ_1) الذي $y = x$ معادلة له و المستقيم (Δ_2) الذي

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ معادلة له ثم عين فاصلة نقطة تقاطعهما .}$$

(2) أ- باستعمال (Δ_1) و (Δ_2) مثل على محور الفواصل الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 مبرزا خطوط الرسم .

ب- ما تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟ و ما تخمينك حول تقارب المتتالية (v_n) ؟

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n = \alpha v_n - 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

أ- عين قيمة α حتى تكون (w_n) متتالية هندسية .

• نضع $\alpha = -1$:

ب- أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

د- برهن التخمينين السابقين .

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

II - $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$v_3 = 24 \text{ و } v_5 = 96$$

(1) عين الحد الأول v_0 والأساس q للمتتالية (v_n) .

(2) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

(3) عين الحد الذي رتبته 7 للمتتالية (v_n) .

(4) بين أن العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n) .

التمرين العاشر :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 13$ و

$$3u_3 - u_5 = 38$$

(1) عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون العدد 2017 حدا

من حدود المتتالية (u_n) .

(4) أحسب المجموع :

$$S = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + \dots + 3u_{582}$$

(5) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $v_n = u_{2n-1}$

أ- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- من أجل كل $n \geq 1$ ، أحسب $v_{n+1} - v_n$ ثم استنتج طبيعة

المتتالية (v_n) مبينا أساسها r وحدها الأول v_1 .

التمرين الحادي عشر :

لتكن (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة

تماما و أساسها r حيث : $r = -5$ و

$$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875$$

(1) أحسب u_5 ثم u_0 ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(2) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $8S_n \leq 945$.

التمرين الثاني عشر :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ و

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \text{ ب- من أجل كل عدد طبيعي } n$$

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و

حدها الأول v_0 .

(2) أ- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أ- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

ج- استنتج بدلالة n المجموع :

$$T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

التمرين الثالث عشر :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ كما

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ 4u_{n+1} = u_n + 9 \end{cases} \text{ يلي :}$$

(1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

• في كل ما يلي نفرض : $\alpha = 4$

(2) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ

$$v_n = u_n + \beta$$

أ- عين العدد الحقيقي β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

ج- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموعين :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ و}$$

$$T_n = v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \dots + 4^n v_n$$

المتاليات العددية - ثانية ثانوي -

(5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \frac{1}{2^{n(n+1)}}$$

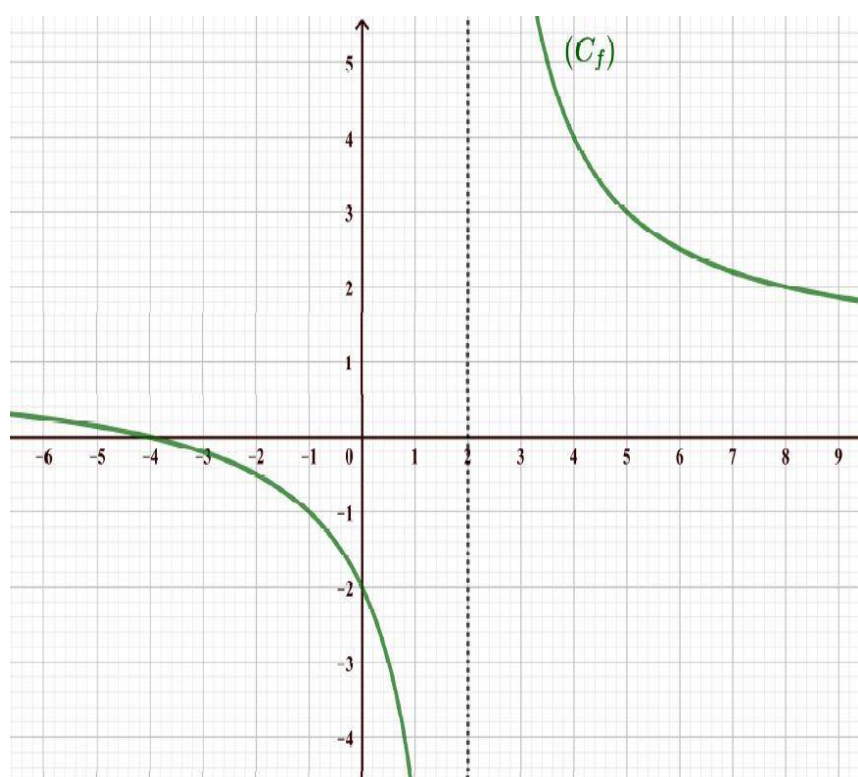
التمرين الرابع عشر :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2} : n \text{ عدد طبيعي}$$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



(1) أ- باستعمال المنحنى (C_f) و المنصف الأول الذي $y = x$

معادلة له ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع إظهار خطوط الرسم .

ب- ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n) .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4}$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$ و

استنتج أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و

حددها الأول v_0 .

ب- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

ج- برهن التخمين السابق بحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(3) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(4) أحسب المجموع : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{99}$

التمرين الخامس عشر :

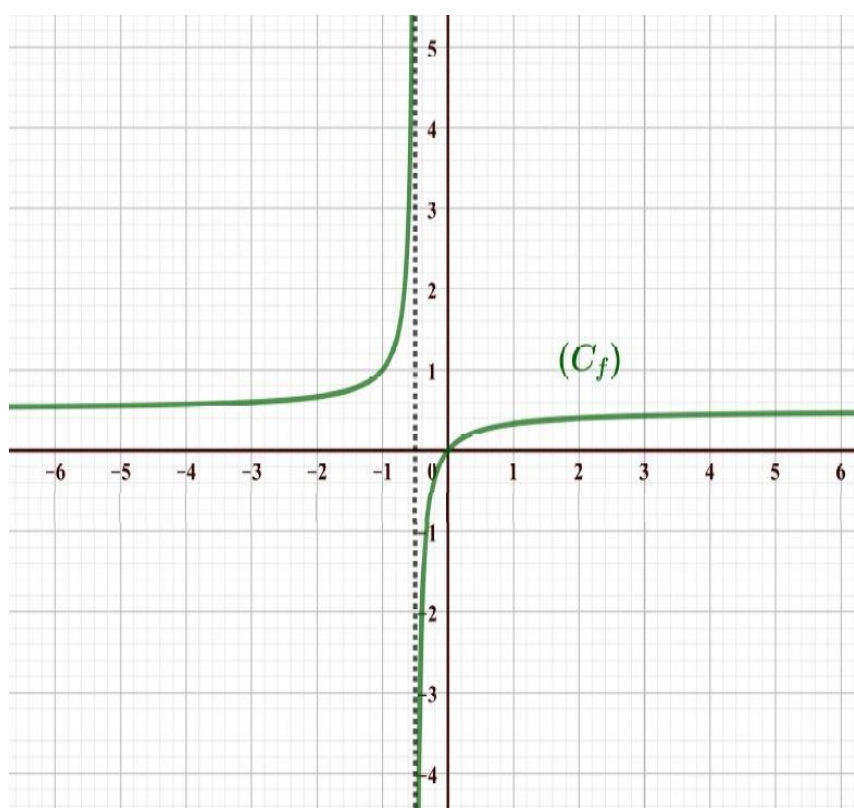
(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} : n \text{ طبيعي}$$

(1) لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \text{ و ليكن } (C_f) \text{ تمثيلها البياني في المستوى}$$

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



(1) أ- باستعمال المنحنى (C_f) و المنصف الأول الذي $y = x$

معادلة له ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع إظهار خطوط الرسم .

ب- خمن إتجاه تغير المتتالية (u_n) و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n}$ حيث

$u_n \neq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

أ- أحسب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

ج- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة

u_n بدلالة n .

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

د- أحسب كلا من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. ماذا تستنتج ؟

(3) أحسب المجموعين التاليين :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \text{ و } S = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_{2022} v_{2022}$$

التمرين السادس عشر :

$$n \in \mathbb{N} , \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases} : \text{متتالية عددية معرفة بـ :}$$

(1) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(2) نعتبر فيما يلي $\alpha = -3$ ، و ليكن (C_f) التمثيل البياني

للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) حيث :

$f(x) = 2x + 4$ و المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له .

أ- أرسم كلا من (C_f) و (Δ) في نفس المعلم و عين فاصلة

نقطة تقاطعهما .

ب- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

مبرزا خطوط الرسم ثم جدها حسابيا .

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية معيننا أساسها q و حدها

الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب كلا من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و استنتج أن (v_n) و

(u_n) متتاليتان متباعدتان .

د- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

(4) أ- أحسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم استنتج

المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

ب- أحسب المجموع $T_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

$$\left(\frac{u_n}{v_n} = 1 - \frac{4}{v_n} \right) \text{ (لاحظ أن)}$$

ج- أحسب بدلالة n المجموع

$$C_n = 5v_0 + \frac{5}{2}v_1 + \dots + \frac{5}{2^n}v_n$$

التمرين السابع عشر :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$n \in \mathbb{N} , \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

(1) عين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) نفرض أن $u_0 = \frac{1}{2}$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على

$\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أ- عين قيمة λ حتى تكون المتتالية (v_n) يطلب تعيين

أساسها q و حدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب بدلالة n المجموع

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{2n+1}$ ثم استنتج بدلالة n المجموع

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{2n+1}$$

د- أحسب بدلالة n المجاميع :

$$T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 \text{ و } T'_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

و الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

تمارين حول الوسطين الحسابي و الهندسي :

التمرين الثامن عشر :

عين ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية

حسابية علما أن :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

(دون حسابها) .

(2) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}$$

إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$u_n = \frac{1}{n+1} + 1 , n \text{ استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

حل مفترحات للتمارين :

حل التمرين الأول :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً حدها الأول u_1 و أساسها

$$q \text{ حيث : } \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) أ- حساب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية ثم استنتاج u_1 :

حسب خاصية الوسط الهندسي نكتب $u_1 \times u_3 = u_2^2$ و منه ينتج

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_2 = 6 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_2^3 = 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \\ u_2 = 6 \end{cases} \text{ بما أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 1 :$$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ فإنه ينتج $u_3 = u_1 \times q^2$ و $u_2 = u_1 \times q$ و منه

$$\begin{cases} u_1(1 + q^2) = 20 \\ u_1 \times q = 6 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} u_1 + u_1 \times q^2 = 20 \\ u_1 \times q = 6 \end{cases} \text{ نجد}$$

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{3} \text{ و } a + b + c = 9$$

التمرين التاسع عشر :

عين ثلاث أعداد حقيقية α ، β ، γ حدود متتابعة من متتالية حسابية علماً أن :

$$\alpha + \beta + \gamma = 15 \text{ و } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 83$$

التمرين العشرون :

عين ثلاث أعداد حقيقية α ، β ، γ حدود متتابعة من متتالية هندسية علماً أن :

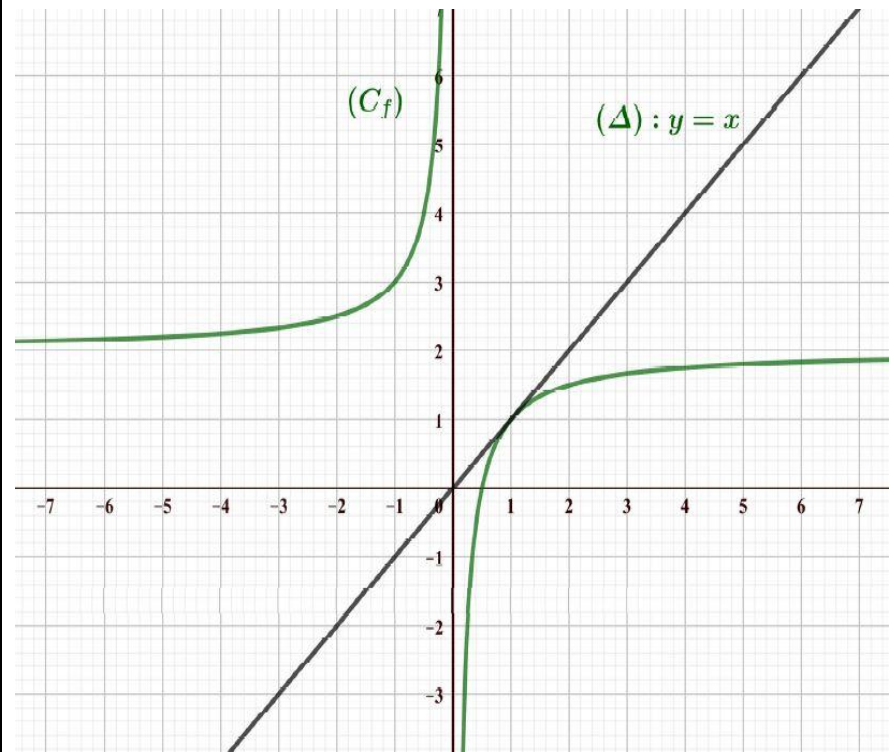
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{7}{8} \text{ و } \alpha \times \beta \times \gamma = 64$$

التمرين الواحد والعشرون (نموذجي للمراجعة) :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، التمثيل البياني للدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \text{ و المستقيم } (\Delta) \text{ الذي } y = x \text{ معادلة له كما}$$

هو موضح في الشكل الموالي :



نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ و

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$$

(1) مثل بيانياً على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

$$\frac{6}{q} = \frac{20}{1+q^2} \text{ معناه } 6(1+q^2) = 20q \text{ أي } 6q^2 - 20q + 6 = 0$$

يكافئ $3q^2 - 10q + 3 = 0$) نجد $q = 3$ أو $q = \frac{1}{3}$ ، لكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً و بالتالي $q > 1$ ، إذن $q = 3$.

$$\text{و ينتج } u_1 = \frac{6}{q} = \frac{6}{3} = 2 \text{ معناه } u_1 = 2$$

ب- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ معناه $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \times 3^{n-1}) = +\infty$ لأن $q = 3 > 1$ و نستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

د- حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$:

$$\text{معناه } S_n = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \dots + 2 \times 3^{n-1}$$

$$S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) \text{ معناه}$$

$$S_n = 2 \left(\frac{1-3^n}{1-3} \right) \text{ و منه نجد } S_n = 3^n - 1$$

$$S_n = 728 \text{ معناه } 3^n = 729 \text{ و نجد } n = 6$$

(2) أ- حساب v_2 و v_3 :

$$\text{معناه } \begin{cases} v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 \\ v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} v_2 = 5 \\ v_3 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 \end{cases}$$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

إثبات أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن $w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3}$ معناه

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3 \times u_n} - \frac{2}{3} \text{ و منه } w_{n+1} = \frac{3v_n + 2u_n}{6 \times u_n} - \frac{2}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{3v_n + 2u_n}{6 \times u_n} - \frac{4 \times u_n}{6 \times u_n} \text{ و منه } w_{n+1} = \frac{3v_n - 2u_n}{6 \times u_n}$$

$$\text{معناه } w_{n+1} = \frac{3v_n}{6 \times u_n} - \frac{2u_n}{6 \times u_n} \text{ أي } w_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) \text{ معناه } w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n \text{ و نستنتج أن}$$

(w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج- كتابة w_n بدلالة n ثم استنتاج v_n بدلالة n :

$v_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ فإن :

$$v_n = u_n \left(w_n - \frac{2}{3} \right) \text{ حيث } w_n = w_1 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ و}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ ، إذن من أجل كل عدد طبيعي}$$

$n \geq 2$:

$$v_n = 2 \times 3^{n-1} \left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{2}{3} \right) \text{ أي}$$

$$v_n = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-2} - 4 \times 3^{n-2}$$

حل التمرين الثاني :

(1) حساب الأساس r لهذه المتتالية و الحد الأول u_1 :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ فإن $u_n = u_2 + (n-2)r$ و

$$\text{منه } \begin{cases} u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} = 132 \\ u_2 + u_4 = 18 \end{cases} \text{ تعني}$$

$$\begin{cases} (u_2 + 4r) + (u_2 + 6r) + (u_2 + 8r) + (u_2 + 10r) = 132 \\ u_2 + (u_2 + 2r) = 18 \end{cases}$$

$$\text{معناه } \begin{cases} 4u_2 + 28r = 132 \\ 2u_2 + 2r = 18 \end{cases} \text{ . نضرب المعادلة (2) في -2}$$

ثم بالجمع مع المعادلة (1) طرفاً لطرف نجد $24r = 96$ و

$$\text{منه } r = \frac{96}{24} \text{ أي } r = 4$$

$$2u_2 + 2r = 18 \text{ و منه } 2u_2 = 10 \text{ و منه } u_2 = 5$$

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

لدينا $u_1 = 5 - 4$ و $u_1 = u_2 - r$ و $u_2 - u_1 = r$ و $u_1 = 1$

(2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن $u_n = u_1 + (n-1)r$: معناه $u_n = 4n - 1$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(1 + 4n - 1) = 2n^2$$

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $3S_n \leq 32$:

$$3S_n \leq 32 \Rightarrow 6n^2 \leq 32 \Rightarrow n^2 \leq \frac{32}{6} \Rightarrow n \leq 2.3094$$

و بالتالي $n \in \{1, 2\}$

حل التمرين الثالث :

I - (1) إيجاد r أساس هذه المتتالية ثم استنتاج اتجاه تغيرها :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 + nr$ و منه

$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} (u_0 + 2r) + (u_0 + 4r) = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

$$2u_0 + 6r = 4 \text{ أي } -2 + 6r = 4 \text{ و منه } r = 1$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = r = 1 > 0$

فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = n - 1$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right) = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{حيث } u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(0 + n - 1)$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{3} \text{ و منه } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n}{6}$$

-II

(1) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية حسابية :

تكون المتتالية (v_n) التي حدها الأول v_0 حسابية إذا و فقط إذا كان من أجل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = r$ عدد ثابت

$$\alpha^2 - 3 = 1 \text{ معناه } \alpha = -2 \text{ أو } \alpha = 2 \text{ ؛ إذن :}$$

✓ إذا كان $\alpha = -2$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} - v_n = 2(-2)^2 + 2 = 10 \text{ أساسها هو } 10$$

✓ إذا كان $\alpha = 2$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} - v_n = 2(2)^2 - 2 = 6 \text{ أساسها هو } 6$$

(2) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

تكون المتتالية (v_n) التي حدها الأول v_0 هندسية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث من أجل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

إذن تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان

$$2\alpha^2 - \alpha = 0$$

$$2\alpha^2 - \alpha = 0 \text{ يكافئ } \alpha(2\alpha - 1) = 0 \text{ يكافئ } \alpha = 0 \text{ أو } \alpha = \frac{1}{2}$$

إذن (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان $\alpha = 0$ أو $\alpha = \frac{1}{2}$

حل التمرين الرابع :

(1) حساب v_1 ، v_0 :

$$\begin{cases} v_0 = 2 - 1 \\ v_1 = u_2 - 2 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \end{cases} \text{ حيث}$$

$$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$$

$$u_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] + 1$$

(5) حساب $\lim S_n$ ثم استنتاج $\lim u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ فإن } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + v_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + 1 = 3$$

حل التمرين الخامس :

(1) إثبات أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{12} \text{ و منه } w_{n+1} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n \text{ و بالتالي } w_{n+1} = \frac{1}{12} (u_n - v_n) \text{ إذن } (w_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{12} \text{ و حدها الأول } w_0 = u_0 - v_0$$

معناه $w_0 = 11$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12} \right)^n$$

(2) إثبات أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة :

تكون (t_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n

$$t_{n+1} = t_n \text{ حيث } t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} \text{ و منه}$$

$$t_{n+1} = 3 \left(\frac{u_n + 2v_n}{3} \right) + 8 \left(\frac{u_n + 3v_n}{4} \right)$$

$$t_{n+1} = 3u_n + 8v_n \text{ معناه } t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $t_{n+1} = t_n$ و منه نستنتج أن (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

و من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$t_n = 44 \text{ معناه } t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 36 + 8$$

(3) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و أن المتتالية

(v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$:

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(2) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$ و منه

$$v_{n+1} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n - u_{n+1} \text{ أي } v_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n) \text{ معناه } v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \text{ و بالتالي } (v_n)$$

متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

(3) التعبير عن الحد العام v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ و منه}$$

$$v_n = \frac{1}{2^n}$$

استنتاج المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

عدد الحدود في المجموع هو $n - 1 - 0 + 1 = n$ و منه

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ معناه } S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \text{ أي } S_n = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

(4) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_n - u_0$ ثم

$$\text{استنتاج أن : } u_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] + 1$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$ و بالتالي :

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases} \text{ إذن نتحصل على :}$$

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$$

و منه ينتج $S_n = u_n - u_0$ و هو المطلوب .

لدينا $u_n = S_n + u_0$ حيث $u_0 = 1$ و منه نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$$

حل التمرين السادس :

I - 1) حساب r ، u_0 و u_2 :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 + nr$ و منه

$$\text{أي } \begin{cases} (u_0 + r) - (u_0 + 4r) = -6 \\ (u_0 + r) + (u_0 + 5r) = 28 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} -3r = -6 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$u_2 = u_0 + 2r \text{ و نجد } \begin{cases} r = 2 \\ u_0 = 8 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} r = 2 \\ 2u_0 = 28 - 12 \end{cases}$$

أي $u_2 = 8 + 2 \times 2 = 12$ و منه $u_2 = 12$.

(2) كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2n + 8$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n :

عدد الحدود في المجموع هو $n - 0 + 1 = n + 1$ و نجد

$$S_n = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2} (8 + 8 + 2n)$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+16)}{2} \text{ و منه } S_n = (n+1)(n+8)$$

(4) تعيين قيمة n حتى يكون $S_n \geq 2586$:

$$S_n \geq 2586 \text{ يكافئ } (n+1)(n+8) \geq 2586 \text{ معناه } n^2 + 9n - 2578 \geq 0$$

من أجل كل عدد حقيقي x ندرس إشارة ثلاثي الحدود $A(x)$

$$\text{حيث } A(x) = x^2 + 9x - 2578 \quad (\Delta = 10393)$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$A(x)$	+	0	-	0	+

حيث $x_1 \approx -55.47$ و $x_2 \approx 46.47$

إذن $S_n \geq 2586$ إذا و فقط إذا كان $n \geq 47$.

II - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} - 1$

$$\text{معناه } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{-2u_n + 2v_n}{3}$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2w_n}{3} \text{ أي } u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - v_n)}{3}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$ إذن

$w_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و منه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$-\frac{2w_n}{3} < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ و نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\text{معناه } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4}$$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4} w_n$ ، بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ و نستنتج أن المتتالية (v_n)

متزايدة على $\mathbb{N}$.

(4) تعيين كلا من u_n و v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $3u_n + 8v_n = 44$

و كذلك $u_n - v_n = w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$ و منه نتحصل على :

$$\begin{cases} 3u_n + 8v_n = 44 \\ u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases} \text{ ، نضرب المعادلة (2) في 8 ثم}$$

بالجمع طرفا لطرف مع المعادلة (1) ينتج

$$11u_n = 88 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 44 \text{ معناه } u_n = 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 4$$

لدينا $v_n = u_n - w_n$ و منه

$$v_n = 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n - 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 4$$

$$v_n = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \text{ فإن } n \in \mathbb{N}$$

(5) استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

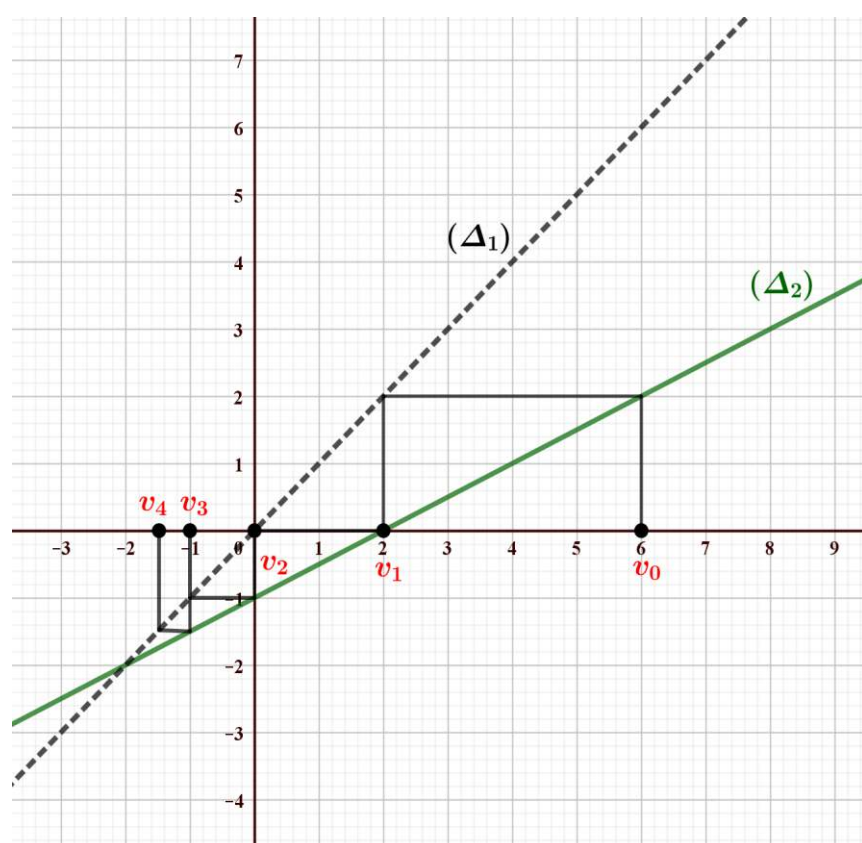
بما أن $0 < \frac{1}{12} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ و بالتالي

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ؛ إذن :

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

(1) إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) .

(2) أ- تمثيل على محور الفواصل الحدود v_1, v_2, v_3, v_4 :



ب- بما أن $v_4 < v_3 < v_2 < v_1 < v_0$ إذن نخمن بأن المتتالية

(v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و (v_n) متقاربة نحو -2 .

(3) أ- تعيين قيمة α حتى تكون (w_n) متتالية هندسية:

من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$w_{n+1} = \alpha v_{n+1} - 2 = \alpha \left(\frac{v_n}{2} - 1 \right) - 2$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha v_n - 2\alpha - 4) \text{ و منه } w_{n+1} = \alpha \frac{v_n}{2} - \alpha - 2$$

$$\text{أي } w_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha v_n - 2 - 2\alpha - 2) \text{ معناه}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n - \alpha - 1 \text{ ، إذن تكون المتتالية } (w_n) \text{ هندسية و}$$

أساسها $\frac{1}{2}$ إذا وفقط إذا كان $-\alpha - 1 = 0$ معناه $\alpha = -1$.

ب- كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) بدلالة n ثم استنتاج v_n بدلالة n :

من أجل $\alpha = -1$ فإن المتتالية (w_n) و من أجل كل عدد

طبيعي n فإن $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث

$$w_0 = (-1)v_0 - 2 = -8 \text{ و منه } w_n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

د- إثبات صحة التخمين السابقين:

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

بما أن $q = \frac{1}{2} > 0$ و $w_0 = -8 < 0$ فإن المتتالية (w_n)

متزايدة على $\mathbb{N}$. و من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$v_n = -w_n - 2 \text{ ، إذن بما أن المتتالية } (w_n) \text{ متزايدة على } \mathbb{N}$$

فإن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$$\text{و بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ و منه نجد}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-w_n - 2) = -2 \text{ إذن المتتالية } (v_n) \text{ متقاربة}$$

نحو -2 و منه صحة التخمين السابقين.

(4) حساب المجموعين R_n و T_n :

عدد الحدود في المجموع T_n هو $n+1$ و نكتب:

$$T_n = (-w_0 - 2) + (-w_1 - 2) + \dots + (-w_n - 2)$$

$$T_n = -(w_0 + w_1 + \dots + w_n) + (n+1)(-2)$$

$$T_n = -w_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (n+1)(-2)$$

$$T_n = 8 \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(-2) \text{ و منه}$$

$$T_n = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2(n+1)$$

و نكتب:

$$R_n = w_0^2 + (w_0 \times q)^2 + (w_0 \times q^2)^2 + \dots + (w_0 \times q^n)^2$$

$$R_n = w_0^2 (1 + q^2 + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \dots + (q^2)^n) \text{ أي}$$

$$\text{حيث } 1 + q^2 + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \dots + (q^2)^n \text{ هو مجموع}$$

$n+1$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها q^2 و منه نجد:

$$R_n = w_0^2 \frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2} \text{ حيث } w_0 = -8 \text{ و } q = \frac{1}{2} \text{ ؛ إذن}$$

$$R_n = 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \text{ أي } R_n = 64 \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \text{ ينتج}$$

$$S'_n = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) + (n+1)(n+8)$$

حل التمرين السابع :

(1) تعيين q أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 \times q^n$ و منه

$$\text{أي } \begin{cases} u_0 \times q^2 = 2 \\ u_0 \times q^5 = 27/4 \end{cases} \text{ و منه } u_5 = u_0 \times q^5 \text{ و } u_2 = u_0 \times q^2$$

$$\text{و منه } \begin{cases} u_0 = 2/q^2 \\ u_0 \times q^5 = 27/4 \end{cases} \text{ و منه } 2q^3 = 27/4 \text{ أي } q^3 = 27/8$$

$$\text{منه نجد } q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \text{ أي } q = \frac{3}{2}$$

$$\text{بما أن } u_0 = \frac{2}{q^2} \text{ فإن } u_0 = 4 \times \frac{2}{9} \text{ و منه } u_0 = \frac{8}{9}$$

(2) كتابة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 \times q^n$ و منه

$$u_n = \frac{8}{9} \times \left(\frac{3}{2} \right)^n \text{ بما أن } q = \frac{3}{2} > 1 \text{ فإن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$$

و نستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

(3) حساب المجموعين :

عدد الحدود في المجموع S_n هو $2n+1$ و نكتب :

$$S_n = -2 \times \frac{8}{9} \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{2n+1} \right) \text{ معناه } S_n = u_0 \frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{2n+1}}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$\text{أي } S_n = -\frac{16}{9} \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{2n+1} \right)$$

$$S'_n = \frac{1}{\frac{8}{9}} + \frac{1}{\frac{8}{9} \times \left(\frac{3}{2} \right)^1} + \frac{1}{\frac{8}{9} \times \left(\frac{3}{2} \right)^2} + \dots + \frac{1}{\frac{8}{9} \times \left(\frac{3}{2} \right)^n}$$

و منه

$$S'_n = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \times \left(\frac{2}{3} \right)^1 + \frac{9}{8} \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots + \frac{9}{8} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\text{معناه } R_n = \frac{256}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$$

• حساب الجداء $P_n = w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n$:

$$P_n = w_0 \times (w_0 \times q) \times (w_0 \times q^2) \times \dots \times (w_0 \times q^n)$$

معناه :

$$P_n = \underbrace{w_0 \times w_0 \times w_0 \times \dots \times w_0}_{n+1 \text{ fois}} \times \underbrace{q \times q \times q \times \dots \times q}_n$$

معناه $P_n = w_0^{n+1} \times q^n$ حيث $w_0 = -8$ و $q = \frac{1}{2}$ ؛ إذن

$$P_n = \frac{(-8)^{n+1}}{2^n} = (-1)^{n+1} \frac{2^{3n+3}}{2^n} \text{ و منه } P_n = \frac{(-8)^{n+1}}{2^n}$$

$$\text{إذن } P_n = (-1)^{n+1} 2^{2n+3}$$

III - حساب بدلالة n المجموع S'_n :

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $x_n = \frac{8}{2^n}$ و $y_n = 2n+8$

$$\text{إذن } \begin{cases} x_{n+1} = \frac{8}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{2^n} \right) = \frac{1}{2} x_n \\ y_{n+1} = 2(n+1) + 8 = 2n + 8 + 2 = y_n + 2 \end{cases}$$

المتتالية (x_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و المتتالية (y_n) حسابية

أساسها 2 حيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$a_n = x_n + y_n$$

إذن $S'_n = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)$ أي

$$S'_n = (x_0 + x_1 + \dots + x_n) + (y_0 + y_1 + \dots + y_n)$$

$$\text{منه نجد } S'_n = x_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2} (y_0 + y_n) \text{ حيث}$$

$$\text{و منه } \begin{cases} x_0 = \frac{8}{2^0} = 8 \\ y_0 = 2(0) + 8 = 8 \end{cases}$$

$$\text{معناه } S'_n = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) + \frac{n+1}{2} (8 + 2n + 8)$$

معناه $S'_n = \frac{9}{8} \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$ حيث

$1 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3} \right)^n$ يمثل مجموع $n+1$

حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول يساوي 1

معناه $S'_n = \frac{9}{8} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$ و $S'_n = \frac{9}{8} \times 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$

منه $S'_n = \frac{27}{8} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$

(4) حساب المجموع T_n :

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 \times q^n$ ، حيث u_0 و q أعداد حقيقية موجبة تماما فإنه ينتج:

معناه $T_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_0 \times q} + \sqrt{u_0 \times q^2} + \dots + \sqrt{u_0 \times q^n}$

$T_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_0} \times \sqrt{q} + \sqrt{u_0} \times \sqrt{q^2} + \dots + \sqrt{u_0} \times \sqrt{q^n}$

معناه $T_n = \sqrt{u_0} (1 + \sqrt{q} + \sqrt{q^2} + \dots + \sqrt{q^n})$ أي

حيث $T_n = \sqrt{u_0} (1 + \sqrt{q} + \sqrt{q^2} + \dots + \sqrt{q^n})$

$1 + \sqrt{q} + \sqrt{q^2} + \dots + \sqrt{q^n}$ يمثل مجموع $n+1$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\sqrt{q}$ و حدها الأول 1 و منه

أي $T_n = \sqrt{u_0} \left(\frac{1 - \sqrt{\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}}}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}} \right)$ و $T_n = \sqrt{u_0} \left(\frac{1 - \sqrt{q}^{n+1}}{1 - \sqrt{q}} \right)$

و منه $T_n = \frac{4}{3} (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}} - 1 \right)$

حل التمرين الثامن:

(1) تعيين الأساس r لهذه المتتالية ثم u_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 + nr$ و منه:

يعني $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_2 \times u_4 = 189 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 + 3r = 15 \\ (u_0 + 2r)(u_0 + 4r) = 189 \end{cases}$

معناه $\begin{cases} u_0 = 15 - 3r \\ (u_0 + 2r)(u_0 + 4r) = 189 \end{cases}$ و منه نجد

$(15 - r)(15 + r) = 189$ أي $225 - r^2 = 189$ و منه $r^2 = 36$ ، إذن $r = -6$ أو $r = 6$.

إذا كان $r = -6$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$0 < -6 = r = u_{n+1} - u_n$ و بالتالي (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

و هذا مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

إذن $r = 6$.

و منه $u_0 = 15 - 3 \times 6 = -3$ معناه $u_0 = -3$.

(2) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 6n - 3$.

(3) حساب بدلالة n المجموع S :

عدد الحدود في المجموع S هو $n - 1 - 0 + 1 = n$

و بالتالي $S = \frac{n}{2} (u_0 + u_n)$ أي $S = \frac{n}{2} (-3 + 6n - 3)$ و

منه نجد $S = \frac{n}{2} (6n - 6)$ أي $S = 3n^2 - 3n$.

(4) تعيين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S = 240$:

$S = 396$ معناه $3n^2 - 3n = 396$ يكافئ

$3n^2 - 3n - 396 = 0$ يكافئ $n^2 - n - 132 = 0$

$(\Delta = 529)$ و نجد $n = \frac{1 + \sqrt{529}}{2}$ أي $n = 12$.

أو $n = \frac{1 - \sqrt{529}}{2}$ أي $n = -11$ مرفوض لأن $-11 \notin \mathbb{N}$.

حل التمرين التاسع:

(I - 1) تعيين الحد الأول u_0 و الأساس r للمتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$

و منه $\begin{cases} u_{10} = 16 \\ u_{15} = 41 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} u_0 + 10r = 16 \\ u_0 + 15r = 41 \end{cases}$ و بطرح

المعادلتين طرفا لطرف ينتج $5r = 25$ و منه $r = 5$.

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

و منه $u_0 = 16 - 10r = 16 - 50$ معناه $u_0 = -34$.

(2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5n - 34$

(3) تعيين الحد الذي رتبته 10 للمتتالية (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن الحد الأول دليله 0

و بالتالي الحد الذي رتبته 10 هو الحد الذي دليله 9 أي u_9

حيث $u_9 = 5 \times 9 - 34$ و منه $u_9 = 11$.

(4) نبين أن العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) :

العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد

طبيعي n حيث $u_n = 101$

$u_n = 101$ تكافئ $5n - 34 = 101$ معناه $5n = 135$ و منه

$n = 27$. إذن $u_{27} = 101$ و بالتالي العدد 101 حد من حدود

المتتالية (u_n) .

II - (1) تعيين الحد الأول v_0 والأساس q للمتتالية (v_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$

و منه $\begin{cases} v_3 = 24 \\ v_5 = 96 \end{cases}$ تعني $\begin{cases} v_0 \times q^3 = 24 \\ v_0 \times q^5 = 96 \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ q^2 = 24/96 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ 24/q^2 = 96 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ v_0 \times q^5 = 96 \end{cases}$

أي $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ q^2 = 1/4 \end{cases}$. $q^2 = 1/4$ تكافئ $q = 1/2$ أو $q = -1/2$

و بما أن المتتالية (v_n) حدودها موجبة تماماً فإن $q = 1/2$.

و منه نجد $v_0 = \frac{24}{q^3} = 8 \times 24$ معناه $v_0 = 192$.

(2) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 192 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = \frac{192}{2^n}$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

(3) تعيين الحد الذي رتبته 7 للمتتالية (v_n) :

بما أن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن الحد الأول دليله 0 و

بالتالي الحد الذي رتبته 7 هو الحد الذي دليله 6 أي v_6 حيث

$$v_6 = \frac{192}{2^6} = \frac{192}{64} \text{ أي } v_6 = 3.$$

(4) نبين أن العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n) :

العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n) معناه يوجد عدد طبيعي

n حيث $v_n = 12$

$$v_n = 12 \text{ تكافئ } \frac{192}{2^n} = 12 \text{ معناه } \frac{192}{2^n} = 12 \text{ معناه } 2^n = 16$$

أي $2^n = 2^4$ و منه $n = 4$.

إذن $v_4 = 12$ و بالتالي العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n)

حل التمرين العاشر :

(1) تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$ معناه

$u_n = 13 + nr$ و بالتالي $3u_3 - u_5 = 38$ تعني

$$3(13 + 3r) - (13 + 5r) = 38 \text{ معناه } -12 + 4r = 0$$

منه نجد $r = 3$.

(2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 13 + 3n$

(3) تعيين قيمة n حتى يكون العدد 2017 حداً من حدود

المتتالية (u_n) :

العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد

طبيعي n حيث $u_n = 2017$

$$u_n = 2017 \text{ يكافئ } 13 + 3n = 2017 \text{ و منه } 3n = 2004$$

و منه نجد $n = 668$. إذن $u_{668} = 2017$ و بالتالي العدد

2017 حد من حدود المتتالية (u_n) .

(4) حساب المجموع S :

عدد الحدود في المجموع S هو $583 - 0 + 1 = 583$ حيث

المتتاليات العددية - ثانية ثانوي -

$$S = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + \dots + 3u_{582}$$

$$= 3(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{582})$$

$$= 3 \times \frac{583}{2} (u_0 + u_{582})$$

$$\text{مع } u_{582} = 1759 \text{ معناه } u_{582} = 13 + 3 \times 582$$

$$S = \frac{1749 \times 1772}{2} \text{ أي } S = 1549614$$

(5) أ- تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$v_n = u_{2n-1} = 13 + 3(2n-1) \text{ معناه } v_n = 10 + 6n$$

ب- من أجل كل $n \geq 1$ ، حساب $v_{n+1} - v_n$ مع الاستنتاج :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$v_{n+1} - v_n = [10 + 6(n+1)] - [10 + 6n] \text{ و منه}$$

$$v_{n+1} - v_n = 6 \text{ (عدد ثابت موجب تماما) .}$$

المتتالية (v_n) حسابية أساسها 6 و حدها الأول $v_1 = 16$.

و بما أن $v_{n+1} - v_n = 6 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

حل التمرين الحادي عشر :

(1) حساب u_5 ثم u_0 ثم كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{نكتب } u_5 = u_3 + 2r \text{ و منه } u_3 = u_5 - 2r \text{ معناه}$$

$$u_7 = u_5 + 10 \text{ و نكتب } u_7 = u_5 + 2r \text{ معناه } u_7 = u_5 - 10$$

$$\text{إذن } u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875 \text{ تعني}$$

$$(u_5 + 10)^2 + u_5^2 + (u_5 - 10)^2 = 875 \text{ معناه}$$

$$3u_5^2 + 200 = 875 \text{ و منه } 3u_5^2 = 675 \text{ معناه } u_5^2 = 225$$

و منه $u_5 = -15$ مرفوض لأن (u_n) حدودها موجبة تماما أو

$$\boxed{u_5 = 15}$$

$$\text{لدينا } u_5 = u_0 + 5r = 15 \text{ معناه } u_0 - 25 = 15 \text{ و منه نجد}$$

$$\boxed{u_0 = 40}$$

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

$$u_n = 40 - 5n : n \text{ عدد طبيعي}$$

$$(2) \text{ حساب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\text{عدد الحدود في المجموع } S_n \text{ هو } n - 0 + 1 = n + 1$$

$$\text{إذن } S_n = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n) \text{ معناه}$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} (40 + 40 - 5n) \text{ و منه نجد :}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(80-5n)}{2}$$

$$(3) \text{ تعيين قيم العدد الطبيعي } n \text{ حتى يكون } 8S_n \leq 945$$

$$8S_n \leq 945 \text{ يكافئ } 4(n+1)(80-5n) \leq 945 \text{ معناه}$$

$$-20n^2 + 300n - 625 \leq 0 \text{ تكافئ}$$

$$4n^2 - 60n + 125 \geq 0 \text{ . من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ نضع}$$

$$A(x) = 4x^2 - 60x + 125 \text{ و نشكل جدول إشارة ثلاثي}$$

الحدود $A(x)$ حيث بوضع $A(x) = 0$ نجد :

$$x_1 = \frac{60 + \sqrt{1600}}{8} \text{ أي } x_1 = 12.5$$

$$x_2 = \frac{60 - \sqrt{1600}}{8} \text{ أي } x_2 = 2.5$$

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$	
$A(x)$	+	0	-	0	+

$$\text{إذن } 4n^2 - 60n + 125 \geq 0 \text{ إذا و فقط إذا كان } n \leq 2.5 \text{ أو}$$

$$n \geq 12.5 \text{ معناه : } n \in \{0, 1, 2\} \text{ أو } n \in \{13, 14, 15, \dots\}$$

$$\text{و نكتب } n \in \{0, 1, 2\} \cup \{13, 14, 15, \dots\}$$

حل التمرين الثاني عشر :

(1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و

حدها الأول v_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

✓ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ و منه ينتج

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{2}{3}$$

ب- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n + 2 - u_n + 1}{u_n + 2}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2} \text{ منه نجد}$$

ج- استنتاج بدلالة n المجموع T_n :

عدد الحدود في المجموع T_n هو $n+1$.

$$T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}\right)}_{n+1 \text{ fois}} - \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

و منه $T_n = \frac{n+1}{3} - \frac{1}{3}S_n$ ، إذن :

$$T_n = \frac{n+1}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

حل التمرين الثالث عشر :

(1) تعيين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان

$$\alpha = u_0 = u_1 = \dots = u_n = u_{n+1} = \dots$$

$$4\alpha = \alpha + 9 \text{ معناه } 3\alpha = 9 \text{ و منه } \alpha = 3$$

إذن من أجل $\alpha = 3$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

(2) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} + 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n \text{ معناه } v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) \text{ منه}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

(2) أ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ معناه

$$v_n = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2n}} \text{ و نكتب } v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{معناه } v_n = -\frac{1}{2^{2n+1}}$$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ و منه

$$u_n - 1 = v_n(u_n + 2) \text{ و منه } u_n - v_n u_n = 2v_n + 1 \text{ معناه}$$

$$u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n} \text{ و منه } u_n(1 - v_n) = 2v_n + 1$$

$$\text{إذن } u_n = \frac{-\frac{1}{2^{2n+1}} + 1}{1 + \frac{1}{2^{2n+1}}} = \frac{\frac{2^{2n} - 1}{2^{2n+1}}}{\frac{2^{2n+1} + 1}{2^{2n+1}}}$$

$$u_n = \frac{2^{2n+1} - 2}{2^{2n+1} + 1} \text{ أي } u_n = \frac{2(2^{2n} - 1)}{2^{2n+1} + 1}$$

(3) أ- حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

عدد الحدود في المجموع S_n هو $n+1$.

$$S_n = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \text{ و منه}$$

$$\text{معناه } S_n = -\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 4 + 3n + \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 4 + 3n + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \dots + 4^n v_n \\ &= v_0 + 4(v_0 \times q) + 4^2(v_0 \times q^2) + \dots + 4^n(v_0 \times q^n) \\ &= v_0 + 4\left(v_0 \times \frac{1}{4}\right) + 4^2\left(v_0 \times \frac{1}{4^2}\right) + \dots + 4^n\left(v_0 \times \frac{1}{4^n}\right) \end{aligned}$$

$$T_n = (n+1)v_0 \text{ أي } T_n = \underbrace{v_0 + v_0 + v_0 + \dots + v_0}_{n+1 \text{ fois}} \text{ و منه نجد } T_n = n+1$$

(5) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \frac{1}{2^{n(n+1)}}$$

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n) \\ &= \underbrace{(v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0)}_{n+1 \text{ fois}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^n) \\ &= v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n} \\ &= q^{1+2+\dots+n} \end{aligned}$$

لأن $v_0 = 1$ و $1 + 2 + \dots + n$ هو مجموع n حدا متعاقبة لمتتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول يساوي 1 و منه نجد :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ و بالتالي نتحصل على :}$$

$$P_n = \frac{1}{2^{n(n+1)}} \text{ معناه } P_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

حل التمرين الرابع عشر :

(1) أ- تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع إظهار خطوط الرسم :

ب- التخميم : المتتالية (u_n) متقاربة نحو -1 .

$$u_1 = \frac{u_0 + 9}{4} = \frac{4 + 9}{4} = \frac{13}{4} \text{ و } u_2 = \frac{49}{16} \text{ نجد كذلك } u_3 = \frac{193}{64}$$

(3) أ- تعيين العدد الحقيقي β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \beta = \frac{1}{4}(u_n + 9) + \beta$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4\beta + 9) = \frac{1}{4}(u_n + \beta) + \frac{3\beta + 9}{4} \text{ إذن ،}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3\beta + 9}{4} \text{ و بالتالي } (v_n) \text{ هندسية أساسها}$$

$$\frac{1}{4} \text{ إذا و فقط إذا كان } \frac{3\beta + 9}{4} = 0 \text{ معناه } 3\beta + 9 = 0 \text{ و منه نجد } \beta = -3$$

حساب الحد الأول : $v_0 = u_0 + \beta = 4 - 3 = 1$ معناه $v_0 = 1$.

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$:

$$v_n = \frac{1}{4^n} \text{ معناه } v_n = v_0 \times q^n \text{ ، } n \text{ عدد طبيعي من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0 \text{ فإن } 0 < \frac{1}{4} < 1$$

و منه فالمتتالية (v_n) متقاربة نحو 0 .

ج- استنتاج عبارة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - \beta$ و بالتالي من أجل

$$u_n = \frac{1}{4^n} + 3 \text{ فإن } n \in \mathbb{N} \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

و المتتالية (u_n) متقاربة نحو 3 .

(4) حساب بدلالة n المجموعين S_n و T_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= 4 + \left(\frac{1}{4} + 3\right) + \left(\frac{1}{4^2} + 3\right) + \dots + \left(\frac{1}{4^n} + 3\right) \\ &= 4 + \underbrace{\left(3 + 3 + \dots + 3\right)}_{n \text{ fois}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n+1} = 0 \text{ فإن } -1 < -\frac{2}{3} < 0$$

إذن المتتالية (v_n) متقاربة نحو 0 .

$$v_n(u_n - 4) = u_n + 1 \text{ إذن } v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4}$$

$$u_n(v_n - 1) = 4v_n + 1 \text{ منه } u_n = \frac{4v_n + 1}{v_n - 1} \text{ ، إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4v_n + 1}{v_n - 1} = -1$$

و منه صحة التخمين السابق .

(3) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$u_n = \frac{4 \left(-\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1}{\left(-\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(4) حساب المجموع S :

عدد الحدود في المجموع S هو $99 - 0 + 1 = 100$

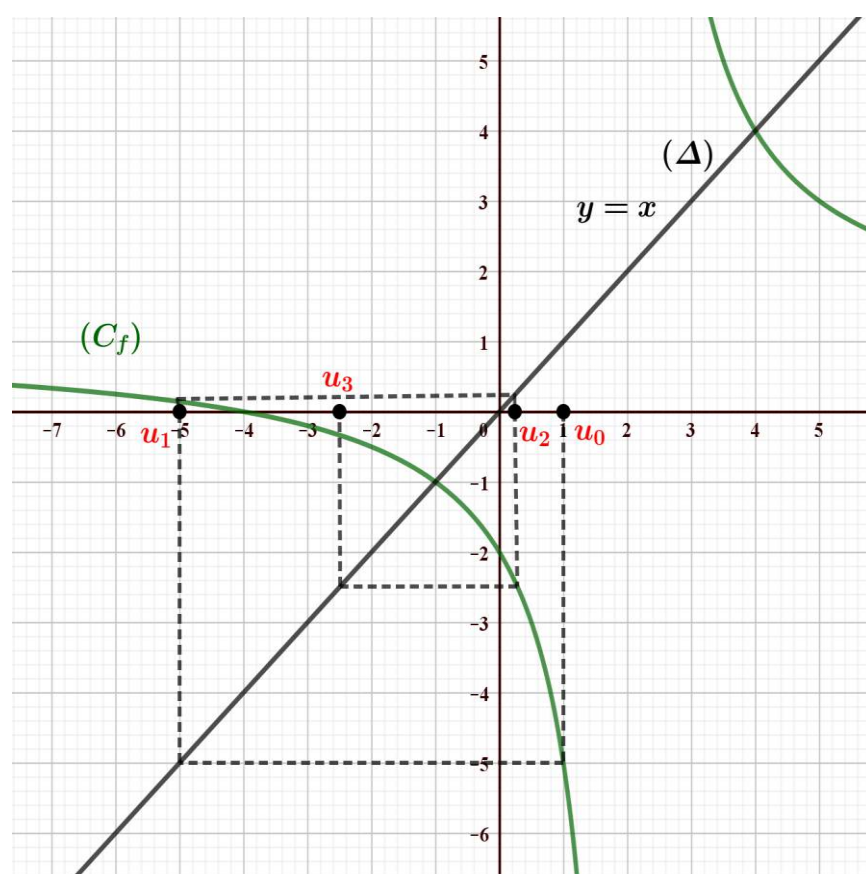
$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{99} = v_0 \frac{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^{100}}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$S = \frac{2}{5} \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^{100} - 1 \right)$$

حل التمرين الخامس عشر :

(1) أ- تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (مع

إظهار خطوط الرسم) :



(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4}$

أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 4} = \frac{\frac{u_n + 4}{u_n - 2} + 1}{\frac{u_n + 4}{u_n - 2} - 4} = \frac{u_n + 4 + u_n - 2}{u_n + 4 - 4(u_n - 2)} = \frac{2u_n + 2}{-3u_n + 12}$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{-3u_n + 12} = \frac{2(u_n + 1)}{-3(u_n - 4)} = -\frac{2(u_n + 1)}{3(u_n - 4)}$$

و منه $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها

$$-\frac{2}{3} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{u_0 + 1}{u_0 - 4} = \frac{1 + 1}{1 - 4} = -\frac{2}{3} \text{ أي } v_0 = -\frac{2}{3} .$$

ب- تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = v_0 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^n \text{ و منه}$$

$$v_n = \left(-\frac{2}{3} \right)^{n+1} \text{ معناه } v_n = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

ج- برهان التخمين السابق بحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$:

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2n+1}$$

د- حساب كلا من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) = +\infty$ و نستنتج أن المتتالية (v_n) متباعدة .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ و نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

(3) حساب المجموعين S و S_n

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

عدد الحدود في المجموع $n+1$ و نكتب :

$$S_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) \text{ معناه } S_n = \frac{n+1}{2}(2n+2) \text{ نجد } S_n = (n+1)^2$$

عدد الحدود في المجموع S هو $2022 - 0 + 1 = 2023$

$$S = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_{2022} v_{2022} = u_0 \times \frac{1}{u_0} + u_1 \times \frac{1}{u_1} + \dots + u_{2022} \times \frac{1}{u_{2022}} = \underbrace{1+1+\dots+1}_{2023 \text{ fois}}$$

و منه نجد $S = 2023$

حل التمرين السادس عشر :

(1) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

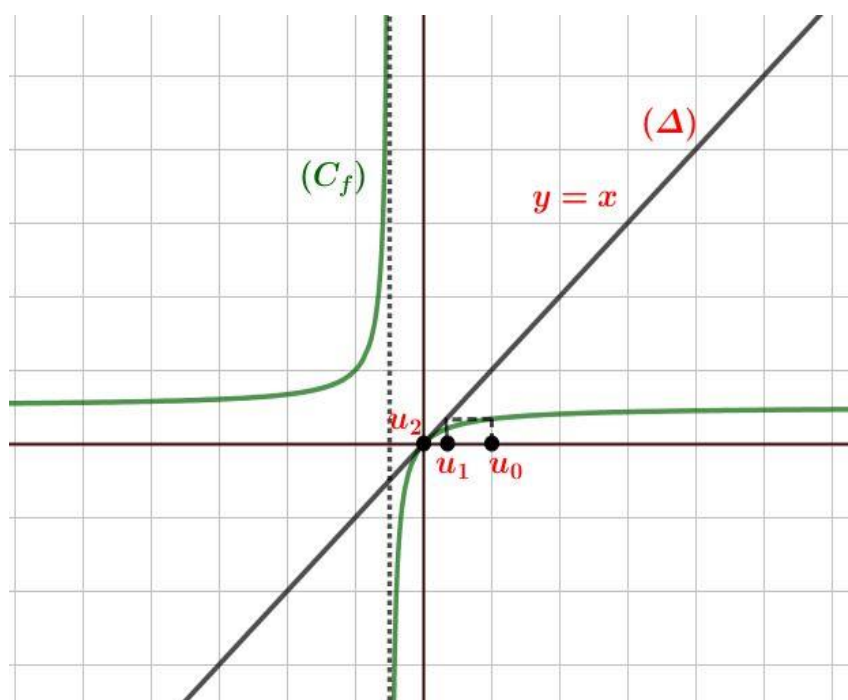
تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ إذا كان :

$$\alpha = u_0 = u_1 = \dots = u_n = u_{n+1} = \dots$$

و منه نجد $\alpha = 2\alpha + 4$ معناه $\alpha = -4$.

إذن من أجل $\alpha = -4$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

(2) أ- رسم كلا من (Δ) و (C_f) :



ب- التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

نلاحظ أن $u_2 < u_1 < u_0$ ، إذن نضمن بأن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

و (u_n) متقاربة حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(2) أ- حساب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 :

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 1 \text{ و } v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{2u_0+1}{u_0} = 3$$

$$\text{و } v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{2u_1+1}{u_1} = 5 \text{ لأن } u_1 = \frac{1}{3}$$

ب- إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$$

و منه $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n}{u_n}$ معناه من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1} - v_n = 2$ و بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

ج- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 + nr$ معناه

$v_n = 2n+1$ و نجد من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 2^n - 4$$

ج- حساب كلا من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ واستنتاج أن (v_n) و (u_n) متاليتان متباعدتان :

بما أن $q = 2 > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ وكذلك $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 4) = +\infty$ وبالتالي (u_n) و (v_n) متاليتان متباعدتان . (صدق النكمن)

د- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 4 - 2^n + 4$$

$$u_{n+1} - u_n = 2^n (2 - 1) = 2^n > 0 \text{ منه } u_{n+1} - u_n = 2^n > 0 \text{ ، إذن}$$

المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. (صدق النكمن)

4 أ- حساب المجموع S_n ثم استنتاج المجموع S'_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= v_0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \end{aligned}$$

$$\text{و منه } S_n = 2^{n+1} - 1$$

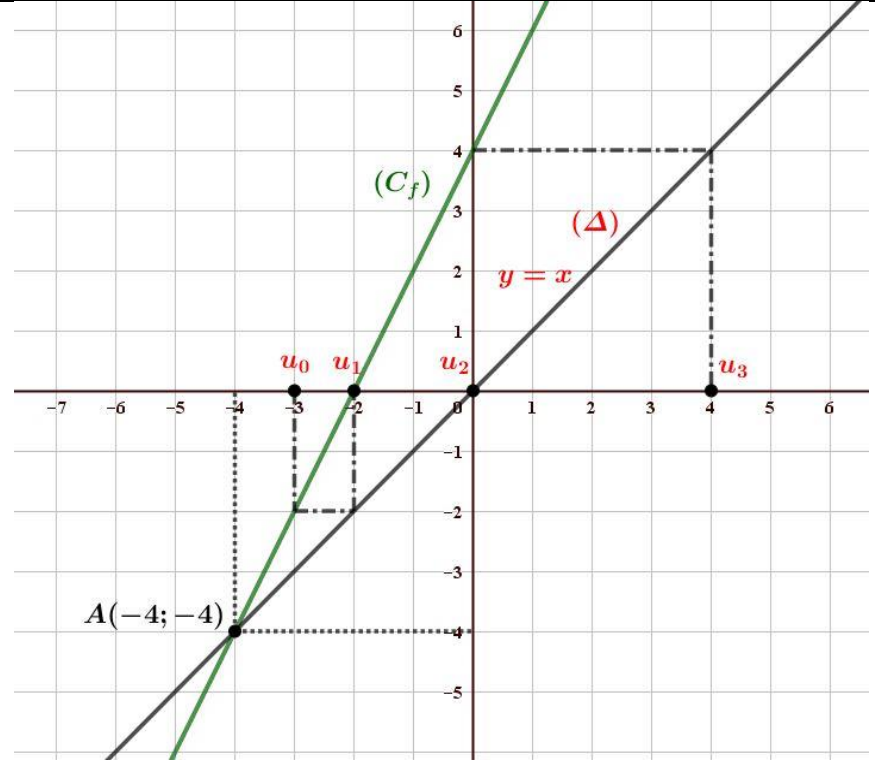
$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \dots + (v_n - 4) \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \underbrace{(4 + 4 + \dots + 4)}_{n+1 \text{ fois}} \end{aligned}$$

$$\text{و منه } S'_n = (2^{n+1} - 1) - 4(n+1)$$

$$S'_n = 2^{n+1} - 4n - 5$$

ب- حساب المجموع T_n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نلاحظ أن } \frac{u_n}{v_n} = 1 - \frac{4}{v_n} \text{ و منه}$$



ب- تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

مع إبراز خطوط الرسم :

تعيين الحدود حسابيا :

$$\begin{cases} u_1 = 2u_0 + 4 = 2(-3) + 4 = -2 \\ u_2 = 2u_1 + 4 = 2(-2) + 4 = 0 \\ u_3 = 2u_2 + 4 = 2(0) + 4 = 4 \end{cases}$$

ج- نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ و منه المتتالية (u_n)

متزايدة على $\mathbb{N}$ و (u_n) متباعدة حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3 أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها

الأول v_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = (2u_n + 4) + 4$$

$$v_{n+1} = 2u_n + 8 = 2(u_n + 4) = 2v_n \text{ معناه } v_{n+1} = 2v_n \text{ و بالتالي}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول هو

$$v_0 = u_0 + 4 = -3 + 4 = 1$$

ب- التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times 2^n$ معناه $v_n = 2^n$.

حيث $u_n = v_n - 4$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_0 = u_1 = \dots = u_n = u_{n+1} = \dots$$

إذن نجد $u_0 = \frac{1}{5}u_0 + 2$ معناه $\frac{4}{5}u_0 = 2$ و منه $u_0 = \frac{5}{2}$.

إذن من أجل $u_0 = \frac{5}{2}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

(2) أ- تعيين قيمة λ حتى تكون المتتالية (v_n) يطلب تعيين

أساسها q و حدها الأول v_0 :

من أجل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = \left(\frac{1}{5}u_n + 2\right) - \lambda = \frac{1}{5}(u_n + 10 - 5\lambda)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - \lambda - 4\lambda + 10) = \frac{1}{5}(v_n - 4\lambda + 10)$$
 معناه

إذن تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ إذا و فقط إذا

$$\text{كان } -4\lambda + 10 = 0 \text{ معناه } \lambda = \frac{5}{2}.$$

$$\text{و حدها الأول } v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times q^n$ ، معناه

$$v_n = -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ و نكتب } v_n = -\frac{2}{5^n}.$$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n :

عدد الحدود في المجموع S_n هو $2n+1-0+1=2n+2$

$$\text{إذن } S_n = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}}{1 - \frac{1}{5}} = -2 \times \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}\right) \text{ أي}$$

$$S_n = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5^{2n+2}} - 1\right)$$

✓ استنتاج المجموع S'_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n} \\ &= \left(1 - \frac{4}{v_0}\right) + \left(1 - \frac{4}{v_1}\right) + \dots + \left(1 - \frac{4}{v_n}\right) \\ &= \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n+1 \text{ fois}} - 4 \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}\right) \end{aligned}$$

$$\text{و منه } T_n = n+1 - 4 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$
 معناه

$$\text{حيث } T_n = n+1 - 4 \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 1 و منه نجد

$$T_n = n+1 - 4 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$
 معناه

$$T_n = n+1 - 8 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ أي } T_n = n-7 + \frac{8}{2^{n+1}} \text{ و نكتب}$$

$$T_n = n-7 + \frac{1}{2^{n-2}}.$$

ج- حساب بدلالة n المجموع C_n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2^n$ و بالتالي نجد :

$$\begin{aligned} C_n &= 5v_0 + \frac{5}{2}v_1 + \frac{5}{2^2}v_2 + \dots + \frac{5}{2^n}v_n \\ &= 5 \times 1 + \frac{5}{2} \times 2 + \frac{5}{2^2} \times 2^2 + \dots + \frac{5}{2^n} \times 2^n \\ &= \underbrace{5+5+5+\dots+5}_{n+1 \text{ fois}} \end{aligned}$$

لأن عدد الحدود في المجموع C_n هو $n-0+1=n+1$

و منه نجد $C_n = 5(n+1)$.

حل التمرين السابع عشر :

(1) تعيين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان :

$$1 + \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{q}\right)^n$$

من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q} = 5$ و حدها الأول يساوي 1 و

$$T'_n = \frac{1}{v_0} \left(\frac{1-5^{n+1}}{1-5} \right) = \frac{1}{8} (1-5^{n+1})$$

✓ حساب الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$:

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n \\ &= v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n) \\ &= \underbrace{(v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0)}_{n+1 \text{ fois}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^n) \end{aligned}$$

و منه $P_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$ حيث $v_0 = -2$ و المجموع

$1+2+\dots+n$ يمثل مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية (n حد) أساسها 1 و حدها الأول يساوي 1 و منه

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ، إذن :}$$

$$P_n = \frac{(-2)^{n+1}}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

حل التمرين الثامن عشر :

الوسط الحسابي : في متتاليتي حسابيتي مجموع حدين طرفين

بساوي ضعف الحد الوسط .

لكن a, b, c حدودا متتابعة من متتاليتي حسابيتي و منه

$$a+c=2b \text{ ، إذن :}$$

$$\text{معناه} \begin{cases} 3b=9 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ تعني} \begin{cases} a+b+c=9 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{معناه} \begin{cases} b=3 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 2 \end{cases} \text{ معناه} \begin{cases} b=3 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{حيث} \begin{cases} b=3 \\ \frac{a+c}{ac} = 2 \end{cases} \text{ حيث } a+c=2b=6 \text{ و بالتالي نجد}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{2n+1} \\ &= (v_0 + \lambda) + (v_1 + \lambda) + \dots + (v_{2n+1} + \lambda) \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_{2n+1}) + \underbrace{(\lambda + \lambda + \dots + \lambda)}_{2n+2 \text{ fois}} \\ &= S_n + \underbrace{(\lambda + \lambda + \dots + \lambda)}_{2n+2 \text{ fois}} \end{aligned}$$

$$\text{و منه } S'_n = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5^{2n+2}} - 1 \right) + (2n+2)\lambda \text{ حيث } \lambda = \frac{5}{2}$$

$$\text{و منه نجد } S'_n = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5^{2n+2}} - 1 \right) + 5(n+1)$$

د- حساب بدلالة n المجاميع :

$$\begin{aligned} T_n &= v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \\ &= v_0^2 + (v_0 \times q)^2 + (v_0 \times q^2)^2 + \dots + (v_0 \times q^n)^2 \\ &= v_0^2 + v_0^2 \times q^2 + v_0^2 \times (q^2)^2 + \dots + v_0^2 \times (q^2)^n \\ &= v_0^2 (1 + q^2 + (q^2)^2 + \dots + (q^2)^n) \end{aligned}$$

$$1 + q^2 + (q^2)^2 + \dots + (q^2)^n \text{ هو مجموع } n+1 \text{ حدا}$$

متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول يساوي 1

$$\text{إذن } T_n = v_0^2 \frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2} = 4 \frac{1-\left(\frac{1}{25}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{25}} \text{ معناه}$$

$$T_n = \frac{25}{6} \left(1 - \left(\frac{1}{25} \right)^{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} T'_n &= \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} \\ &= \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0 \times q} + \frac{1}{v_0 \times q^2} + \dots + \frac{1}{v_0 \times q^n} \\ &= \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{q} + \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{q^n} \\ &= \frac{1}{v_0} \left(1 + \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{q} \right)^n \right) \end{aligned}$$

✓ إذا كان $\alpha = 3$ نجد $\gamma = 10 - 3 = 7$ معناه

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 5, 7)$$

✓ إذا كان $\alpha = 7$ نجد $\gamma = 10 - 7 = 3$ معناه

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (7, 5, 3)$$

حل التمرين العشريون :

الوسط الهندسي : في متتاليت هندسيه جداء حدين طرفين

بساوي مربع الحد الوسط .

لكن α, β, γ حدودا متتابعه من متتاليت هندسيه و

معناه $\alpha \times \gamma = \beta^2$ ، إذن :

$$\begin{cases} \beta^3 = 64 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{7}{8} \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \alpha \times \beta \times \gamma = 64 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{7}{8} \end{cases} \text{ تعني}$$

$$\begin{cases} \beta = 4 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \beta = 4 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ معناه}$$

$$\text{حيث } \begin{cases} \beta = 4 \\ \frac{\alpha + \gamma}{\alpha\gamma} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ حيث } \alpha\gamma = \beta^2 = 16 \text{ و منه نجد}$$

$$\begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha + \gamma = 10 \end{cases}$$

بما أن $\begin{cases} \alpha + \gamma = 10 \\ \alpha\gamma = 16 \end{cases}$ فإن α و γ حلان للمعادلة من

الدرجة الثانية التاليت (راجع الأعمال الموجهة لمحور

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \text{ : كثرات الحدود)}$$

مميز المعادلة هو $\Delta = 36$.

ونجد $x = 2$ أو $x = 8$

✓ إذا كان $\alpha = 2$ فإن $\gamma = 10 - 2 = 8$ و منه نجد

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 4, 8)$$

✓ إذا كان $\alpha = 8$ فإن $\gamma = 10 - 8 = 2$ و منه نجد

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (8, 4, 2)$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a(6 - a) = 3 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} b = 3 \\ ac = 3 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} b = 3 \\ \frac{6}{ac} = 2 \end{cases} \text{ و منه}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ -a^2 + 6a - 3 = 0 \end{cases}$$

مميز المعادلة $-a^2 + 6a - 3 = 0$ هو $\Delta = 24$

و منه نجد $a = 3 + \sqrt{6}$ أو $a = 3 - \sqrt{6}$

✓ إذا كان $a = 3 - \sqrt{6}$ نجد $c = 6 - (3 - \sqrt{6})$

معناه $c = 3 + \sqrt{6}$ و منه

$$(a, b, c) = (3 - \sqrt{6}, 3, 3 + \sqrt{6})$$

✓ إذا كان $a = 3 + \sqrt{6}$ نجد $c = 6 - (3 + \sqrt{6})$

معناه $c = 3 - \sqrt{6}$ و منه

$$(a, b, c) = (3 + \sqrt{6}, 3, 3 - \sqrt{6})$$

حل التمرين التاسع عشر :

لكن α, β, γ حدودا متتابعه من متتاليت حسابيه و

معناه $\alpha + \gamma = 2\beta$ ، إذن :

$$\begin{cases} 3\beta = 15 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 83 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 15 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 83 \end{cases} \text{ تعني}$$

$$\begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha^2 + \gamma^2 = 58 \end{cases} \text{ حيث } \begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 83 \end{cases} \text{ معناه}$$

$\gamma = 2\beta - \alpha = 10 - \alpha$ و منه نجد

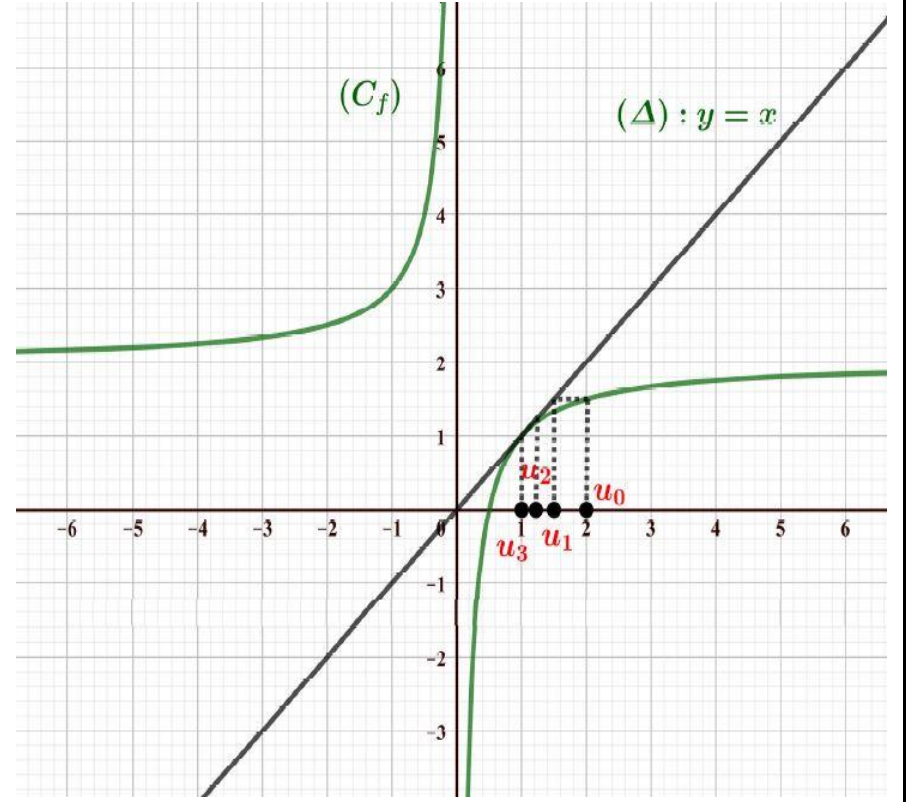
$$\begin{cases} \beta = 5 \\ 2\alpha^2 - 20\alpha + 42 = 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha^2 + (10 - \alpha)^2 = 58 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha^2 - 10\alpha + 21 = 0 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

مميز المعادلة $\alpha^2 - 10\alpha + 21 = 0$ هو $\Delta = 16$

و منه نجد $\alpha = 3$ أو $\alpha = 7$

(1) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل :



(2) التخمين : $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ و بالتالي المتناوبة (u_n)

متناقصة على $\mathbb{N}$ و المتناوبة (u_n) متقاربة نحو 1 .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n}$$

المعطيات نعلم أن $u_n > 1$ و بالتالي إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

من إشارة البسط $-u_n^2 + 2u_n - 1$:

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n < 0 \text{ و } -u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n - 1)^2$$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

(4) أ- من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} - v_n = 3 + \frac{1}{u_{n+1} - 1} - 3 - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 1}$$

معناه $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$ عدد ثابت و بالتالي المتتالية

(v_n) حسابية أساسها 1 و حدها الأول

$$v_0 = 4 \text{ معناه } v_0 = 3 + \frac{1}{u_0 - 1} = 3 + 1$$

ب- كتابة عبارة الحد العام :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 + nr$ ، معناه

$v_n = n + 4$. و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_n - 3 = \frac{1}{u_n - 1} \text{ و منه } v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$$

$$u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 3} \text{ و منه } u_n = 1 + \frac{1}{v_n - 3}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{1}{n + 4 - 3}$ معناه

$$u_n = 1 + \frac{1}{n + 1}$$

و منه نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right) = 1$ أي أن المتتالية

(u_n) متقاربة نحو 1 . (صحة التخمين)

ج- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

طريقة 1 : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)+1} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \text{ معناه}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $(n+2)(n+1) > 0$ و بالتالي

$u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

طريقة 2 : نلاحظ أن $u_n = g(n)$ حيث g هي الدالة

المعرفة على $[0; +\infty[$: $g(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ و هي

متناقصة تماما على $[0; +\infty[$ لأن g قابلة للإشتقاق على

$[0; +\infty[$ و من أجل كل $x \geq 0$ ،

$$g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \text{ ، إذن } (u_n) \text{ متناقصة على } \mathbb{N} .$$

(صحة التخميه) .

د- حساب بدلالة n المجموع S_n :

عدد الحدود في المجموع S_n هو $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} \left(4 + 1 + \frac{1}{n+1} \right) \text{ معناه } S_n \text{ و منه}$$

$$S_n = \frac{5(n+1)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(5n+6)$$

تقول الحكمة :

"إذا سعيت نحو أهدافك ، أهدافك بدورها ستسعي نحوك"

كتاب الأستاذ : حناش نبيل

لا ننسونا من صالح دعائكم ...