

مجلة كثرات الحدود

2¹

ثانوي جميع الشعب العلمية

« تقني رياضي
« رياضيات
« علوم تجريبية

ملخص الدروس
تطبيقات و تمارين مع الحل المفصل

من إعداد الأستاذ : وليد لعويجي

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)
 يسمى العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

إذا كان	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																		
حلول المعادلة:	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$																		
التحليل:	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_1)^2$	لا يمكن التحليل																		
الإشارة:	<table><tr><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>إشارة a</td><td>$(-a)$</td><td>إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table>	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	إشارة a	$(-a)$	إشارة a	إشارة a	<table><tr><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>إشارة a</td><td></td><td>إشارة a</td></tr></table>	$-\infty$	x_0	$+\infty$	إشارة a		إشارة a	<table><tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>إشارة a</td><td></td></tr></table>	$-\infty$	$+\infty$	إشارة a	
$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																		
إشارة a	$(-a)$	إشارة a	إشارة a																		
$-\infty$	x_0	$+\infty$																			
إشارة a		إشارة a																			
$-\infty$	$+\infty$																				
إشارة a																					

إذا كان x و y عدداً حقيقياً فإن:

$\sqrt{x^2} = x $	$ -x = x $	$ x \geq 0$
$ x+y \leq x + y $	$\frac{ x }{ y } = \frac{ x }{ y }$ مع $y \neq 0$	$ x \times y = x \times y $
$ x-a = \begin{cases} x-a & ; x \geq a \\ -x+a & ; x < a \end{cases}$	$ x+a = \begin{cases} x+a & ; x \geq -a \\ -x-a & ; x \leq -a \end{cases}$	$ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$
$ A(x) = \begin{cases} A(x) & ; A(x) \geq 0 \\ -A(x) & ; A(x) < 0 \end{cases}$	إذا كان $ x \geq a$ فإن: $x \geq a$ أو $x \leq -a$	إذا كان $ x \leq a$ فإن: $-a \leq x \leq a$

لتكن a, b, c و d أعداد حقيقية موجبة تماماً. نضع $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$.

جمع	طرح	ضرب	قسمة
$a + c \leq x + y \leq b + d$	$a - d \leq x - y \leq b - c$	$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$	$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

ملاحظة: يجب التمييز بين الكسور الرئيسية و الكسور الفرعية

$$\frac{\frac{A(x)}{B(x)}}{\frac{C(x)}{D(x)}} = \frac{A(x)C(x)}{B(x)D(x)} \quad \text{و} \quad \frac{\frac{A(x)}{B(x)}}{C(x)} = \frac{A(x)}{B(x)C(x)}$$

نسمي دالة كثير حدود كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد طبيعي و $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية ثابتة.
 ✓ يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير حدود f ،
 وتسمى الأعداد $a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملاته، ويسمى الحد الذي درجته p $a_p x^p$.

مثال :

- ❖ كل دالة ثابتة : $x \mapsto a_0 (a_0 \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0
- ❖ كل دالة تآلفية : $x \mapsto ax + b (a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1
- ❖ كل دالة $x \mapsto ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية).

العمليات على كثيرات الحدود

- ❖ مجموع فرق وجداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود
- ❖ مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- ❖ جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته مجموع درجتيهما.

تساوي كثيري حدود:

يكون كثير حدود معدوما إذا فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة
 يكون كثيرا حدود، غير معدومين متساويين إذا فقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.
مثال: إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 3$ فإن $a = 2$ ، $b = 0$ ، $c = -1$ ، $d = 3$.

جذر كثير حدود

f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي، α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$.

إشارة ثلاثي الحدود:

الحالة ①: $\Delta > 0$

لدينا $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ حيث $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ بفرض $x_1 < x_2$ نحصل على الجدول التالي:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
إشارة $x - x_1$	-	0	+	+
إشارة $x - x_2$	-	-	0	+
إشارة $ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	إشارة $(-a)$	إشارة a

الحالة ②: $\Delta = 0$

لدينا $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ حيث $x_1 = \frac{-b}{2a}$ ، ومنه إشارة $ax^2 + bx + c$ من إشارة a ، ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
إشارة $ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	إشارة a

الحالة ③: $\Delta < 0$

إشارة $ax^2 + bx + c$ يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة a

	x^3	$-x^2$	$-4x$	$+4$
	1	-1	-4	4
	1	0	1	0
	1	0	-4	0

لدينا: $f(1) = 0$
 إذن حسب طريقة هورنر
 $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
 $= (x-1)(x^2 - 4)$

4- طريقة المطابقة

نبين أن 1 جذر لـ f ثم نطابق بالمعاملات:
 $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
 $= ax^3 + (c-a)x^2 + (c-b)x - c$
 بالمطابقة نجد: $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-4$
 $f(x) = (x-1)(x^2 - 4)$ ومنه:
 $= (x-1)(x+2)(x-2)$

3- طريقة التحليل

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2(x-1) - 4(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 - 4) \\ &= (x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

2- طريقة القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline -4x + 4 & \\ 4x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

حلول معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$:

لحل معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$ نقوم بتحليل العبارة بإحدى طرائق السابقة (مع جذر معلوم) ثم نحل المعادلة أو المتراجحة.

مثال: لدينا: $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

1 حساب $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6 \\ &= 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 - 6 + 26 = 0 \end{aligned}$$

ومنه $P(-2) = 0$

2 أ) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $P(x) = (x+2)Q(x)$ بما أن $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و -2 جذر له فإنه يكتب على

الشكل: $P(x) = (x+2)Q(x)$

تعيين $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x+2 \\ -2x^3 - 4x^2 & \\ \hline -5x^2 - 13x - 6 & \\ 5x^2 + 10x & \\ \hline -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه: $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

ب) استنتاج تحليل لـ $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى:
 لدينا $P(x) = (x+2)Q(x)$ نحل المعادلة $Q(x) = 0$:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) \\ &= 25 + 24 = 49 > 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} ; \quad x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

إذن $Q(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$ ومنه $P(x) = 2(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$		
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$Q(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

وبالتالي حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in [-2; \frac{1}{2}] \cup [3; +\infty[$.

المعادلات مضاعفة التربيع

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

يسمى X مجهولا مساعدا. $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c \end{cases}$ حل هذه المعادلة يؤول إلى حل الجملة :

بعد حل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : (1) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$...

نضع $X = x^2$ ، $X > 0$ ومنه المعادلة (1) تكافئ : (2) $2X^2 + 5X + 2 = 0$...

حل المعادلة (2) حساب Δ : $\Delta = 9$ ومنه $\Delta > 0$ أي المعادلة تقبل حلين : $X_1 = -\frac{1}{2} < 0$ (مرفوض) ، $X_2 = -2 < 0$ (مرفوض)

الخلاصة : إذن المعادلة (2) ليس لها حلول و بالتالي المعادلة (1) ليس لها حلول أيضا.

تطبيق :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية :

$$x^4 + x^2 - 6 = 0 \quad (1) \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (2)$$

المتراجحات مضاعفة التربيع

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل:

$ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ أو $ax^4 + bx^2 + c > 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

يؤول إلى حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة : $ax^4 + bx^2 + c$

مثال :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$

① نضع : (1) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$...

نضع كذلك : $X = x^2$ ، $X \geq 0$ ومنه المعادلة (1) تكافئ : (2) $X^2 - 7X + 12 = 0$...

حل المعادلة (2) حساب Δ : $\Delta = 1$ ومنه $\Delta > 0$ أي المعادلة تقبل حلين : $X_1 = \frac{7+1}{2} = 4 \geq 0$ ، $X_2 = \frac{7-1}{2} = 3 \geq 0$

ومنه 3 و 4 حلان للمعادلة (2).

-استنتاج حلول المعادلة (1):

طريقة 1 : $x^2 = X$ يكافئ $|x| = \sqrt{X}$ ومنه:

لدينا: $X_1 = 4$ إذن $|x| = \sqrt{X_1} = 2$ وعليه $x_1 = 2$ أو $x_2 = -2$.

لدينا: $X_2 = 3$ إذن $|x| = \sqrt{X_2} = \sqrt{3}$ وعليه $x_2 = \sqrt{3}$ أو $x_2 = -\sqrt{3}$.

الخلاصة : حلول المعادلة (1) في $\mathbb{R}$ هي: $S = \{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\}$.

طريقة 2 :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 - 7x^2 + 12 \\
 &= X^2 - 7X + 12 \\
 &= 1(X-3)(X-4) \quad \text{نستعمل التحليل} \\
 &= (x^2-3)(x^2-4) \quad X = x^2
 \end{aligned}$$

$$(x^2-3)(x^2-4) = 0 \text{ يكافئ } x^2-3=0 \text{ أي } x^2=3 \text{ وعليه } x_1 = \sqrt{3} \text{ أو } x_2 = -\sqrt{3} \text{ أو } x^2-4=0 \text{ وعليه } x_3 = 2 \text{ أو } x_4 = -2$$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$			
x^2-3	+	+	0	-	0	+			
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+		
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$$

$$= X^2 - 7X + 12$$

$$= (X-3)(X-4)$$

$$= (x^2-3)(x^2-4)$$

② دراسة إشارة f(x) :

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي : $S =]-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; 2[$

حل معادلات عن طريق الإستنتاج :

لدينا مما سبق حلول المعادلة : $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$ هي : 2 ، 3 و $-\frac{1}{2}$
 $\hookrightarrow$ لحول المعادلة : $2x^6 - x^4 - 13x^2 - 6 = 0 \dots (1)$ نقوم بوضع $X = x^2$

$$\begin{cases}
 X=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2} \text{ أو } x=-\sqrt{2} \\
 X=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3} \text{ أو } x=-\sqrt{3} \\
 X=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2} \text{ مرفوض}
 \end{cases}$$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \dots$ ولدينا مما سبق

$\hookrightarrow$ لحول المعادلة : (1) $2x\sqrt{x} - x - 13\sqrt{x} - 6 = 0 \dots$ نقوم بوضع $X = \sqrt{x}$ بحيث $x \geq 0$

$$\begin{cases}
 X=1 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \\
 X=3 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \\
 X=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=-\frac{1}{2} \text{ مرفوض}
 \end{cases}$$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \dots$ ولدينا مما سبق

$\hookrightarrow$ لحول المعادلة : (1) $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{13}{x} - 6 = 0 \dots$ نقوم بوضع $X = \frac{1}{x}$ بحيث $x \neq 0$

$$\begin{cases}
 X=2 \Rightarrow \frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\
 X=3 \Rightarrow \frac{1}{x}=3 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\
 X=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-2
 \end{cases}$$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \dots$ ولدينا مما سبق

$\hookrightarrow$ بعبارة أخرى لحلول معادلة من الشكل : (1) $3f(x)^3 - f(x)^2 - 13f(x) - 6 = 0 \dots$ نقوم بوضع $X = f(x)$ حيث $x \in D_f$

$$\begin{cases}
 X=2 \Rightarrow f(x)=2 \Rightarrow \dots \\
 X=3 \Rightarrow f(x)=3 \Rightarrow \dots \\
 X=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \dots
 \end{cases}$$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \dots$ ولدينا مما سبق

حلول معادلات و متراجحات الصماء :

المعادلات الصماء :

لحل معادلة من الشكل (*) $\sqrt{A(x)} = B(x) \dots\dots\dots (*)$ نتبع الخطوات التالية : حيث $A(x)$ و $B(x)$ كثيري حدود

① نعين D مجموعة تعريف المعادلة (*) . (مجموعة تعريف $A(x)$)

② من أجل كل x من D : تكافئ (*) $\begin{cases} A(x) = [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

مثال :

نحل المعادلة : (*) $\sqrt{x+2} = x+1 \dots (*)$ إذن مجموعة تعريف (*) هي : $D = [-2; +\infty[$

$$\begin{cases} x+2 = x^2+1+2x \\ x \geq -1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x+2 = (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ من أجل كل } x \text{ من } D : (*) \text{ تكافئ}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.61, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.61 \\ x \geq -1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة (*) هي $S = \{x_2 \approx 0.61\}$ ، x_1 مرفوض لأن: $x_1 < -1$.

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الصماء التالية :

$$\sqrt{x^2-2x} = x+1 \quad 1$$

$$\sqrt{2x-3} = 2x+1 \quad 2$$

$$\sqrt{x^2+1} = x^2 \quad 3$$

$$\sqrt{x^2-2x+3} = 3x+2 \quad 4$$

المتراجحات الصماء :

$$\sqrt{u(x)} \leq \sqrt{v(x)} \cdots (1) \text{ الحالة :}$$

1 نضع : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ و $g(x) = \sqrt{v(x)}$ ونحدد كل من D_f و D_g بحيث : $D_f = \{x; u(x) \geq 0\}$ و $D_g = \{x; v(x) \geq 0\}$

2 تكون المتراجحة (1) معرفة على مجال D حيث : $D = D_f \cap D_g$

3 بما أن $f(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة (موجبان معا) نربع طرفي المتراجحة (1)

4 من أجل كل x من D نحدد إشارة الفرق $u(x) - v(x)$ ونستنتج حلول المتراجحة (1)

مثال :

$$\sqrt{2x-5} \geq \sqrt{x+3} \text{ حل المتراجحة :}$$

$$\text{نضع : } f(x) = \sqrt{x+3} \text{ أي : } D_f =]-3; +\infty[\text{ و } g(x) = \sqrt{2x-5} \text{ أي : } D_g = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[\text{ وعليه } D = D_f \cap D_g = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$$

من أجل كل x من D نربع الطرفين نجد : $2x-5 \geq x+3$ أي $x \geq 8$

ومنه حلول المتراجحة هي : $S = [8; +\infty[$

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات الصماء التالية :

$$\sqrt{x^2-2x} > \sqrt{2x+1} \quad 1$$

$$\sqrt{2x-3} < \sqrt{x^2+3x} \quad 2$$

$$\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{4x+2} \quad 3$$

$$\sqrt{x^2-2x+3} \leq \sqrt{1+x} \quad 4$$

بعض طرق التي يمكن حل بها المتراجحة الصماء :

1 نربع الطرفين و ندرس إشارة الفرق $u(x)^2 - v(x)^2$

2 إستعمال المرافق

3 إستعمال البرهان بالخلف

مثال الضرب في المرافق :

$$\text{حل المتراجحة : } \sqrt{x^2+5} \geq 2x \cdots (**)$$

$$\text{نضع : } f(x) = \sqrt{x^2+5} \text{ ومنه : } D_f = \mathbb{R}$$

من أجل كل x من $] -\infty; 0]$: $2x \leq 0$ ومنه المتراجحة (**) محققة دوما : $S_1 =] -\infty; 0]$

من أجل كل x من $[0; +\infty[$: ندرس إشارة الفرق $\sqrt{4x^2+5} - 2x$

نستعمل المرافق : $\sqrt{4x^2+5} + 2x$

$$\sqrt{4x^2+5}-2x = \frac{(\sqrt{4x^2+5}+5)(\sqrt{4x^2+5}+2x)}{\sqrt{4x^2+5}} = \frac{(\sqrt{4x^2+5})^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+5}} = \frac{5}{\sqrt{4x^2+5}} > 0$$

ومنه : $S_2 = [0; +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (**) هي : $S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$

مثال البرهان بالخلف

من أجل كل x من $[0; +\infty[$ نفرض أن : $\sqrt{4x^2+5} < 2x$

نربع الطرفين $(\sqrt{4x^2+5})^2 < (2x)^2$ أي $4x^2+5 < 4x^2$ نجد $5 < 0$ وهذا تناقض مع الفرض ومنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن :

$\sqrt{4x^2+5} \leq 2x$. إذن : $S_1 = [0; +\infty[$ ومن أجل x من $]-\infty, 0]$ فإن : $2x < 0$ فالمتراجحة محققة دوماً ومنه $S_2 =]-\infty, 0]$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (**) هي : $S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$

ملاحظة :

في حالة المتراجحة $\sqrt{u(x)} \leq v(x)$ تبقى نفس الخطوات السابقة صحيحة ماعدا في حالة $v(x) < 0$ فإن المتراجحة لا تقبل حلول لأن : $\sqrt{u(x)}$ عدد موجب دوماً .

مجموع وجداء حلي معادلة

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) ax^2+bx+c مع $(a \neq 0)$

نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين هما x_1 و x_2 حيث

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا وضعنا $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 \times x_2$ حيث S هو مجموع الحلين و P هو جداءهما فإن

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad P = \frac{c}{a}$$

حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر وذلك باستعمال المجموع S والجداء P

تعيين عددين علم مجموعهما و جداءهما

يكون مجموع عددين هو S وجداءهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x والتي تكتب بالشكل التالي $x^2 - Sx + P$

تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) ax^2+bx+c مع $(a \neq 0)$

❖ إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتهما مختلفتان .

❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماماً .

❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماماً .

مثال تطبيقي :

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$$

الحل

لدينا : $S = -\frac{2(m+1)}{m-1}$ و $P = \frac{m}{m-1}$

❖ إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى $4x+1=0$ ومنه $x = -\frac{1}{4}$.

❖ إذا كان $m \neq 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الثانية حيث : $\Delta_m = 4(3m+1)$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$

دراسة إشارة P و S

m	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-2m-2$	+	0	-	-
$m-1$	-	-	0	+
S	-	+	-	-

m	$-\infty$	0	1	$+\infty$
m	-	0	+	+
$m-1$	-	-	0	+
P	+	-	+	+

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$	
Δ_m	-	-	0	+	+	+	
S_m	-	0	+	+	+	-	
P_m	+	+	+	0	-	+	
النتائج	المعادلة لا تقبل حلول		0	المعادلة تقبل حلين موجبين تماما	0	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة	المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

الأستاذ وليد لعويجي

التمرين رقم (1): ليكن $P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ كثير حدود حيث

1. تحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$.
2. عين كثير الحدود $q(x)$ حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} : P(x) = (x-1)q(x)$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.
4. شكل جدول إشارة $P(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $-4x^2 + 3x + 4 \leq \frac{3}{x}$.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (2): نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m

$$(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$$

1. عين قيم العدد الحقيقي m حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية.
2. عين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E) ثم استنتج الحل الآخر لها.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (3): نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

1. أثبت أن (-1) هو جذر ل $P(x)$.
2. أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $f(x) = (x+1)Q(x)$.
3. أدرس حسب قيم x إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) > 0$.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (4): f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$ ، حيث α و β عددان حقيقيان.

1. عين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0) = 2$.
2. نعتبر فيما يلي : $\alpha = -1$ و $\beta = 2$:

- (أ) أوجد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x) = (x+1)g(x)$
- (ب) حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$ و $f(x) > 0$

الحل موجود في الصفحة 16

التمرين رقم (5): نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x) = x^2 - mx + 1$ حيث m وسيط حقيقي ، وليكن (C_m) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 عيّّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.
- 2 عيّّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متميزتين.
- 3 عيّّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.
- 4 عيّّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2, -3)$.

الحل موجود في الصفحة 17

التمرين رقم (6): نعتبر المعادلة : (1) $x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0$

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

④ $x^2 + 3x - 4 = 0$

② $x^2 + x + 2 = 0$

① $x^2 + x - 3 = 0$

(2) أثبت أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2) $(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$

(3) إستنتج حلول المعادلة (2)

(4) حل المتراجحة $\frac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x} \leq 0$

الحل موجود في الصفحة 18

تمرين 1 :

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x : $x^2 - (\sqrt{3}+1)x + 2\sqrt{3} - 2 = 0$ (E)...

1 أثبت أن المميز: $\Delta = (3 - \sqrt{3})^2$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلين متميزين: α و β (حسابهما غير مطلوب).

2 أحسب $\alpha^2 + \beta^2$ دون حساب α و β .

3 (أ) تحقق من أن $\alpha = 2$ هو حل للمعادلة (E) ثم استنتج قيمة β الحل الآخر للمعادلة (E).

(ب) حل ثلاثي الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^2 - (\sqrt{3}+1)x + 2\sqrt{3} - 2$ ، ثم ادرس اشارته.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $x^2 - (\sqrt{3}+1)x + 2\sqrt{3} - 2 < 0$

(د) حل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهولين a و b : $\begin{cases} a+b = \sqrt{3}+1 \\ ab = 2\sqrt{3}-2 \end{cases}$

تمرين 2 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1 احسب $f(3)$ ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$ إلى جداء عاملين.

2 حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$; $f(x) < 0$

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\frac{2x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 + x - 2} \geq 0$

تمرين 3 :

ليكن $f_m(x)$ كثير حدود لمتغير x حيث : $f_m(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + m - 2$

1 أحسب $f_0(0)$ و $f_2(-1)$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $f_1(x) = 0$ و $f_2(x) = 0$.

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $f_1(x) \geq 0$ و $f_2(x) \leq 0$.

4 عين قيم m حتى يكون $x_1 = 1$ حل للمعادلة $f_m(x) = 0$.

5 عين قيم m في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $f_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

(ب) المعادلة $f_m(x) = 0$ لا تقبل حلول.

(ج) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حل مضاعف.

(د) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متميزين.

(هـ) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حل وحيد.

(و) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

تمرين 4 :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$(1)

1 بين أن 0 ليس حلا للمعادلة (1).

2 بين أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \text{....(2)}$$

3 بوضع : $u = x + \frac{1}{x}$ ، أحسب u^2 بدلالة x .

4 بين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل $6u^2 - 5u - 50 = 0 \dots (3)$

5 حل المعادلة (3) ثم استنتج حلول المعادلة (1).

تمرين 5 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ كثير الحدود $P(x)$ المعرفة بـ : $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

1 أحسب $P(1)$ ، ماذا نستنتج

2 أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = (x-1)Q(x)$

3 حل كثير الحدود $P(x)$ إلى جداء عوامل. ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

4 استنتج حلول المعادلة : $|x-1|^3 - 4(x-1)^2 + 5|x-1| - 2 = 0$

5 نضع : $g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$

(أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 + x - 2 = 0$

(ب) عين قيم العدد الحقيقي x بحيث يكون للعبارة $g(x)$ معنى.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $g(x) \leq 0$

تمرين 6 :

• $P(x) = x^3 - (6+\alpha)x^2 + (13-\alpha)x - (\alpha-14)$: كثير حدود و α عدد حقيقي حيث :

(I) عين العدد α حتى يكون 3 جذر لكثير الحدود $P(x)$

(II) نضع $\alpha = 2$ أي : $P(x) = x^3 - 8x^2 + 11x + 12$

1 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث : $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

3 استنتج حلول المعادلة : $x\sqrt{x} - 8x + 11\sqrt{x} + 12 = 0$

4 استنتج حلول المعادلة : $\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{x-1}{2}\right) + 12 = 0$

5 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \leq 0$ ثم استنتج إشارة $P\left(\frac{2021}{2022}\right)$

تمرين 7 :

• $P_m(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m+1)x^3 - (2+m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2$: كثير الحدود $P_m(x)$ حيث :

1 عين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة .

2 تحقق أن 2 جذر لكثير الحدود $P_2(x)$

3 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث : $P_2(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $3x^2 + 2x - 1 = 0$

استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $P_2(x) = 0$

5 أدرس إشارة $P_2(x)$ ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة : $3x^3 + 2 \leq 4x^2 + 5x$

تمرين 01 :

1 حلل العبارة: $(x+3)(x+2) + (x+3)(x+1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(x+3)(x+1) = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

3 أدرس إشارة العبارة: $(x+3)(x+1)$

x	$-\infty$	.	.	$+\infty$
$x+3$				
$x+1$				
$(x+3)(x+1)$				

تمرين 02 :

1 حلل العبارة: $x^2 - 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2 - 4 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

3 أدرس إشارة العبارة: $x^2 - 4$

x	$-\infty$	.	.	$+\infty$
$x^2 - 4$				

تمرين 03 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 حلل العبارة: $4x^2 - 12x + 9$

.....

.....

.....

3 أدرس إشارة العبارة: $4x^2 - 12x + 9$

x	$-\infty$	.	.	$+\infty$
$4x^2 - 12x + 9$				

تمرين 04 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 حلل العبارة: $2x^2 - 5x - 3$

.....

.....

.....

3 أدرس إشارة العبارة: $2x^2 - 5x - 3$

x	$-\infty$	.	.	$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$				

تمرين 05 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{x-5}{(x+1)(x-1)} > 0$

2 إشارة العبارة: $\frac{x-5}{(x+1)(x-1)}$

x	$-\infty$	.	.	.	$+\infty$
.					
.					
.					
.					

ومنه حلول المتراجحة:

تمرين 06 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{6x^2-x-2}{x+2} \geq 0$

x	$-\infty$	.	.	.	$+\infty$
.					
.					
.					
.					

ومنه حلول المتراجحة:

تمرين 07 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(4x^2-4x-3)(x+3) < 0$

x	$-\infty$	.	.	.	$+\infty$
.					
.					
.					

ومنه حلول المتراجحة:

تمرين 08 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $4x^4-4x^2-3 < 0$

x	$-\infty$	.	.	.	$+\infty$
.					
.					
.					

ومنه حلول المتراجحة:

حل التمرين رقم (1) الموجود في الصفحة 9:

1 التحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$

$$P(1) = -4(1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) - 3 = -4 + 3 + 4 - 3 = 0 \quad \text{ومنه: } P(1) = 0$$

2 تعيين كثير الحدود $q(x)$

$$P(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b - a = 3 \\ c - b = 4 \\ -c = -3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$a = -4 \quad b = -1 \quad c = 3 \quad \text{إذن:}$$

$$P(x) = (x-1)(-4x^2 - x + 3)$$

3 حل المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 & (1) \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{معناه } P(x) = 0 \text{ يكافئ } (x-1)(-4x^2 - x + 3) = 0$$

يكافئ

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

4 حل المعادلة (2):

$$\Delta = 49 > 0 \quad \text{ومنه للمعادلة (2) حلين هما: } x_2 = -1 \quad \text{و} \quad x_3 = \frac{3}{4}$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة } P(x) = 0 \text{ هي } x_2 = -1 \quad \text{و} \quad x_3 = \frac{3}{4}$$

حل التمرين رقم (2) الموجود في الصفحة 9:

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط m : $(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$ حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية، يجب أن يكون $m^2 - 4 \neq 0$

$$m^2 \neq 4 \quad \text{يكافئ } m \neq 2 \quad \text{أو} \quad m \neq -2 \quad \text{إذن } m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

② تعيين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E):

$$\text{لدينا } m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \text{يكافئ } (m^2 - 4)(0)^2 - 2m \times (0) + m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\text{يكافئ } (m-1)^2 = 0 \quad \text{إذن للمعادلة } m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ حل مضاعف هو } m = 1$$

تعيين الحل الآخر للمعادلة (E) من أجل $m = 1$

$$\text{من أجل } m = 1 \text{ في المعادلة (E) لدينا: } -3x^2 - 2x = 0 \quad \text{معناه: } x(-3x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ -3x - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ:} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{أي:}$$

حل التمرين رقم (3) الموجود في الصفحة 9:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث: $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

1 إثبات أن (-1) جذر لـ $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3 \\ &= -1 - 3 + 1 + 3 = 0 \end{aligned}$$

2 تعيين كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $P(x) = (x+1)Q(x)$ باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x + 3 & x + 1 \\ -x^3 - x^2 & \hline -4x^2 - x & \\ 4x^2 + 4x & \hline 3x + 3 & \\ -3x - 3 & \hline 0 & \end{array}$$

ومنـه $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

3 دراسة إشارة $P(x)$ حسب قيم x :

$P(x) = 0$ معناه $(x+1)Q(x) = 0$ أي $x+1=0$ (نعلم أن (-1) جذر لـ $P(x)$) ، و $Q(x) = 0$: $Q(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ باستعمال المميز Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 3 \\ &= 16 - 12 = 4 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4-2}{2} = 1 \\ x_2 &= \frac{4+2}{2} = 3 \end{aligned}$$

ومنـه :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$Q(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

• استنتاج مجموعة التعريف D_k للدالة k المعرفة بـ : $k(x) = \sqrt{P(x)}$:
يكافئ $P(x) \geq 0$ ومن جدول الإشارة السابق نجد : $x \in [-1; 1] \cup [3; +\infty[$.

حل التمرين رقم (4) الموجود في الصفحة 9:

1 تعيين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0) = 2$:

(-1) جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + \alpha(-1) + \beta \\ &= -1 - 2 - \alpha + \beta \\ &= -3 - \alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

إذن : $\beta - \alpha = 3$ (1)

لدينا $f(0) = 2$ معناه $f(0) = 0^3 - 2 \times 0^2 + \alpha \times 0 + \beta = 2$ ومنه (2) $\beta = 2$

بتعويض (2) في (1) نجد $\alpha = \beta - 3$ أي $\alpha = 2 - 3$

ومنه $\alpha = -1$ وبالتالي : $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2 نعتبر فيما يلي : $\alpha = -1$ و $\beta = 2$:

(أ) إيجاد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x) = (x+1)g(x)$

$f(x) = (x+1)g(x)$: الشكل ، إذن يقبل تفكيكاً من الشكل :
بإجراء القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - x + 2 & x+1 \\ -x^3 - x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline -3x^2 - x & \\ 3x^2 + 3x & \\ \hline 2x + 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه : $f(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 2)$

(ب) نحل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$ و $f(x) > 0$

$f(x) = 0$ معناه $(x+1)g(x) = 0$ أي $x+1 = 0$ (نعلم أن -1 جذر لـ $f(x)$) ، و $g(x) = 0$:

$g(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ باستعمال المميز Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 2 \\ &= 9 - 8 = 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-1}{2} = 1 \\ x_2 &= \frac{3+1}{2} = 2 \end{aligned}$$

إذن : $S_{f(x)} = \{-1; 1; 2\}$

حل المتراجحة $f(x) > 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$g(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

وبالتالي حلول المتراجحة $f(x) > 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in]-1; 1[\cup]2; +\infty[$

حل التمرين رقم (5) الموجود في الصفحة 10 :

1 تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل .

لدينا : $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$ فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة $f_2(x) = 0$ ومنه : $x^2 - 2x + 1 = 0$

يكافئ $(x-1)^2 = 0$ أي $x = 1$ وبالتالي : $\{(1, 0)\} = (C_2) \cap (xx')$

2 تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متميزتين .

معناه أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متميزين في $\mathbb{R}$.

نحل المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$
 $\Delta_m = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$

m	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$m-2$	$-$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$m+2$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$+$	
Δ_m	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ تقبل حلين متميزين لما $\Delta_m > 0$ أي : $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

3 تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.

معناه أن المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ يكافئ $\Delta_m < 0$ أي $m \in]-2, 2[$.

4 تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2, -3)$.

$A(2, -3) \in (C_m)$ يكافئ $f_m(2) = -3$ ومنه $4 - 2m + 1 = -3$ أي $m = 4$.

حل التمرين رقم (6) الموجود في الصفحة 10:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \dots (1)$$

1 حل المعادلات :

إذا $\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{25}}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(2)$$

$$\Delta = -7$$

$\Delta < 0$ إذا للمعادلة ليس لها حل

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (3)^2 - 4(1)(-4)$$

$$\Delta = 25$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(-3)$$

$$\Delta = 13$$

إذا $\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

2 إثبات أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1) :

$$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \dots (2)$$

$$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$$

$$((x^2 + x) - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$$

$$((x^2 + x)^2 + (2)^2 - 2(x^2 + x)(2) + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0$$

بوضع $X = x^2 + x - 2$ المعادلة (2) تكافئ المعادلة : $x^2 + 3x - 4 = 0$ و عليه :
 لما $X = -4$ نجد $x^2 + x - 2 = -4$ أي $x^2 + x + 2 = 0$ و من السؤال 1 نجد أن المعادلة لا تقبل حل.
 لما $X = 1$ نجد $x^2 + x - 2 = 1$ أي $x^2 + x - 3 = 0$ و من السؤال 1 نجد حلول المعادلة هما :

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right\} \text{ ومنه :}$$

4 حل المتراجحة :

بما أن $x^4 + 2x^3 - x - 6 = (x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4$ نجد أن

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - x - 6 &= (x^2 + x - 2 + 4)(x^2 + x - 2 - 1) \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
x^2+x+2	+	+		+	+	
x^2+x-3	+	0	-	-	0	+
x^4+2x^3-x-6	+	0	-	-	0	+
x	-	-	0	+		+
$\frac{x^4+2x^3-x-6}{x}$	-	0	+	-	0	+

وبالتالي حلول المتراجحة هي : $x \in \left[-\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right[\cup \left] 0; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right[$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8 - 2\sqrt{3}$$

③ أ) التحقق أن $\alpha = 2$ هو حل للمعادلة

$$2^2 - (\sqrt{3} + 1)2 + 2\sqrt{3} - 2 = 0 \quad (E)$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} - 2$$

$$= 4 - 4 = 0$$

منه $\alpha = 2$ حل للمعادلة (E).

- استنتاج قيمة β :

$$p = \alpha \cdot \beta$$

$$\beta = \frac{p}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2}$$

$$\boxed{\beta = \sqrt{3} - 1}$$

ب) تحليل $p(x)$:

$$p(x) = x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2$$

$$p(x) = 1(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$p(x) = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3})$$

- دراسة إشارة $p(x)$

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$x + 1 - \sqrt{3}$	-	0	+	+
$P(x)$	+	0	-	+

ج) نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$$x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2 < 0$$

$$p(x) < 0$$

$$x \in]\sqrt{3} - 1, 2[$$

حل التمرين رقم (01):

$$(E): x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$\Delta = (3 - \sqrt{3})^2$$

$$b = -(\sqrt{3} + 1), a = 1$$

$$c = 2\sqrt{3} - 2$$

$$\Delta = (-(\sqrt{3} + 1))^2 - 4 \times 1 \times (2\sqrt{3} - 2)$$

$$= 3 + 1 + 2\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 8$$

$$= 12 - 6\sqrt{3}$$

من جهة أخرى:

$$(3 - \sqrt{3})^2 = 9 + 3 - 6\sqrt{3}$$

$$= 12 - 6\sqrt{3}$$

إذن: صميز المعادلة (E) هو:

$$\Delta = (3 - \sqrt{3})^2$$

- استنتاج أن المعادلة (E) تقبل

حلين حقيقيين α و β :

$$\Delta = (3 - \sqrt{3})^2 > 0 \quad \Delta \text{ قابل}$$

المعادلة (E) تقبل حلين حقيقيين

② حساب $\alpha^2 + \beta^2$

$$x^2 - Sx + p = 0$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta \\ p = \alpha \cdot \beta \end{cases}$$

$$S^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$2p = 2\alpha \cdot \beta$$

$$S^2 - 2p = \alpha^2 + \beta^2$$

$$S = (\sqrt{3} + 1)$$

$$p = 2\sqrt{3} - 2$$

$$(\sqrt{3} + 1)^2 - 2(2\sqrt{3} - 2) = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Delta = 9 > 0 \quad : \text{معناه } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x_1 = 1}, \boxed{x_2 = -2} \quad \text{للمعادلة حلان}$$

$$S = \{-2; 1, 3\} \quad \text{ومنه}$$

$$: f(x) < 0 \quad \text{حل المتراجحة}$$

$$: f(x) \quad \text{جدول إشارة}$$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$x \in]-\infty, -2[\cup]1, 3[\quad : f(x) < 0 \text{ لـ } x$$

$$\frac{2x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 + x - 2} > 0 \quad \text{③ حل المتراجحة}$$

$$: x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0 \quad \text{④ حل المعادلة (E)}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$: \text{نضع } X = x^2 \text{ ومنه}$$

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \quad \text{فحسب المميز}$$

$$X_1 = 1; X_2 = 4$$

$$: \text{منه } X^2 - 5X + 4 = (X - 4)(X - 1)$$

$$2X^4 - 10X^2 + 8 = 2(X^2 - 4)(X^2 - 1)$$

$$\bullet \quad x^2 - 4 = 0 \quad \text{⑤ حل المعادلة (E)}$$

$$: \text{معناه } x = -2 \text{ أو } x = 2$$

$$\bullet \quad x^2 - 1 = 0$$

$$: \text{معناه } x = -1 \text{ أو } x = 1$$

$$S = \{-2, -1, 1, 2\} \quad \text{ومنه}$$

$$\text{③ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} + 1 \\ a \cdot b = 2\sqrt{3} - 2 \end{cases} \quad : a \text{ و } b$$

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} + 1 = S = \alpha + \beta \\ a \cdot b = 2\sqrt{3} - 2 = P = \alpha \cdot \beta \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$: \text{اذن } a = \alpha = 2$$

$$b = \beta = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{حل التمرين رقم (02)}$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\text{① حساب } f(3)$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6$$

$$= 27 - 18 - 15 + 6 = 0$$

$$: \text{ومنه } x = 3 \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0$$

$$- \text{تحليل } f(x) \text{ لـ جداء عاملين}$$

$$f(x) = (x - 3)g(x)$$

$$: \text{نحسب } g(x)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline x^2 - 5x & \\ -x^2 + 3x & \\ \hline -2x + 6 & \\ 2x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x - 3)(x^2 + x - 2) \quad \text{ومنه}$$

$$\text{② حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } f(x) = 0$$

$$: f(x) = 0 \text{ يكافئ } (x - 3)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$: \text{أو } x = 3 \text{ أو } x^2 + x - 2 = 0$$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$		
$x^2 - 2$		+	+	0	-	0	+	
$x^2 - 4$		+	0	-	-	-	0	+
$x^2 + x - 2$		+	0	-	-	0	+	+
$\frac{2x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 + x - 2}$		+	+	0	-	-	0	+

وحدة $-(x+1)^2 = 0$

اذن $x = -1$

(3) نحل المتراجحات: $f_1(x) > 0$ و $f_2(x) \leq 0$

لدينا: $f_1(x) = -(x+1)^2 < 0$

وحدة المتراجحة ليست لها حلول في $\mathbb{R}$.

وحدة $f_2(x) \leq 0$ تكافئ: $-3x \leq 0$

اذن $x \geq 0$ وحدة $x \in [0, +\infty[$

(4) نعين قيم m حيث يكون $x_1 = 1$

حلاً للمعادلة: $f_m(x) = 0$

نكادش: $f_m(1) = 0$

اذن: $(m-2) - (m+1) + m - 2 = 0$

$m - 5 = 0$

وحدة $m = 5$

(5) نعين قيم m في كل حالة:

(أ) $f_m(x)$ ليس له جذور من الدرجة الثانية:

تكافئ: $m-2 \neq 0$ اذ $m \neq 2$

وحدة $m \in \mathbb{R} - \{2\}$

(ب) المعادلة $f_m(x)$ لا تقبل حلاً:

نحسب المميز Δ_m :

$\Delta_m = -(m+1)^2 - 4(m-2)(m-2)$

$= m^2 + 1 + 2m - 4m^2 - 16 + 16m$

$= -3m^2 + 18m - 15$

$\Delta_m = 0$ معناه $-m^2 + 6m - 5 = 0$

نحسب المميز $\Delta' = 36 - 4(-1)(-5)$

$= 36 - 20 = 16 > 0$

$m_1 = 1$: $m_2 = 5$

وحدة m هي:

وحدة حلول المتراجحة:

$\frac{2x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 + x - 2} \geq 0$

$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, -1] \cup [2, +\infty[$

حل التمرين رقم (03):

$f_m(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + m-2$

(1) حساب $f_2(-1)$ و $f_0(0)$

لدينا: $f_0(x) = -2x^2 - x - 2$

اذن: $f_0(0) = -2$

و: $f_2(x) = -3x$

اذن: $f_2(-1) = 3$

(2) نحل في $\mathbb{R}$ المعادلات: $f_2(x) = 0$ و $f_1(x) = 0$

و $f_2(x) = 0$ تكافئ:

$x = 0$

لدينا: $f_1(x) = -x^2 - 2x - 1$

$f_1(x) = 0$ تكافئ: $-x^2 - 2x - 1 = 0$

جدول إشارة Δ_m :

m	$-\infty$	1	2	5	$+\infty$			
Δ_m		-	0	+		+	0	-

حل التمرين رقم (04):

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \dots (1)$$

1) نبين أن له ليس له حلا للعدالة (1)

$$6(0)^4 - 5(0)^3 - 38(0)^2 - 5(0) + 6 = 6 \neq 0$$

2) لدينا:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$$

كما في: حيث $x \neq 0$

$$\frac{6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6}{x^2} = 0$$

$$\frac{6(x^4 + 1) - 5(x^3 + x) - 38x^2}{x^2} = 0$$

$$6\left(\frac{x^4 + 1}{x^2}\right) - 5\left(\frac{x^3 + x}{x^2}\right) - \frac{38x^2}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

$$3) \text{ لدينا } u = x + \frac{1}{x} \text{ نحسب } u^2 \text{ بدلالة } x:$$

$$u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

4) نبين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل

$$6u^2 - 5u - 50 = 0 \dots (3)$$

$$\text{لدينا: } u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ و } u = x + \frac{1}{x}$$

$$u^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ أي}$$

نحوضع لهما في المعادلة (2):

$$6(u^2 - 2) - 5u - 38 = 0$$

$$6u^2 - 5u - 38 - 12 = 0$$

وهنا:

$$6u^2 - 5u - 50 = 0 \dots (3)$$

$$m \in]5, +\infty[\cup]1, 5[$$

المعادلة $f_m(x) = 0$ تُقبل حلاً

مضاهة $\Delta_m = 0$ أي

$$m = 5 \text{ أو } m = 1$$

$$m \in \{1, 5\}$$

المعادلة $f_m(x) = 0$ تُقبل حلاً

مضاهة $\Delta_m > 0$

$$m \in]1, 2[\cup]2, 5[$$

المعادلة $f_m(x) = 0$ تُقبل حلاً

$$\text{وحيث } m - 2 = 0:$$

$$m + 1 \neq 0$$

$$m = 2$$

فإن m حيث تُقبل المعادلة $f_m(x)$

حليتين مختلفتين في الإشارة:

$$\text{كما في } \Delta_m > 0 \text{ و } \frac{c}{a} < 0$$

$$\text{لدينا } a = m - 2 \text{ و } c = m - 2$$

$$\frac{c}{a} = 1 > 0$$

وهنا لا توجد قيم لـ m

$$m \in \emptyset$$

حل التمرين رقم (05):

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$① \text{ أختب } p(1) : p(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2$$

$$= 1 - 4 + 5 - 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$$

$p(x)$ جذر كثير الحدود $x=1$

② نعيّن كثير الحدود $Q(x)$ حيث

$$p(x) = (x-1)Q(x)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 5x & x-1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline -3x^2 + 5x & \\ -3x^2 + 3x & \\ \hline 2x & \\ -2x + 2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2) \text{ ومنه: } ③$$

$p(x)$ يحل

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ يكافئ } Q(x) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ ومنه: } \Delta = 1 > 0$$

$$x_2 = 2$$

$$Q(x) = (x-1)(x-2) \text{ إذن:}$$

$$p(x) = (x-1)^2(x-2) \text{ ومنه:}$$

$p(x) = 0$ يحل في $\mathbb{R}$ إلى معادلتين

$$x-2=0 \text{ أو } x=2$$

$$x-1=0 \text{ أو } x=1$$

$$S = \{1, 2\} \text{ ومنه:}$$

④ استنتاج حلول المعادلة

$$|x-1|^3 - 4(x-1)^2 + 5|x-1| - 2 = 0$$

$$p(|x-1|) = 0 \text{ كافٍ}$$

$$x-1 = 1 \text{ كافٍ } |x-1| = 1$$

$$\boxed{x = +2}$$

⑤ حل المعادلة (3) أي:

$$6u^2 - 5u - 50 = 0$$

$$\Delta = 1225 > 0$$

$$u_1 = \frac{10}{3}; u_2 = -\frac{5}{2} \text{ ومنه}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2}, \frac{10}{3} \right\}$$

استنتاج حلول المعادلة (1)

$$u_1 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{10}{3} \quad *$$

$$x_1^2 + 1 = \frac{10}{3}x_1 \text{ كافٍ}$$

$$x_1^2 - \frac{10}{3}x_1 + 1 = 0 \text{ ومنه}$$

$$\Delta = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 4 = \frac{100 - 36}{9} = \frac{64}{9} > 0$$

$$x_1' = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{3} \text{ للمعادلة (1)}$$

$$x_1'' = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_1'' = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$u_2 = x_2 + \frac{1}{x_2} = -\frac{5}{2} \quad *$$

$$x_2^2 + \frac{5}{2}x_2 + 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

المعادلة (5):

$$x_2' = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2'' = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -2$$

$$S = \left\{ -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3 \right\}$$

حل التمرين رقم (06):

$$P(x) = x^3 - (6+\alpha)x^2 + (13-\alpha)x - (\alpha-14)$$

(I) نعيّن α حتى تكون 3 جذراً لـ $P(x)$

معناه $P(3) = 0$ أي:

$$P(3) = 3^3 - (6+\alpha)3^2 + (13-\alpha)3 - (\alpha-14) = 0$$

$$27 - 54 - 9\alpha + 39 - 3\alpha - \alpha + 14$$

$$-13\alpha + 26 = 0$$

$$\alpha = 2$$

أذن:

(II) نعيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث

$$P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 11x + 12 & x-3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -5x^2 + 11x & \\ -5x^2 + 15x & \\ \hline -4x + 12 & \\ -4x + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

معنى $c = -4, b = -5, a = 1$

$$P(x) = (x-3)(x^2 - 5x - 4)$$

(3) نحلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

$$x^2 - 5x - 4 = 0, \text{ أي } x = 3$$

$$\Delta = 41 > 0 \text{ كما في } x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{41}}{2}, \text{ و } x_1 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

أذن:

$$S = \left\{ \frac{5-\sqrt{41}}{2}, 3, \frac{5+\sqrt{41}}{2} \right\}$$

(3) استنتج حلول المعادلة:

$$x\sqrt{x} - 8x + 11\sqrt{x} + 12 = 0 \quad (1)$$

$$x = u^2 \text{ و } \sqrt{x} = u$$

$$x\sqrt{x} = u^3$$

$$\boxed{x=0} \text{ أو } x-1 = -1 \text{ ومنه } x=0$$

$$x-1 = 2 \text{ كما في } |x-1| = 2$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\boxed{x=-1} \text{ أو } x-1 = -2 \text{ ومنه } x=-1$$

ومنه

$$S = \{-1, 0, 3\}$$

$$(5) \text{ نضع: } g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$$

$$(1) \text{ حل: } x^2 + x - 2 = 0$$

$$S = \{-2, 1\} \text{ معناه } \Delta = 9 > 0$$

(ب) تكون العبارة $g(x)$ معنى إذا

$$x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \text{ ومنه } x^2 + x - 2 \neq 0$$

(ج) نحلّ في $\mathbb{R}$ المتباينة $g(x) \leq 0$

$$\text{كما في } g(x) = \frac{P(x)}{x^2 + x - 2} \leq 0$$

- جدول إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	$+$	$-$	0	$+$

$$\text{ومنه } g(x) \leq 0 \text{ و } x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2]$$

$$x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2]$$

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$	3	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	$+\infty$		
$x-3$	-	-	0	+	+		
x^2-5x-4	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty, \frac{5-\sqrt{41}}{2}] \cup [3, \frac{5+\sqrt{41}}{2}[$: $p(x) \leq 0$
 - إشارة $p(\frac{2021}{2022})$:
 $\frac{5-\sqrt{41}}{2} < \frac{2021}{2022} < 3$ لدينا :
 $p(\frac{2021}{2022}) > 0$ وحده :

حل التمرين رقم (07) :

$P_m(x) = (m^2-4)x^4 + (m+1)x^3 - (2+m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2$
 ① نعين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ كثير حدود
 من الدرجة (3) كما في $m^2-4=0$ مع $m \neq -1$
 وحده $m^2=4$ مع $m \neq -1$

اذن $m=2$ أو $m=-2$ مع $m \neq -1$

② التحقق أن $x=2$ جذر $P_2(x)$

$P_2(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

$P_2(2) = 26 - 26 = 0$

وحده $x=2$ جذر $P_2(x)$

③ $P_2(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 & x-2 \\
 -3x^3 + 6x^2 & \\
 \hline
 2x^2 - 5x & \\
 -2x^2 + 4x & \\
 \hline
 -x + 2 & \\
 x - 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

المعادلة (1) $u^3 - 8u^2 + 11u + 12 = 0$

$u^3 - 8u^2 + 11u + 12 = 0$

$p(u) = 0$

$u=3 = \sqrt{x}$

$x=9$

$u = \frac{5+\sqrt{41}}{2} = \sqrt{x}$

$x = \left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^2$

$S = \left\{ 9, \left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^2 \right\}$

④ استنتاج حلول المعادلة :

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{x-1}{2}\right) + 12 = 0$

نضع $V = \frac{x-1}{2}$ فنكتب $x = 2V + 1$ وحده

$V^3 - 8V^2 + 11V + 12 = 0$

$p(V) = 0$

$V=3 \Leftrightarrow x = 2 \times 3 + 1$

$x=7$

$x = \frac{6+\sqrt{41}}{2}$ كما في $V = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$

$x = \frac{6-\sqrt{41}}{2}$ كما في $V = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$

وحده $S = \left\{ \frac{6-\sqrt{41}}{2}, 7, \frac{6+\sqrt{41}}{2} \right\}$

⑤ حل المتراجحة $p(x) \leq 0$ في $\mathbb{R}$

- جدول إشارة $p(x)$

اذن $c = -1, b = 2, a = 3$
 $p_2(x) = (x-2)(3x^2+2x-1)$ وصفا

④ نكافئ $3x^2+2x-1=0$
 $\Delta = 16 > 0$ وصفا المعادلة حلالين
 $x_2 = -1, x_1 = \frac{1}{3}$
 $S = \left\{ -1, \frac{1}{3} \right\}$

- المستخرج حلال المعادلة $R(p_2(x)) = 0$
 $x-2=0 \rightarrow p_2(x)=0$
 $3x^2+2x-1=0$ ا
 $S = \left\{ -1, \frac{1}{3}, 2 \right\}$ وصفا

⑤ دراسة إشارة $p_2(x)$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
x^2-5x-4	+	0	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

حلال المتراجحة $3x^3+2 \leq 4x^2+5x$
 $3x^3-4x^2-5x+2 \leq 0$ نكافئ
 $p_2(x) \leq 0$ ا

نكافئ!

$x \in]-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, 2 \right]$