

رياضيات

ملخصات الأستاذ مصطفى

للسنة الثانية ثانوي



Prof Mustapha
KHALED



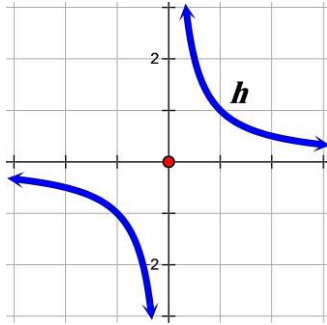
الفهرس

الرقم	الدرس	الصفحة
①	مجموعة التعريف	1
②	الدوال المرجعية	3
③	الدوال العددية	4
④	الدوال كثيرات الحدود	6
⑤	الاشتقاقية	8
⑥	تطبيقات الاشتقاقية	9
⑦	النهايات	10
⑧	مخطط دراسة دالة	13
⑨	المرجح في المستوي	14
⑩	الزوايا الموجهة	16
⑪	الاحتمالات	19
⑫	التحاكي	21
⑬	الجداء السلمي	22
⑭	المتتاليات العددية	24
⑮	الهندسة الفضائية	27
⑯	الاحصاء	29

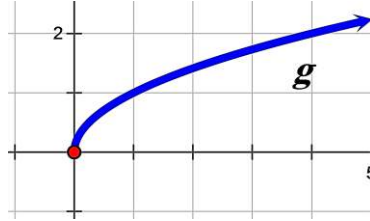
Prof Mustapha
KHA-LD9

مجموعة التعريف D

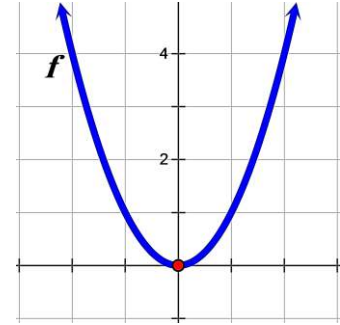
❖ بيانيا:



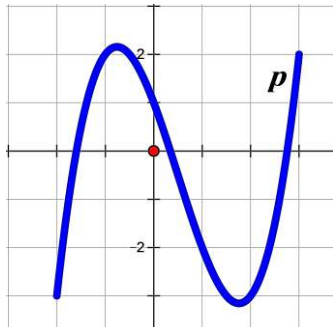
$$D_h =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$



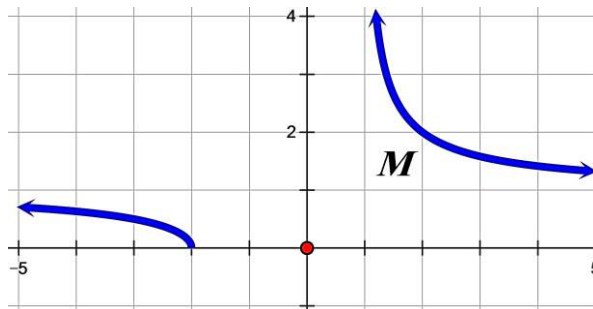
$$D_g = [0; +\infty[$$



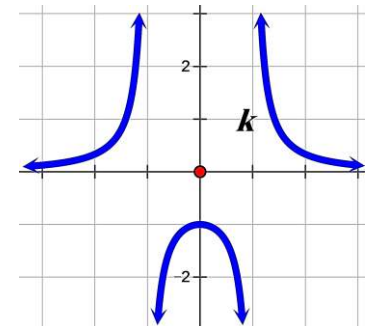
$$D_f =]-\infty; +\infty[$$



$$D_p = [-2; 3]$$



$$D_M =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$



$$D_k =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

❖ حسابيا:

لا جذر ولا كسر مثل: $f(x) = 6x^2 - 15x + 8$

نكتب: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ أي $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

نكتب: $f(x) = \frac{x^2+7}{x-2}$ مثل (1) كسر

$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$D_f = [3; +\infty[$

نكتب: $f(x) = \sqrt{x-3}$ مثل (2) جذر

$x + 5 > 0$

$x > -5$

$D_f =]-5; +\infty[$

نكتب: $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+5}}$ مثال: (3) كسر و جذر

$x + 4 \geq 0$ و $x - 6 \neq 0$

$x \geq -4$ و $x \neq 6$

$D_f =]-4; 6[\cup]6; +\infty[$

نكتب: $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{9}{x-6}$ مثال: (2)

إذن القاعدة:

- ❶ لا كسر و لا جذر: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- ❷ في الكسر نكتب: $0 \neq$ المقام
- ❸ في الجذر نكتب: $0 \geq$ ما داخل الجذر
- ❹ في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر: D_f هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال

❖ الملخص:

الدالة	مجموعة التعريف
$f(x) =$ كثير الحدود	$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)} + \frac{h(x)}{k(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0 \wedge k(x) \neq 0\}$
$f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0 \wedge h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{g(x)}{h(x)} \geq 0 \wedge h(x) \neq 0\right\}$
حيث $g(x)$ ، $h(x)$ و $k(x)$ كلها دوال كثيرات حدود	

❖ العمليات على الدوال ومجموعة التعريف:

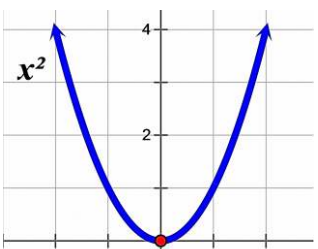
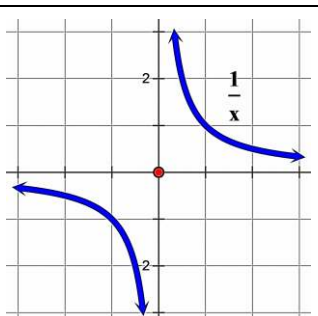
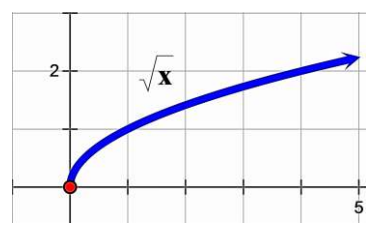
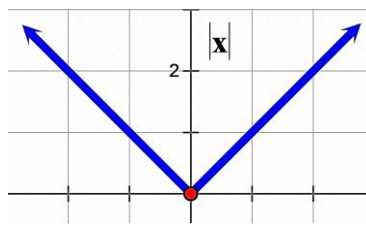
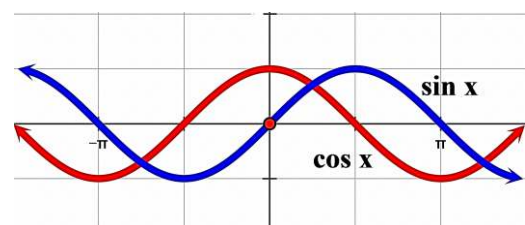
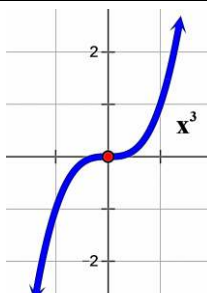
f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. λ و k عدنان حقيقيان.

العملية	مجموعة التعريف
$f + k$	D_f
λf	D_f
$f + g$	$D_f \cap D_g$
$f \times g$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\{x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\}$
$f \circ g$ أي $f[g(x)]$	$D_{f \circ g} = \{x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Prof Mustapha
KdH A L D J

Prof. Mustapha KHALED

الدوال المرجعية

التمثيل البياني للدالة المرجعية	الشكل المرجعي	الدالة المرجعية
	$f(x) = \lambda(x + b)^2 + k$ لرسم الدالة المرجعية: (1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^2$ (2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b; k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b; k)$	مربع $f(x) = x^2$ (زوجية)
	$f(x) = \frac{\lambda}{x + b} + k$ لرسم الدالة المرجعية: (1) نرسم المنحنى $y = \frac{\lambda}{x}$ (2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b; k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b; k)$	مقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ (فردية)
	$f(x) = \lambda\sqrt{x + b} + k$ لرسم الدالة المرجعية: (1) نرسم المنحنى $y = \lambda\sqrt{x}$ (2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b; k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b; k)$	جذر تربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ (لا زوجية لا فردية)
	$f(x) = \lambda x + b + k$ لرسم الدالة المرجعية: (1) نرسم المنحنى $y = \lambda x$ (2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b; k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b; k)$	قيمة مطلقة $f(x) = x $ (زوجية)
	$f(x) = \lambda \sin(x + b) + k$ $g(x) = \lambda \cos(x + b) + k$ لرسم الدالة المرجعية: (1) نرسم المنحنى $y = \lambda \sin x$ أو $y = \lambda \cos x$ (2) نرسم المنحنى الجديد C إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b; k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b; k)$	الدالتان $\sin x$ (فردية) و $\cos x$ (زوجية)
	$f(x) = \lambda(x + b)^3 + k$ لرسم الدالة المرجعية: (1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^3$ (2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b; k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b; k)$	مكعب $f(x) = x^3$ (فردية)

الدوال العددية

Prof Mustapha

KHA-LD9

I. العمليات على الدوال

$$(1) \text{ تساوي دالتين: } f \text{ و } g \text{ متساويتين} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} Df = Dg \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\}$$

(2) العمليات الجبرية: f و g دوال عددية k و λ أعداد حقيقية

العملية	التعريف
$f + k$	$(f + k)(x) = f(x) + k$
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(3) تركيب الدوال: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

II. اتجاه التغير

(1) مراجعة

فإن	إذا كان	
f متزايدة	$x_1 < x_2$ و $f(x_1) < f(x_2)$	①
f متناقصة	$x_1 < x_2$ و $f(x_1) > f(x_2)$	②
f ثابتة	$f(x_1) = f(x_2)$	③

*ملاحظة ①: f رتيبة على مجال معناه f متناقصة أو متزايدة على هذا المجال

*ملاحظة ②: (الفرق بين متزايدة ومتناقصة تماماً، متناقصة ومتناقصة تماماً)

f متزايدة	f متزايدة تماماً
معناه f متزايدة ثم ثابتة أو متزايدة ثم ثابتة ثم متزايدة... الخ	معناه f متزايدة دون أن تكون ثابتة

• نفس الأمر بالنسبة لمتناقصة و متناقصة تماماً

*ملاحظة مهمة ③: (الخطأ الشائع)

 f متزايدة ليس معناه f موجبة و f متناقصة ليس معناه f سالبة و لا علاقة أبداً بين تغيرات الدالة و إشارتها

(2) العمليات على الدوال واتجاه التغير

الدالة	اتجاه التغير
$f + k$	f و $f + k$ لهما نفس اتجاه التغير
λf	إذا كان $\lambda > 0$ فإن f و λf لهما نفس اتجاه التغير إذا كان $\lambda < 0$ فإن f و λf متعاكسين في اتجاه التغير
$f \circ g$	إذا كان f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن $f \circ g$ متزايدة تماماً على I إذا كان f و g متعاكسين في اتجاه التغير فإن $f \circ g$ متناقصة تماماً على I
$f + g$	لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين
$f \times g$	لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين

*ملاحظة: لتسهيل دراسة اتجاه تغير أي دالة f من الأفضل كتابتها على الشكل: $u + k$ ، λu أو vou حيث u و v دالتان مرجعيتان

III. التمثيل البياني

إذا كان	فإن
$g(x) = f(x) + k$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}_k(0)$
$g(x) = f(x + b)$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}_0(-b)$
$g(x) = f(x + b) + k$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}_k(-b)$
$g(x) = \lambda f(x)$	نرسم C_g بالاحتفاظ بفواصل C_f و ضرب ترتيب C_f في λ
$g(x) = \lambda f(x + b) + k$	C_g هو صورة $C_{\lambda f}$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}_k(-b)$
$g(x) = -f(x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الترتيب
$g(x) = -f(-x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة للمبدأ
$g(x) = f(x) $	C_g منطبق على C_f لما $f(x) \geq 0$ و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما $f(x) \leq 0$ * بتعبير آخر: C_g منطبق على C_f لما C_f فوق محور الفواصل و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما C_f تحت محور الفواصل
$g(x) = f(x)$	C_g منطبق على C_f لما $x \geq 0$ و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الترتيب لما $x \leq 0$

IV. دساتير تغيير معلم

العلاقة بين إحداثيات نقطة $M(x, y)$ في معلم قديم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و إحداثياتها $M(X, Y)$ في معلم جديد $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ حيث (x_0, y_0) هي إحداثيات Ω في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ هي:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

Prof Mustapha
KHA-LD9

محور تناظر

✓ طريقة ①:

$$f(2a - x) = f(x) \Leftrightarrow x = a \text{ محور تناظر}$$

✓ طريقة ②:

$$f(a - x) = f(a + x) \Leftrightarrow x = a \text{ محور تناظر}$$

✓ طريقة ③: دستور تغيير معلم

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow x = a \text{ محور تناظر}$$

(1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y = f(a + X)$$

(2) إثبات أن Y دالة زوجية.

مركز تناظر

✓ طريقة ①:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b \Leftrightarrow W(a; b) \text{ مركز تناظر}$$

✓ طريقة ②:

$$f(a + x) + f(a - x) = 2b \Leftrightarrow W(a; b) \text{ مركز تناظر}$$

✓ طريقة ③: دستور تغيير معلم

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases} \Leftrightarrow W(a; b) \text{ مركز تناظر}$$

(1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y = f(a + X) - b$$

(2) إثبات أن Y دالة فردية.

* ملاحظة: المنحنى الممثل للدالة: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$ يقبل دائما مركز تناظر

الدوال كثيرات الحدود

[I]. تعريف كثير الحدود: عبارة الدالة كثير الحدود تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث:

n درجة كثير الحدود

$a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملاته

$a_p x^p$ الحد الذي درجته p

أمثلة:

الدالة الثابتة $f(x) = a$ هي دالة كثير حدود درجته 0

الدالة الخطية $f(x) = ax$ و التآلفية $g(x) = ax + b$ هي دوال كثيرات حدود من الدرجة 1

*ملاحظة: كل الدوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

[II]. عمليات على كثير الحدود

(1) قواعد الحساب الجبري:

- مجموع، فرق وجداء كثيرات الحدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود درجتها n و p هو كثير حدود درجته $n + p$

(2) جذر كثير حدود: (جذر مرادف كلمة حل)

α جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(\alpha) = 0$

(3) تحليل كثير حدود:

إذا كان α جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ بحيث $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

(4) طرق تحليل كثير حدود: هناك ثلاث طرق لتحليل كثير حدود من الدرجة n

* مثال: تحليل كثير حدود $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ جذره 2

طريقة 3: (هورنر Horner)

معاملات كثير الحدود			
1	-6	-13	42
	+	+	+
2	2	-8	-42
	=	=	=
1	-4	-21	0
معاملات كثير الحدود الناتج			

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$$

طريقة 2: (القسمة الإقليدية)

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 - 13x + 42 \\ - (x^3 - 2x^2) \\ \hline -4x^2 - 13x + 42 \\ - (-4x^2 + 8x) \\ \hline -21x + 42 \\ - (-21x + 42) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$$

طريقة 1: (المطابقة)

$$f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

بالنشر:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ f(x) &= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \end{aligned}$$

بالمطابقة مع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b=-13 \\ -2c=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2=-6 \\ c-2b=-13 \\ c=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-21 \end{cases}$$

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$$

[III]. المعادلات من الدرجة الثانية (مراجعة)

$$(1) \text{ الشكل النموذجي: } ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ حيث}$$

Prof Mustapha
KHA-LD

(2) ملخص حل وإشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$																											
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	إذا كان																								
تقبل حلين متميزين $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	لا تقبل حلول	فإن المعادلة																								
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$E$</td><td>إشارة a</td><td>عكس إشارة a</td><td>إشارة a</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$	E	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>E</td><td>إشارة a</td><td>إشارة a</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	E	إشارة a	إشارة a		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>E</td><td>إشارة a</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	E	إشارة a		إشارتها
x	$-\infty$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$																							
E	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a																								
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$																								
E	إشارة a	إشارة a																									
x	$-\infty$	$+\infty$																									
E	إشارة a																										
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	لا تقبل تحليلًا	تحليلها																								

[IV]. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta \geq 0$ فإن:

Prof Mustapha

KHACED

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز S و للجداء بالرمز P

$$P = \frac{c}{a} \quad ; \quad S = -\frac{b}{a}$$

* نتائج:

① حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين فيمكن حساب الحل الآخر باستعمال المجموع: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ أو الجداء: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

② حساب عددين علم مجموعهما وجداءهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما وجداءهما باستعمال العلاقة: $x^2 - Sx + P = 0$

③ تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية ($ax^2 + bx + c = 0$)

إذا كان	فإن
$\frac{c}{a} < 0$	المعادلة تقبل حلين من إشارتين مختلفتين
$\frac{c}{a} > 0$	و $-\frac{b}{a} > 0$
	و $-\frac{b}{a} < 0$
	المعادلة تقبل حلين موجبين
	المعادلة تقبل حلين سالبين

[V]. المعادلات مضاعفة التربيع ($ax^4 + bx^2 + c = 0$):

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4 + bx^2 + c = 0$ إلى حل الجملة: $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

* ملاحظة: عند إيجاد قيمة X_1 و X_2 يجب تعويضهما في المعادلة $X = x^2$ لإيجاد قيم x

Prof Mustapha
KHA-LD

الاشتقاقية

I. تعاريف

(1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$

(2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$ حيث $(h = x - x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$

* العدد المشتق: يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز له $[f'(x_0)]$ أي $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

* نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و $x_0 + h$ ونرمز له ب $g(h)$

* قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

(3) الدالة المشتقة لدالة f

f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f

< مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ ونرمز لها f' حيث $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

II. التفسير الهندسي للعدد المشتق

(1) معادلة المماس عند نقطة: مماس المنحني C_f عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية لأعداد من الشكل a, n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على

الشكل $a + h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من 0) $f(a + h) = f'(a)h + f(a)$

* ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

عمليات على الدوال المشتقة [VI]

III. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u + v)$	$u' + v'$
$(u \times v)$	$u' \cdot v + v' \cdot u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu' \times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(uov)'$	$[u'ov] \times v'$
$u(ax + b)$	$au'(ax + b)$

$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n \times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Prof Mustapha
KHA-LD

تطبيقات الاشتقاقية

1 تحديد اتجاه تغير دالة

المشتقة f'	تغيرات f
f' موجبة تماما على I	f متزايدة تماما على I
f' سالبة تماما على I	f متناقصة تماما على I
f' معدومة على I	f ثابتة على I

2 معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

3 نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I ولا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

4 حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a, b] \iff f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a, b] \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

5 الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f \Leftarrow f(x) \leq k$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
- $f \Leftarrow f(x) \geq k$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)

*ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f \Leftarrow f(x) \leq k$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant
 f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f \Leftarrow f(x) \geq k$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

6 نظرية القيم المتوسطة

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\} \iff f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } x_0 \text{ على المجال } [a, b]$$

7 المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

بيانيا

- $f(x) > g(x) \iff C_f \text{ فوق } C_g$
- $f(x) < g(x) \iff C_f \text{ تحت } C_g$
- $f(x) = g(x) \iff C_f \text{ تقطع } C_g$

حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

x	a b	x_0 0
إشارة $f(x) - g(x)$	-	+
الوضع النسبي بين C_g و C_f	C_g تحت C_f	C_g فوق C_f

C_g يقطع C_f

Prof Mustapha
KHA-LD9

النهايات ① (السلوك التقاربي لمنحن)

مفاهيم

- ① بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها
- ② إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a حيث $a \in D_f$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- ③ إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد a تكون هذه النهاية وحيدة
- ④ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

I. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن f نهاية منتهية l عند a معناه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = l$

II. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \frac{d}{g(x)}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، d و a عدنان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

فإن	وإشارة d	إذا كانت إشارة $g(x)$
$\lim_{x \leq a} f(x) = -\infty$	$d > 0$	$\begin{array}{c} -\infty < a < +\infty \\ - \quad \emptyset \quad + \end{array}$
$\lim_{x \geq a} f(x) = +\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = +\infty$	$d < 0$	
$\lim_{x \geq a} f(x) = -\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = +\infty$	$d > 0$	
$\lim_{x \geq a} f(x) = -\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = -\infty$	$d < 0$	$\begin{array}{c} -\infty < a < +\infty \\ + \quad \emptyset \quad - \end{array}$
$\lim_{x \geq a} f(x) = +\infty$		

*ملاحظة:

فإن	وإشارة d	إذا كانت
$\lim_{x \leq a} f(x) = +\infty$	$d > 0$	$f(x) = \frac{d}{[g(x)]^2}$ أو $f(x) = \frac{d}{ g(x) }$
$\lim_{x \geq a} f(x) = +\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = -\infty$	$d < 0$	
$\lim_{x \geq a} f(x) = -\infty$		

III. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \frac{d}{x}$ حيث d عدد حقيقي فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{x} = 0$

و منه نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{x} + b = b$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{x} + b = b$

IV. نهاية غير منتهية عند ما لا نهاية

نقول أن f نهاية غير منتهية ∞ عند ∞ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

[V]. المبرهنات الأولية على النهايات

③ نهاية حاصل قسمة دالتين		
فإن: $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	و $\lim g(x)$	إذا كانت $\lim f(x)$
$\frac{l}{l'}$	l'	l
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
$+\infty$	$l > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$l < 0$	$+\infty$
$-\infty$	$l > 0$	$-\infty$
$+\infty$	$l < 0$	$-\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
ح ع ت	0	0
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$-\infty$
$l > 0$	0^+	$+\infty$
$l < 0$	0^+	$-\infty$
$l > 0$	0^-	$-\infty$
$l < 0$	0^-	$+\infty$

① نهاية مجموع دالتين		
فإن: $\lim [f(x) + g(x)]$	و $\lim g(x)$	إذا كانت $\lim f(x)$
$l + l'$	l'	l
$+\infty$	$+\infty$	l
$-\infty$	$-\infty$	l
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$

② نهاية جداء دالتين		
فإن: $\lim [f(x) \times g(x)]$	و $\lim g(x)$	إذا كانت $\lim f(x)$
$l \times l'$	l'	l
$+\infty$	$+\infty$	$l > 0$
$-\infty$	$+\infty$	$l < 0$
$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$
$+\infty$	$-\infty$	$l < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$+\infty$	0
ح ع ت	$-\infty$	0
0^-	0^+	$l < 0$
0^+	0^-	$l < 0$

⑤ حالات عدم التعيين			
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \times \infty$	$\frac{+\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{+\infty}$

④ حالات خاصة			
فإن: $\lim [f(x)]^2$	فإن: $\lim f(x) $	فإن: $\lim \sqrt{f(x)}$	إذا كانت $\lim f(x)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	0^+	0^+	0^-

Prof Mustapha
KdA-LD

Prof Mustapha
KdHA-LDS

النهايات ② (التفسير الهندسي)

① المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب (عمودي)

$$x = a \Leftarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

مستقيم مقارب عمودي يوازي محور الترتيب

② المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$$y = b \Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

③ المستقيم المقارب المائل

[أ] البحث عن المستقيم المقارب المائل

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$$y = ax + b \Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

إذا كان

[ب] إثبات أن مستقيم هو مقارب مائل لـ C_f

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

لإثبات أن $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C_f يكفي برهان أن:

[ج] دراسة وضعية C_f بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة

إشارة الفرق: $f(x) - (ax + b)$

x	$-\infty$ $+\infty$	x_0
إشارة $f(x) - y$	-	+
الوضع النسبي بين C_f و (Δ)	C_f تحت (Δ)	C_f فوق (Δ)

*ملاحظة: يسمى المنحنى الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - cb \neq 0$ قطعا

زائدا معادلنا مستقيمي المقاربين هما: $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$

مخطط دراسة دالة

1 مجموعة التعريف

☆ تحديد مجموعة تعريف الدالة إن لم تكن قد أعطيت في النص

2 دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة)

☆ قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مركز أو محور تناظر المنحنى

3 حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

4 تحديد المستقيمات المقاربة

5 دراسة اتجاه تغير الدالة

① حساب المشتقة

② دراسة إشارة المشتقة

③ استنتاج اتجاه تغير الدالة

④ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

6 حساب نقط تقاطع المنحنى مع محوري الاحداثيات

7 تشكيل جدول التغيرات

8 التمثيل البياني للدالة

① رسم المستقيمات المقاربة

② تمثيل النقط الحدية (الكبرى و الصغرى إن وجدت) مع رسم المماسات الأفقية عندها

③ تمثيل نقط تقاطع المنحنى مع محوري الاحداثيات

④ تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب احداثياتها

⑤ رسم المماسات المائلة (إن وجدت)

⑥ رسم محور التناظر أو تمثيل مركز التناظر (إن وجدو) لاستغلال التناظر و تسهيل الرسم

⑦ استغلال و استعمال جدول التغيرات لرسم الدالة

Prof Mustapha

KdHA-LDS

المرجح في المستوى ①

❖ مرجح نقطتين

* G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ حيث: $\alpha + \beta \neq 0$

○ α و β عدنان حقيقيان

○ تسمى الثانية (A, α) نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين

* إذا كان $\alpha = \beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$ G منتصف $[AB]$; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha = \beta = 1$)

ميرهنات:

■ G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$

■ G منتصف $[AB] \Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$

خواص:

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow G$ مرجح $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ حيث: $k \in \mathbb{R}^*$

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow$ فإن النقط A, B و G على استقامة واحدة

احداثيا مرجح نقطتين:

$\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ مرجح G و $G(x_G; y_G); B(x_B; y_B); A(x_A; y_A)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

إنشاء مرجح نقطتين:

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ مرجح G

$$(1) \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \quad \text{نكتب } \overrightarrow{AG} \text{ بدلالة } \overrightarrow{AB} \text{ وفق القانون:}$$

(2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha + \beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

❖ مرجح 3 نقط

* G مرجح النقط B و C المرفقة بالمعاملات α, β, γ $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

○ α, β, γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

* إذا كان $\alpha = \beta = \gamma$ و النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة فإن: G مركز ثقل المثلث ABC

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha = \beta = \gamma = 1$)

ميرهنه:

■ G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$

خواص:

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow G$ مرجح $\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ حيث: $k \in \mathbb{R}^*$

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, إذا كانت D مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن: G مرجح $\{(D, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$

احداثيا مرجح 3 نقط:

$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ مرجح G و $G(x_G; y_G); C(x_C; y_C); B(x_B; y_B); A(x_A; y_A)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

إنشاء مرجح 3 نقط:

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ مرجح G

طريقة 1:

$$(1) \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \quad \text{نكتب } \overrightarrow{AG} \text{ بدلالة } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} \text{ وفق القانون:}$$

$$(2) \quad \text{نرسم الشعاع } \overrightarrow{AG} \text{ محصلة مجموع الشعاعين } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} \text{ بدلالة } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC}$$

طريقة 2:

(1) ننشئ I مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين $\neq 0$ مثلا A و C بحيث $\alpha + \gamma \neq 0$

(2) نكتب $\overrightarrow{GI}$ بدلالة $\overrightarrow{BI}$ و ننشئ G

Prof Mustapha
KHALEDA

المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	فإن مجموعة النقط هي	إذا كان
دائرة	دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = k'$	$k' > 0$ حيث $\ \vec{MG}\ = k'$
	دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = AB$ (لأن طول موجب ثابت)	$\ \vec{MG}\ = AB$
	دائرة قطرها GH ومركزها منتصف $[GH]$	$(MG) \perp (MH)$
ϕ	مجموعة خالية	$k' < 0$ حيث $\ \vec{MG}\ = k'$
نقطة	النقطة G (أو هي النقطة M منطبقة على G)	$\ \vec{MG}\ = 0$
مستقيم	مستقيم محور القطعة $[GH]$	$\ \vec{MG}\ = \ \vec{MH}\ $
جزء من المستوي	كل النقط من المستوي التي تقع داخل وعلى محيط الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $r = k'$	$\ \vec{MG}\ \leq k'$
	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $r = k'$	$\ \vec{MG}\ > k'$
	نصف المستوي في جهة النقطة G وحده محور $[GH]$	$\ \vec{MG}\ < \ \vec{MH}\ $

*ملاحظة 1: لإثبات أن B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M بـ B في العلاقة المعطاة و نتحصل على علاقة صحيحة*ملاحظة 2: لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من M

❖ اثبات تلاقي مستقيمتين

مثال: ABC مثلث والنقط I, J, K معرفة كما يلي:• نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى B • النقطة J تحقق: $2\vec{JA} - 3\vec{JC} = \vec{0}$ • النقطة K تحقق: $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ (1) أرسم شكلا توضح فيه النقط I, J, K و K مع التبرير.(2) أثبت أن كل نقطة من النقط I, J, K هي مرجح لنقطتين من النقط A, B, C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.(3) أثبت أن المستقيمتين $(CI), (BJ), (AK)$ متقاطعة.

الحل:

(1) الإنشاء مع التبرير:

$$\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{AJ} = 3\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AJ} = \frac{-3}{2-3}\vec{AC} \Leftrightarrow 2\vec{JA} - 3\vec{JC} = \vec{0}$$

$$\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$$

(2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$$-2\vec{IA} + 3\vec{BI} + 3\vec{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{AI} = 3\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{IA} - 3\vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \{A(1), B(-3)\}$$

$$\{A(2), C(-3)\} \text{ مرجح } J \text{ ونفس الطريقة نجد: } \{B(2), C(1)\} \text{ مرجح } K$$

(3) إثبات أن المستقيمتين $(CI), (BJ), (AK)$ متقاطعة:ليكن G مرجح $\{(A, 2); (B, -6); (C, -3)\}$ موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$$2\vec{GA} - 6\vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$$

$$-7\vec{GI} + 2\vec{IA} - 6\vec{IB} - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$-7\vec{GI} + 2(\vec{IA} - 3\vec{IB}) - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$G \in (IC) \text{ ومنه } \vec{GI} = -\frac{3}{7}\vec{IC}$$

* بنفس الطريقة نجد: $G \in (JB)$ و $G \in (AK)$ و منه المستقيمتين $(CI), (BJ), (AK)$ متقاطعة في G

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

 $G \in (IC)$ ومنه $\{(I, -4); (C, -3)\}$ مرجح $G \in (JB)$ ومنه $\{(J, -1); (B, -6)\}$ مرجح $G \in (AK)$ ومنه $\{(K, -9); (A, 2)\}$ مرجحو منه المستقيمتين $(CI), (BJ), (AK)$ متقاطعة في النقطة G

❖ مستقيم أولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.

الزوايا الموجهة

◀ يوجه المستوي
 ◀ توجيهها مباشرة (موجب) ← عكس عقارب الساعة
 ◀ توجيهها غير مباشر (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

◀ نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1
 $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

◀ نسمي الثنائية $(\vec{u}, \vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين.

☆ إذا كان x قياس للزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x + 2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$ مع $k \in \mathbb{Z}$

☆ يوجد قياس وحيد على المجال $[-\pi, \pi]$ أو $[0, 2\pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$

☆ إيجاد القياس الرئيسي للزاوية $x = (\vec{u}, \vec{v})$:

① نكتب الشكل العام للزاوية أي: $(\vec{u}, \vec{v}) = x + 2k\pi$

② نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ أي: $-\pi < x + 2k\pi < \pi$

③ يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القياس الرئيسي.

☆ علاقة شال:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

نتائج:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

☆ تقايس الزوايا الموجهة:

$$(\vec{u}', \vec{v}') = \alpha' \text{ و } (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \text{ تكن}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ و } (\vec{u}', \vec{v}') \text{ متقايسان} \Leftrightarrow \alpha' = \alpha + 2k\pi \text{ أي } \alpha' - \alpha \text{ مضاعف لـ } 2\pi$$

☆ الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi &\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ أي } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ في نفس الاتجاه} \\ \text{أو} \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi &\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \pi \text{ أي } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ في اتجاهين متعاكسين} \end{aligned}$$

☆ خاصية:

$$\{k; k'\} \in \mathbb{R}^*$$

▪ إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن: $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

▪ إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن: $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

◀ الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:

إذا كانت A, B و M ثلاث نقط متمايضة من دائرة مثلثية (C) مركزها O فإن:

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB})$$

$$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{1}{2}(\vec{OA}, \vec{OB})$$

Prof Mustapha
KHA-LD

❖ حساب المثلثات

$$\begin{aligned} \blacksquare -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ \blacksquare -1 &\leq \sin x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \blacksquare \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \blacksquare \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \blacksquare \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(-x) &= \cos x \\ \blacksquare \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

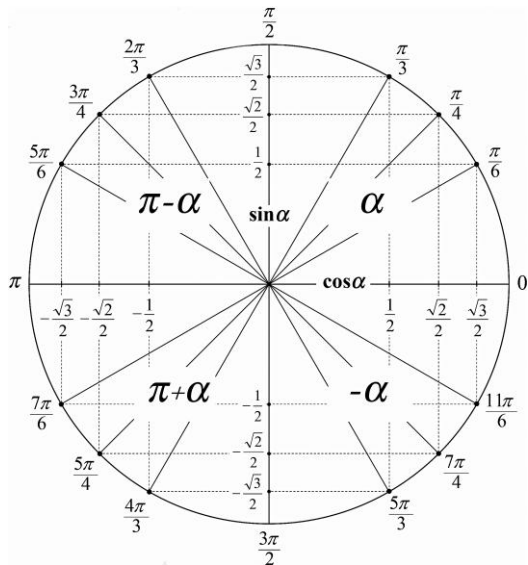
$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(x + \pi) &= -\cos x \\ \blacksquare \sin(x + \pi) &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \blacksquare \sin(\pi - x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \blacksquare \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \blacksquare \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

الدائرة المثلثية:



جدول زوايا شهيرة:

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

❖ الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

ليكن $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس ولتكن M نقطة من المستوى غير منطبقة على O

* تسمى الثنائية $M(x; y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M

* تسمى الثنائية $M(r; \theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = OM$ و $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

مصطلحات: النقطة O تسمى القطب، $(O; \vec{i})$ يسمى المحور القطبي، r نصف القطر القطبي و θ زاوية قطبية

❖ العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

$$y = r \sin \theta \quad ; \quad x = r \cos \theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Prof Mustapha

KdA-LD

❖ المعادلات المثلثية

$$\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases} \quad (2)$$

$$\cos x = a \quad \text{المعادلات من الشكل} \quad (3)$$

* إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

* إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

(1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\cos c = a$

$$(2) \quad \begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = -c + 2k\pi \end{cases} \quad \text{الحلول هي:}$$

$$\sin x = a \quad \text{المعادلات من الشكل} \quad (4)$$

* إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

* إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

(1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\sin c = a$

$$(2) \quad \begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = \pi - c + 2k\pi \end{cases} \quad \text{الحلول هي:}$$

$$\cos u = \sin v \quad \text{المعادلات من الشكل} \quad (5)$$

* إما نحول $\sin$ إلى $\cos$ بالقانون $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ فتصبح المعادلة $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ أي من الشكل (1)

* أو نحول $\cos$ إلى $\sin$ بطريقتين:

▪ بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ أي من الشكل (2)

▪ أو بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin v = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ أي من الشكل (2)

Prof Mustapha

KdH-A-LD

الاحتمالات

I. مصطلحات

- (1) تجربة عشوائية: هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة
- (2) مجموعة الإمكانات Ω : هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل: (الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة أو مجموعة المخارج)
- (3) الحادثة A : هي مجموعة جزئية من Ω
- (1.3) الحادثة الأولية: هي حادثة تحتوي على عنصر وحيد
- (2.3) الحادثة المستحيلة ϕ : هي الحادثة الخالية
- (3.3) الحادثة العكسية $\bar{A}$: هي الحادثة التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A
- * لتكن B حادثة أخرى من Ω :

$$(4) A \cap B: \text{هي العناصر المشتركة بين } A \text{ و } B$$

$$(5) A \cup B: \text{هي العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين } A \text{ و } B \text{ بدون تكرار}$$

$$(6) A \text{ و } B \text{ غير متلائمتين} \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

$$(7) A \text{ و } B \text{ حادثتان مستقلتان: احتمال الحادثة } A \text{ لا يؤثر في احتمال الحادثة } B \text{ و العكس.}$$

II. قانون الاحتمال

لتكن $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ حيث e_i هو المخرج رقم i مع $i \in \mathbb{N}^*$

- (1) قانون الاحتمال P_i : هو احتمال تحقق المخرج e_i
- (2) احتمال الحادثة A : يرمز له ب $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A
- (3) خواص:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ و } 0 \leq P_i \leq 1$$

Prof Mustapha
KHALEDO

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1 \text{ أي } \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$P(\phi) = 0 \text{ و } P(\Omega) = 1$$

III. تساوي الاحتمال

- (1) تجربة متساوية الاحتمال: هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال
- (2) مصطلحات تساوي الاحتمال:
- "زهر نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقود متوازنة" ، "كريات لا نفرق بينها عند اللمس" ...
- * ملاحظة مهمة جدا: لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار تساوي الاحتمال بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا (و يمكن للمجموعة الشاملة Ω أن تتغير من سؤال لآخر في نفس التمرين)

(3) نتائج:

في حالة تساوي الاحتمال يكون قانون الاحتمال متساوي التوزيع حيث:

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{m}{n}$$

$$P_i = \frac{1}{n} \text{ كل مخرج } e_i \text{ له احتمال}$$

IV. خواص الاحتمالات:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- إذا كانت $A \subset B$ فإن: $P(A) \leq P(B)$
- إذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

V. تعاريف لقانون الاحتمال:

$$\textcircled{1} \text{ الأمل } E: E = \sum_{i=1}^n e_i p_i$$

$$\textcircled{2} \text{ التباين } V: V = \sum_{i=1}^n (e_i - E)^2 p_i \quad \text{أو} \quad V = \sum_{i=1}^n e_i^2 p_i - E^2$$

$$\textcircled{3} \text{ الانحراف المعياري } \sigma: \sigma = \sqrt{V}$$

*ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا عناصر Ω هي قيم الطبع و قيم P_i هي التواترات

VI. المتغير العشوائي X

1. المتغير العشوائي X هو دالة عددية معرفة على Ω
2. عموما نرمز ب " I " لمجموعة قيم X أي $I = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

VII. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو احتمال تحقق المخرج X_i من I و نرمز له ب P_i أو $P(X = x_i)$

VIII. تعاريف للمتغير العشوائي X :

$$\textcircled{1} \text{ الأمل الرياضي } E: E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$\textcircled{2} \text{ التباين } V: V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \quad \text{أو} \quad V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

$$\textcircled{3} \text{ الانحراف المعياري } \sigma: \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Prof Mustapha
KHA-LD9

التحاكي

1. تعريف: التحاكي هو تحويل نقطي معرف بالعلاقة

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \quad (\text{مثل علاقة الارتباط الخطي})$$

حيث O هو مركز التحاكي و $k \in \mathbb{R}^*$ هي نسبته و M' هي صورة M بهذا التحاكي

* نرسم للتحاكي h بالرمز: $h(O, k)$

نتيجة: A, B, C على استقامة واحدة $\Leftrightarrow$ يوجد h وحيد و k وحيد يحقق: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

2. الخاصية المميزة:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$

نتائج:

❶ بما أن $k \neq 0$ و A تختلف عن B فإن: $(AB) \parallel (A'B')$ و منه:

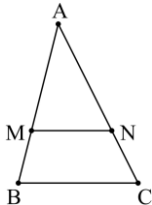
- صورة مستقيم (d) بتحاك هي مستقيم (d') يوازي (d)
- صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ بتحاك هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ حيث $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$

$$A'B' = |k|AB \quad \text{❷}$$

❸ إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن صورته بالتحاكي هي G' مرجح $\{(A', \alpha); (B', \beta)\}$

تذكير: مستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مرجحات $\{(A, \alpha); (B, 1 - \alpha)\}$ مع $\mathbb{R}\alpha \in$

3. المثلثات المتحاكية:



ABC و AMN مثلثان. $M \in (AB)$ و $N \in (AC)$ حيث: $(MN) \parallel (BC)$

التحاكي h الذي مركزه A و يحول B إلى M يحول كذلك C إلى N (نظرية طالس)

4. صورة دائرة:

صورة دائرة (C) مركزها I و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $I' = h(I)$ و نصف قطرها $r' = |k|r$

5. خواص التحاكي:

❶ الحفاظ على استقامية النقط

❷ الحفاظ على التوازي

❸ الحفاظ على الزوايا الموجهة

❹ لا يحافظ على الأطوال و المساحات و الحجوم (التحاكي يضاعف الأطوال $|k|$ مرة و يضاعف المساحات k^2

مرة و يضاعف الحجوم $|k|^3$ مرة)

* ملاحظة: عندما يكون $|k| > 1$ يقوم التحاكي بتكبير الأشكال و عندما يكون $0 < k < 1$ فإن الشكل يصغر k مرة

الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

$\vec{v}(x'; y')$ ، $\vec{u}(x; y)$ بحيث $\vec{v} \neq \vec{0}$ و $\vec{u} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

حالات خاصة:

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا وفي اتجاه واحد فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا ومتعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

* $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ و $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ و $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2. تعامد شعاعين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3. قواعد الحساب

(أ) خواص الجداء السلمي:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \text{①} ; \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{②} ; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{③}$$

(ب) المتطابقات الشهيرة:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} & (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} & (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 & (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \end{aligned}$$

4. الجداء السلمي والاسقاط العمودي

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$

* إذا كان $\vec{AB} \neq \vec{0}$ و $\vec{CD} \neq \vec{0}$ و C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على (AB) فإن:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$$

حالات خاصة:

* إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مرتبطان خطيا وفي اتجاه واحد فإن: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \cdot CD$

* إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مرتبطان خطيا ومتعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \cdot CD$

5. تطبيقات الجداء السلمي

(أ) في المستقيم:

ليكن (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

شعاع التوجيه: $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$; $\vec{v}(-b; a)$

الشعاع الناطمي: $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\vec{n}(a; b)$

* ملاحظة: يكون الشعاع الناطمي دائما عمودي على شعاع التوجيه أي $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Prof Mustapha
KHALED

(ب) في الدائرة:

$$\textcircled{1} \text{ معادلة الدائرة التي مركزها } \Omega(x_0; y_0) \text{ و نصف قطرها } r \text{ هي } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\textcircled{2} \text{ الدائرة التي قطرها } [AB] \text{ هي مجموعة النقطة } M \text{ حيث } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

* ملاحظة: لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و العكس غير صحيح.

6. حساب أطوال، مساحات وأقياس زوايا (العلاقات المترية في مثلث)

$$ABC \text{ مثلث مساحته } S \text{ و نصف محيطه } p \text{ أي } p = \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ حيث } BC = a \text{ و } AC = b \text{ ، } AB = c$$

(أ) مبرهنة المتوسط

$$A \text{ و } B \text{ نقطتان و } I \text{ منتصف } [AB] \text{ لدينا: } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

(ب) مبرهنة الكاشي

$$\textcircled{1} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$\textcircled{2} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$\textcircled{3} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

(ج) مبرهنة المساحة

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

(د) قاعدة هيرون

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(ه) مبرهنة الجيوب

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

7. المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة $A(x_0; y_0)$ وبين مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$ هي:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

8. دساتير الجمع

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos \hat{A} = 1 - \frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \quad ; \quad \cos \hat{A} = 1 + \frac{2p(p-a)}{bc} \quad \text{إضافة:}$$

Prof Mustapha
KHA-LD

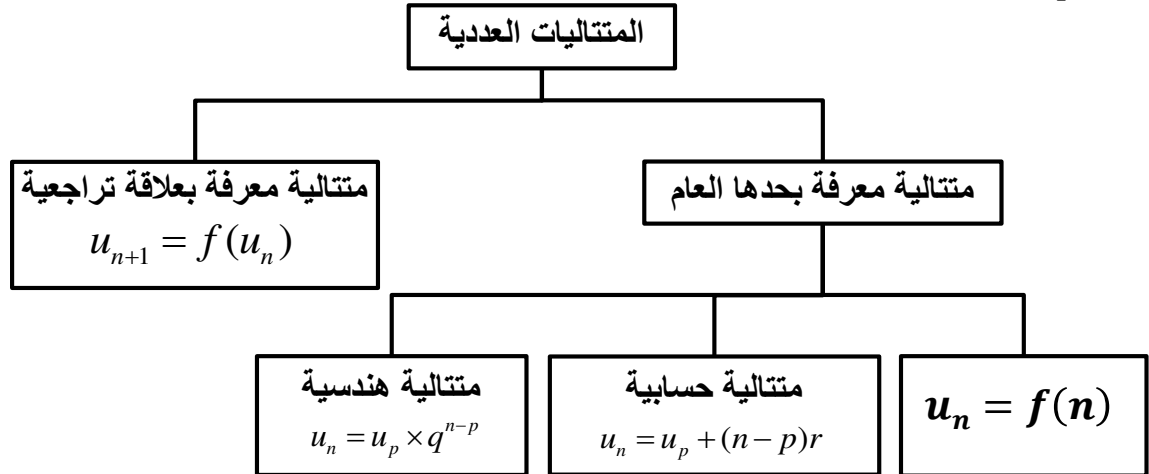
المتتاليات العددية

I. تعاريف و رموز

المتتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n العدد $u(n)$ حيث:
نرمز للمتتالية بالرمز u_n بدلا من $u(n)$ حيث u_n هي صورة n بالمتتالية u
يسمى u_n أيضا الحد العام للمتتالية u أو الحد الذي دليله n
إذا كان $n \geq p$ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n \geq p}$
 u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$
 u_1 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$
 u_p هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل $n \geq p$
يسمى n دليل للمتتالية u أو دليل الحد u_n
 p هو دليل الحد الأول للمتتالية u
 $(n - p + 1)$ هي رتبة الحد u_n
حساب الحد الذي رتبته m أي حساب الحد $u_{(m-p+1)}$

Prof Mustapha
KHA-LD9

II. طرق توليد متتالية عددية



III. اتجاه تغير متتالية عددية

عوما:

فإن	إذا كانت
u متزايدة	$u_{n+1} > u_n$
u متناقصة	$u_{n+1} < u_n$
u ثابتة	$u_{n+1} = u_n$

طريقة ③: نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارنها مع 1

فإن	إذا كانت
u متزايدة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
u متناقصة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
u ثابتة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

طريقة ①: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

فإن	إذا كانت
u متزايدة	$u_{n+1} - u_n > 0$
u متناقصة	$u_{n+1} - u_n < 0$
u ثابتة	$u_{n+1} - u_n = 0$

طريقة ②: ندرس تغيرات f إذا كانت المتتالية

من الشكل: $u_n = f(n)$

[IV]. المتتالية الحسابية

① تعريف

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

⊛ إذا كان الحد الأول هو u_0 فإن:

$$u_n = u_0 + nr$$

⊛ إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

*ملاحظة:

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية حسابية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$S_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n + 1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

④ البرهان أن المتتالية حسابية

طريقة ①: نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

إذا كان: $u_{n+1} - u_n = [r]$ حيث r

عدد ثابت خالي من n فإن u_n حسابية

طريقة ②: نكتب u_n على الشكل

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

⑤ الوسط الحسابي

a, b و c ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية

$$a + b = 2c \text{ أي } u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$$

[V]. المتتالية الهندسية

① تعريف

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

q هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

⊛ إذا كان الحد الأول هو v_0 فإن:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

⊛ إذا كان الحد الأول هو v_1 فإن:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

*ملاحظة:

إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية هندسية

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{1 - q} \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$$

$$S_n = v_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

④ البرهان أن المتتالية هندسية

طريقة ①: نحسب النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$

إذا كان: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = [q]$ حيث q

عدد ثابت خالي من n فإن v_n هندسية

طريقة ②: نكتب v_n على الشكل

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

⑤ الوسط الهندسي

a, b و c ثلاث حدود متتالية من متتالية هندسية

$$a \times b = c^2 \text{ أي } u_{n+1} \times u_{n-1} = u_n^2$$

Prof Mustapha

KHA-LD

[VI]. المتتالية الثابتة

① تعريف: هي المتتالية التي جميع حدودها متساوية أي $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n$

② البرهان أن المتتالية ثابتة

يكفي إثبات أن $u_{n+1} - u_n = 0$ أو أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ أو إثبات أن $u_{n+1} = u_n = u_0$

[VII]. إثبات أن المتتالية لا حسابية ولا هندسية

◀ يكفي برهان أن $u_{n+1} - u_n \neq r$ و أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq q$

◀ أو برهان أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ و أن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

[VIII]. تقارب وتباعد متتالية

u_n متقاربة $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ، حيث $l \in \mathbb{R}$

u_n متباعدة $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$

* مبرهنة: إذا كانت $u_n = f(n)$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

[IX]. نهاية متتالية باستعمال الحصر

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \\ v_n \leq u_n \leq w_n \end{cases} \quad ①$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \\ u_n \geq v_n \end{cases} \quad ②$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \\ u_n \leq v_n \end{cases} \quad ③$$

[X]. نهاية متتالية هندسية

التقارب	النهاية	إذا كان	
متباعدة	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	$v_0 > 0$ و	$q > 1$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$	$v_0 < 0$ و	
متقاربة	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	$-1 < q < 1$	③
متباعدة	غير موجودة	$q \leq -1$	④

[XI]. إثبات أن المتتالية غير رتيبة (غير متزايدة و غير متناقصة)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

② نناقش حسب قيم n الفرق $u_{n+1} - u_n$

③ نستنتج أن u_n غير رتيبة

Prof Mustapha
KHA-LDJ

التعليم في الفضاء (الهندسة الفضائية)

1. المعلم الديكارتي

المعلم للفضاء: هو كل رباعية نقط $(O; I, J, K)$ ليست من نفس المستوي باعتبار المبدأ O و بوضع $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$, و $\vec{OK} = \vec{k}$ نرمز للمعلم ب $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

* يسمى (OI) محور الفواصل، (OJ) محور الترتيب و (OK) محور الرواقم

* يرمز للمستوي (OIJ) ب $P(O; \vec{i}, \vec{j})$

2. احداثيات نقطة واحداثيات شعاع

* نرمز لإحداثيات نقطة M من الفضاء ب $M(x; y; z)$ حيث $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ مع $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

* نرمز لإحداثيات شعاع من الفضاء ب $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ أو $\vec{OM}(x; y; z)$

3. الحساب والخواص

$A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين من الفضاء، $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ شعاعين من الفضاء و $\alpha \in \mathbb{R}$

(أ) حساب إحداثيات الشعاع $\vec{AB}$: $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

(ب) حساب إحداثيات M منتصف القطعة $[AB]$: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

(ج) $\alpha \vec{u} = (\alpha x; \alpha y; \alpha z)$ و $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$

(د) $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ و $\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

4. الأشعة من نفس المستوي

$\vec{u}(a; b; c)$, $\vec{v}(a'; b'; c')$ و $\vec{w}(a''; b''; c'')$ أشعة من الفضاء و $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w}$ من نفس المستوي

Prof Mustapha
KHALD

أي الجملة $\begin{cases} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b'' \\ cx + c'y = c'' \end{cases}$ تقبل حلا $(x; y)$ في $\mathbb{R}^2$

5. معادلة مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل $A(x_A; y_A; z_A)$ و $\vec{u}(a; b; c)$ شعاع توجيه له

$$M(x; y; z) \in (D) \Rightarrow \vec{AM} = \alpha \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x - x_A = \alpha a \\ y - y_A = \alpha b \\ z - z_A = \alpha c \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

و منه معادلة (D) هي: $\begin{cases} b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ c(x - x_A) - a(z - z_A) = 0 \end{cases}$

6. المسافة

① طول شعاع $\vec{u}(x; y; z) \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

② المسافة بين نقطتين $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

7. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم

(S) سطح كرة مركزها O مبدأ المعلم و نصف قطرها α

$$M(x; y; z) \in (S) \Rightarrow OM = \alpha \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$$

8. معادلة المستويات الموازية لأحد مستويات الإحداثيات

① معادلات مستويات الإحداثيات

معادلة $P(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي $z = 0$ ، معادلة $P(O; \vec{j}; \vec{k})$ هي $x = 0$ و معادلة $P(O; \vec{k}; \vec{i})$ هي $y = 0$

② معادلة لمستوى مواز لأحد مستويات الإحداثيات

لتكن $D(a; b; c)$ نقطة من المستوى< معادلة المستوى الذي يشمل D ويوازي $P(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي $z = c$ < معادلة المستوى الذي يشمل D ويوازي $P(O; \vec{j}; \vec{k})$ هي $x = a$ < معادلة المستوى الذي يشمل D ويوازي $P(O; \vec{k}; \vec{i})$ هي $y = b$

9. معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الإحداثيات

ليكن R نصف قطر الأسطوانة< معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Oz) هي $x^2 + y^2 = R^2$ و معادلة المقطع بمستوى معادلته $z = c$ هي $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = c \end{cases}$ < معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Oy) هي $x^2 + z^2 = R^2$ و معادلة المقطع بمستوى معادلته $y = b$ هي $\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 \\ y = b \end{cases}$ < معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Ox) هي $y^2 + z^2 = R^2$ و معادلة المقطع بمستوى معادلته $x = a$ هي $\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = a \end{cases}$ 10. معادلة سطح المخروط الدوراني الذي رأسه O ومحوره أحد محاور الإحداثياتلتكن α قياس نصف زاوية رأس هذا المخروط< معادلة سطح المخروط الذي محوره (Oz) هي: $x^2 + y^2 - \tan^2 \alpha \times z^2 = 0$ < معادلة سطح المخروط الذي محوره (Oy) هي: $x^2 + z^2 - \tan^2 \alpha \times y^2 = 0$ < معادلة سطح المخروط الذي محوره (Ox) هي: $y^2 + z^2 - \tan^2 \alpha \times x^2 = 0$

Prof Mustapha

KdH-A-SDJ

الاحصاء

Prof Mustapha

KHA-LD9

I. رموز ومصطلحات

D_1 : العشري الأول	N : عدد التكرارات (المجموع الكلي)
D_9 : العشري التاسع	Q_1 : الربيعي الأول
Med : الوسيط	Q_3 : الربيعي الثالث

II. الربيعان Q_1 و Q_3 والعشريان D_1 و D_9 تحديد Q_1 ، Q_3 ، D_1 و D_9

طبع كمي مستمر	طبع كمي متقطع	بالترتيب
① Q_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$	① * Q_1 هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{N}{4}$	① نرتب القيم ترتيبا تصاعديا مع تكراراتها
② Q_3 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$	* أو Q_1 هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{1}{4}$	② Q_1 هي القيمة التي رتبته $\frac{N}{4} \leq$
③ D_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{10}$	② * Q_3 هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$	③ Q_3 هي القيمة التي رتبته $\frac{3N}{4} \leq$
④ D_9 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{9}{10}$	* أو Q_3 هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3}{4}$	④ D_1 هي القيمة التي رتبته $\frac{10}{9N} \leq$
		⑤ D_9 هي القيمة التي رتبته $\frac{10}{9N} \leq$

III. خواص الربيعيات

(1) الانحراف الربيعي $I = Q_3 - Q_1$

*ملاحظة 1: الانحراف الربيعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

*ملاحظة 2: في مضلع سلسلة مستمرة المستقيمت التي معادلاتها $x = Q_1$ ، $x = Med$ ، $x = Q_3$ تقسم

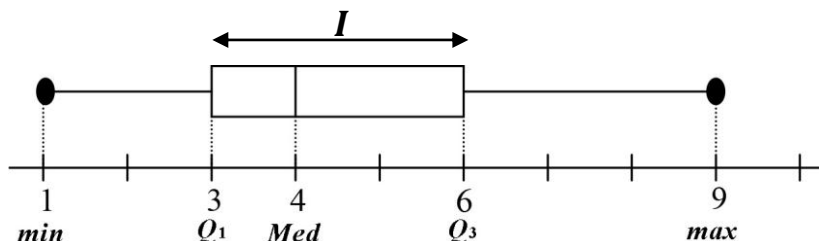
المضلع إلى أربعة مجالات متساوية المساحات

(2) المخطط بالعلب

① نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)

② نعين على هذا المحور القيم: Q_3 ، Med ، Q_1 ، max ، min

③ نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور بحيث طول المستطيل هو الانحراف الربيعي وعرضه كافي

مثال: $Q_3 = 6$ ، $Med = 4$ ، $Q_1 = 3$ ، $max = 9$ ، $min = 1$ 

*ملاحظة: هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع احصائي والمقارنة بين عدة سلاسل احصائية

(3) أثر تغيير تآلفي على الربيعين

A سلسلة إحصائية (x_i, n_i) وسيطها Med و ربيعها Q_1 و Q_3 B سلسلة إحصائية (y_i, n_i) بنفس التكرارات وسيطها Med' و ربيعها Q_1' و Q_3' من أجل كل i لدينا:

$$Q_1' = aQ_1 + b$$

$$y_i = ax_i + b$$

$$Q_3' = aQ_3 + b$$

$$Med' = aMed + b$$

حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$

[IV]. الوسط الحسابي $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i \quad \text{أو} \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^p f_i x_i \quad \text{حيث: } N = \sum_{i=1}^p n_i \quad \text{و} \quad f_i = \frac{n_i}{N}$$

[V]. التباين V

$$V = \sum_{i=1}^p f_i (x_i - \bar{X})^2 \quad \text{أو} \quad V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{X})^2$$

$$V = \sum_{i=1}^p f_i x_i^2 - \bar{X}^2 \quad \text{أو} \quad V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - \bar{X}^2 \quad \text{أيضا}$$

[VI]. الانحراف $S = \sqrt{V}$ [VII]. الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة e_m

Prof Mustapha
KHA-LD9

$$e_m = \sum_{i=1}^p f_i |x_i - \bar{X}|$$

[VIII]. خواص التباين والانحراف المعياري
(1) الخاصية الأساسية

$$g(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - a)^2 \quad \text{الدالة} \quad \text{تقبل قيمة حدية صغرى لما } a = \bar{X} \quad \text{و هذه القيمة هي التباين } V$$

(2) التغيير التآلفي

إذا كانت $A (x_i, n_i)$ سلسلة إحصائية تباينها V_x وانحرافها S_x و $B (y_i, n_i)$ سلسلة إحصائية تباينها V_y وانحرافها S_y بنفس التكرار و $y_i = ax_i = b$ مع $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$ و من أجل $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$ يكون لدينا:

$$S_y = |a| S_x \quad \text{و} \quad V_y = a^2 V_x$$

[IX]. تلخيص سلسلة إحصائية

◀ يتم تلخيص سلسلة إحصائية بمؤشرين (مؤشر موقع ومؤشر تشتت)

◀ عموماً نختار الثنائية (الوسيط، الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة): (Med, e_m)

أو الثنائية (الوسط الحسابي، الانحراف المعياري): $(\bar{X}, S_x)$

◀ يمكن استعمال ثنائيات أخرى لتلخيص سلسلة كالثنائية (الوسيط، المدى) لكن يعاب على المدى تأثيره بالقيم الشاذة

◀ تستخدم أحيانا الثنائية (الوسيط، الانحراف الربيعي) لتلخيص السلسلة و هي ثنائية لا تتأثر بالقيم الشاذة

◀ تلخيص سلسلة إحصائية يمكننا من مقارنته بسلسلة أخرى ملخصة بنفس الثنائية