

الحل المفصل لسلسلة الدوال اللوغاريتمية

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

التمرين 01

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

① أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

② أ/ بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,5; 2[$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II- الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

② أحسب $f'(x)$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

③ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

④ أ/ أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب/ أرسم (C_f) و (Δ)

⑤ ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x + m$

⑥ h هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2+1}$

إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

حل تمرين 01

① أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❖ أولا النهايات

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + x^2] = 1$ ، ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + x^2 - 2x^2 \ln x] = +\infty - \infty$$

هي حالة عدم تعيين ، لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) \right] = -\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - 4x \ln x + \frac{1}{x}(-2x^2) = -4x \ln x$$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $-4x < 0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ عكس إشارة $\ln x$ ، ومنه

x	0	1	$+\infty$
$-4x$	○	—	—
$\ln x$		○	+
$g'(x)$		+	—

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$

جدول التغيرات

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		○	—
$g(x)$		2	$-\infty$

② أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,5; 2[$

الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[1,5; 2]$ ولدينا : $\begin{cases} g(1,5) = 1.42 \\ g(2) = -0.54 \end{cases}$ ، ومنه $g(1,5) \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,5; 2[$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		○	—

II- الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(0; i, j)$

① أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln x}{x^2 + 1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x^2 + 1} \right] = \frac{+\infty}{+\infty}$$

هي حالة عدم تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x كعامل مشترك 0 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \left(\frac{\ln x}{x} \right)}{x \left(x + \frac{1}{x} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{\ln x}{x}}{x + \frac{1}{x}} \right]$

② أحسب $f'(x)$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\frac{x^2 + 1 - 2x^2 \ln x}{x}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{g(x)}{x(x^2 + 1)^2}$$

بما أن $x(x^2 + 1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

3 بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصر $f(\alpha)$

لدينا : (1) $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2+1}$ ، ولدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ أي $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$ ومنه

$$\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2} \dots \dots (2)$$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2+1} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2} \times \frac{1}{\alpha^2+1} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

و. ه. م

استنتاج حصر $f(\alpha)$

لدينا : $1.5 < \alpha < 2$ ، يكافئ $2.25 < \alpha^2 < 4$ ، يكافئ $4.5 < 2\alpha^2 < 8$ ، يكافئ $\frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{4.5}$

$$0.12 < f(\alpha) < 0.22$$

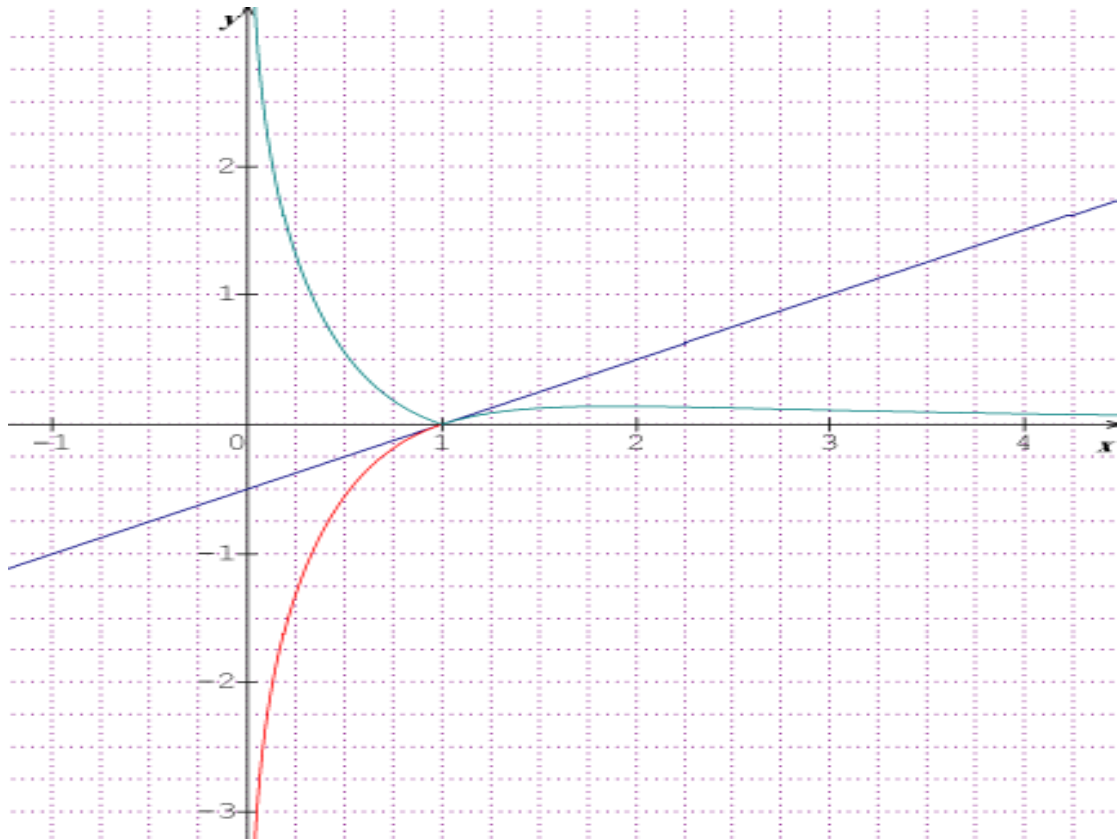
4 أ/ أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(\Delta): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

ب/ أرسم (C_f) و (Δ)



5 ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x + m$

حلول المعادلة بيانيا هو فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + m$

المنطقة	قيم m
للمعادلة حلان متميزان	$m \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$
للمعادلة حلا وحيدا	$m = -\frac{1}{2}$
المعادلة ليس لها حلول	$m \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$

6 h هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

أولا يجب أن نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = f(x) & ; \ln x \geq 0 \\ -\frac{\ln x}{x^2 + 1} = -f(x) & ; \ln x \leq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = f(x) & ; x \geq 1 \\ -\frac{\ln x}{x^2 + 1} = -f(x) & ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

لما يكون $x \geq 1$ فإن $h(x) = f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

لما يكون $0 < x \leq 1$ فإن $h(x) = -f(x)$ ، ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل



التمرين 02

I- نعتبر الدالة h المعرفة $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \ln(1 + e^x)$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $h(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

2 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

ب/ أدرس تغير اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

3 أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (Δ) مع (C)

ج/ أحسب $h(0)$ ، و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أرسم (C)

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(1 + e^{-|x|})$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4 أ/ برهن أن $f(x) = h(x)$ على مجال يطلب تعيينه

ب/ بين أن محور الترتيب هو محور تناظر للدالة f

5 إشرح كيف يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

6 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = -m$ حلين مختلفين في الإشارة

1 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $h(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

$$\ln(1 + e^x) = \ln[e^x(e^{-x} + 1)] = \ln e^x + \ln(e^{-x} + 1) = x + (e^{-x} + 1) = h(x)$$

و.ه.م

2 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^x)] = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

ب/ أدرس تغير اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جتدول تغيراتها

$$h'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	$+\infty$

3 أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^{-x})] = 0$$

و.ه.م

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (Δ) مع (C) : ندرس إشارة الفرق : $h(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$

لدينا $e^{-x} > 0$ ، أي $1 + e^{-x} > 1$ ، وبما أن الدالة $x \mapsto \ln x$ متزايدة تماما فإن $\ln(1 + e^{-x}) > 0$

ومنه $h(x) - x > 0$ ، ومنه نستنتج أن (C) يقع فوق (Δ)

ج / أحسب $h(0)$ ، و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أرسم (C) .

$$h(0) = \ln(1 + e^0) = \ln 2$$

ومنه (C) يقطع محور الترتيب في النقطة $(0; \ln 2)$

Π - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(1 + e^{-|x|})$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$

4 أ/ برهن أن $f(x) = h(x)$ على مجال يطلب تعيينه

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + e^{-x}) = h(-x) & ; x \geq 0 \\ \ln(1 + e^x) = h(x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

من أجل $x \in]-\infty; 0]$ فإن $f(x) = h(x)$

ب/ بين أن محور الترتيب هو محور تناظر للدالة f

من أجل كل $x \in D_f$ ، و $-x \in D_f$

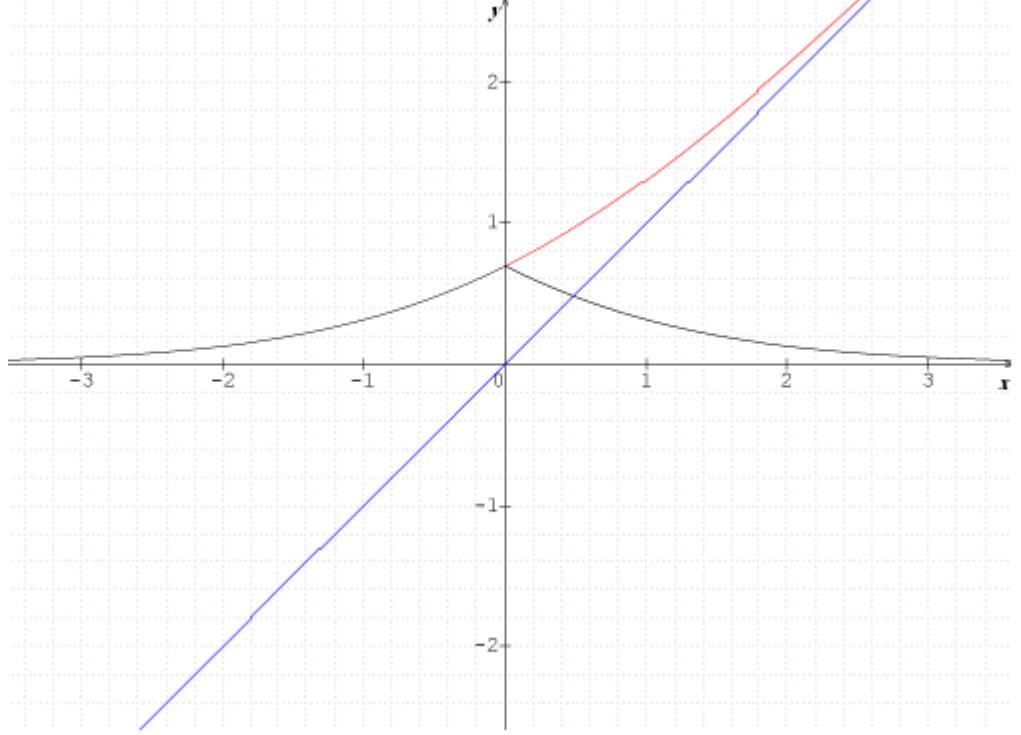
$$f(-x) = \ln(1 + e^{-|-x|}) = \ln(1 + e^{-|x|}) = f(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة f زوجية ، ومنه محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

5 إشرح كيف يمكن رسم (C_f) انطلاقاً من (C) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

لما يكون $x \in]-\infty; 0]$ فإن $f(x) = h(x)$ ومنه (C_f) ينطبق على (C)

وبما أن الدالة f زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب .



6 عين بياناً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = -m$ حلين مختلفين في الإشارة

$$m \in]-\ln 2; 0[\text{ أي } -m \in]0; \ln 2[$$



03

التمرين

I- لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1 ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$

2 استنتج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $g(x) > 0$

II- f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(0; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقارباً مائلاً له عند $+\infty$

ج/ حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3 بين أنه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) مواز للمستقيم (D) ثم اكتب معادلة له

4 بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

5 أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f)

6 ناقش بياناً حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $mx - 2 \ln(x) = 0$

حل تمرين 03

1 ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$

❖ أولاً النهايات

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 + 2] = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} [-2 \ln x] = +\infty$ ، ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2 - 2 \ln x] = +\infty - \infty$

هي حالة عدم تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

❖ ثانياً الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ فإن إشارة المشتق من إشارة البسط

$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin D_g \text{ (مرفوض) } \end{cases}$ ، ومنه $x^2 = 1$ ، ومنه $2x^2 - 2 = 0$ ، معناه $g'(x) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

ومنه الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]0; 1]$ و متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$

احسب $g(1)$: لدينا $g(1) = 1^2 + 2 - 2 \ln 1 = 3$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

2 استنتج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $g(x) > 0$

نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى 3 ومنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$

فإن $g(x) \geq 3 > 0$ ومنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $g(x) > 0$

Π - f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(0; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln x}{x} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2 \ln x}{x} \right] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln x}{x} \right] = 0$$

و.ه.م

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (D) مع (C)

$$f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x}$$

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x}$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ومنه

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في $(1; 1)$	(C_f) فوق (D)

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x}{x^2} = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

و.ه.م

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2 > 0$ ، و $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 بين أنه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) مواز للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة له

$$\text{للبحث عن } x_0 \text{ نحل المعادلة } f'(x_0) = 1 \text{ ، أي } \frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1 \text{ ، أي } g(x_0) = x_0^2$$

$$\text{لدينا : } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \text{ ، ومنه } 2 - 2 \ln x_0 = 0 \text{ ، ومنه } 2 \ln x_0 = 2 \text{ ، ومنه } \ln x_0 = 1$$

$$\text{ومنه } x_0 = e^1$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا وحيد (Δ) يوازي المستقيم (D) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e^1$

$$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(\Delta): y = f'(e^1)(x - e^1) + f(e^1)$$

$$(\Delta): y = 1(x - e^1) + e^1 + 2e^{-1}$$

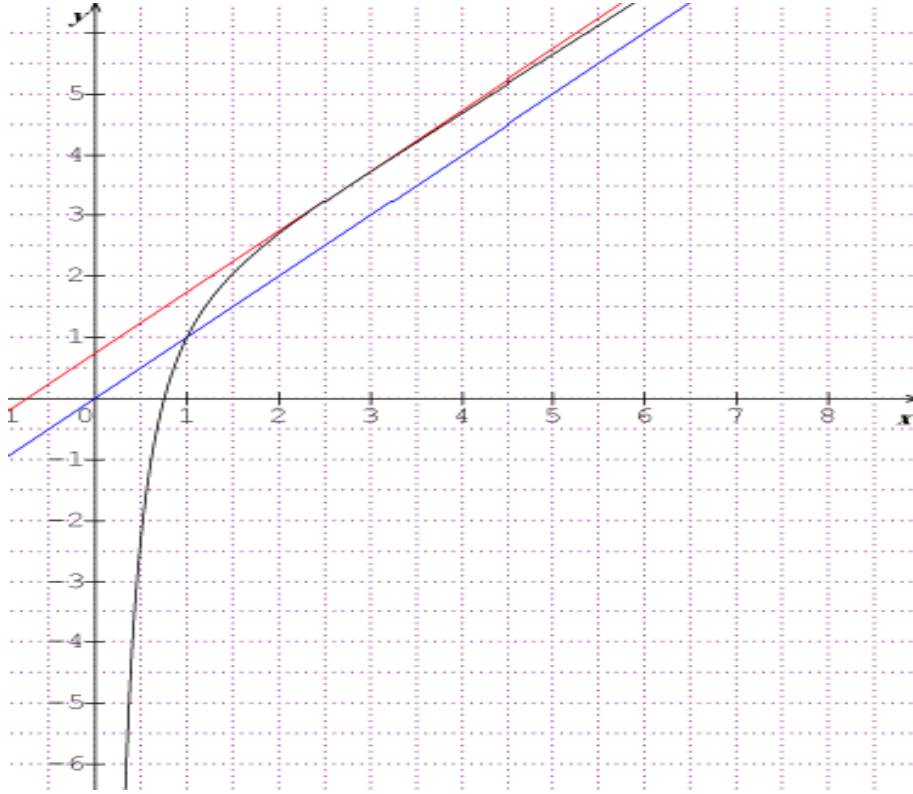
$$(\Delta): y = x + 2e^{-1}$$

4 بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\frac{1}{2}; 1]$ ولدينا : $\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = -2,22 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ ، ومنه $f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

5 أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f)



6 ناقش بياننا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $mx - 2 \ln(x) = 0$

المعادلة $mx - 2 \ln(x) = 0$ تكافئ $2 \ln(x) = mx$ تكافئ $\frac{2 \ln(x)}{x} = m$

تكافئ $x + \frac{2 \ln(x)}{x} = x + m$ تكافئ $f(x) = x + m$

حلول المعادلة بياننا هو فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

المناقشة	قيم m
للمعادلة حلا وحيدا	$m \in]-\infty; 0]$
للمعادلة حلان متمايزان	$m \in]0; 2e^{-1}[$
للمعادلة حلا وحيدا	$m = 2e^{-1}$
المعادلة ليس لها حلول	$m \in]2e^{-1}; +\infty[$



التمرين 04

I- دالة معرفة على المجال $] -1; +\infty[$ ب : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

- ② بين أنه من أجل x من $]-1; +\infty[$ بـ $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ثم شكل جدول تغيرات h
- ③ أحسب $h(0)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x
- II f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(0; \vec{i}, \vec{j})$
- ① أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

ب/ باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

- ③ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ بـ $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- ④ بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4
- ⑤ أرسم (C_f)

حل تمرين 04

- ① أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1)] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad \left| \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} [x^2 + 2x] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} [\ln(x+1)] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$$

- ② بين أنه من أجل x من $]-1; +\infty[$ بـ $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ثم شكل جدول تغيرات h

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1) + 1}{x+1} = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$$

و.ه.م

بما أن $x \in]-1; +\infty[$ ، فإن $x+1 > 0$ ، ولدينا $1 + 2(x+1)^2 > 0$

ومنه $h'(x) > 0$ ، إذن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- ③ أحسب $h(0)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x

$$h(0) = 0^2 + 2(0) + \ln(0+1) = 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		-	+

-II f دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- ① أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} [x - 1] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

ومنه المستقيم $x = -1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ برهن أن: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

بوضع $u = e^t$ أي $\ln u = t$

لما $t \rightarrow +\infty$ فإن $u \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u} = +\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{u}{\ln u}} = 0 \quad \text{فإن} \quad \frac{\ln u}{u} = \frac{1}{\frac{u}{\ln u}}$$

و.ه.م

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

2 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

بما أن $x \in]-1; +\infty[$ ، فإن $x + 1 > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-\ln(x+1)$

$-\ln(x+1) \geq 0$ ، يكافئ $\ln(x+1) \leq 0$ ، يكافئ $\ln(x+1) \leq \ln 1$ ، يكافئ $x + 1 \leq 1$

يكافئ $x \leq 0$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - (x - 1)$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع في (D) $A(0; -1)$	(C_f) تحت (D)

3 بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

و.ه.م

بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة المشتق من إشارة $h(x)$
ومنه نستنتج أن f متناقصة تماما على $[-1; 0]$ ومتزايدة تماما على $[0; +\infty[$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

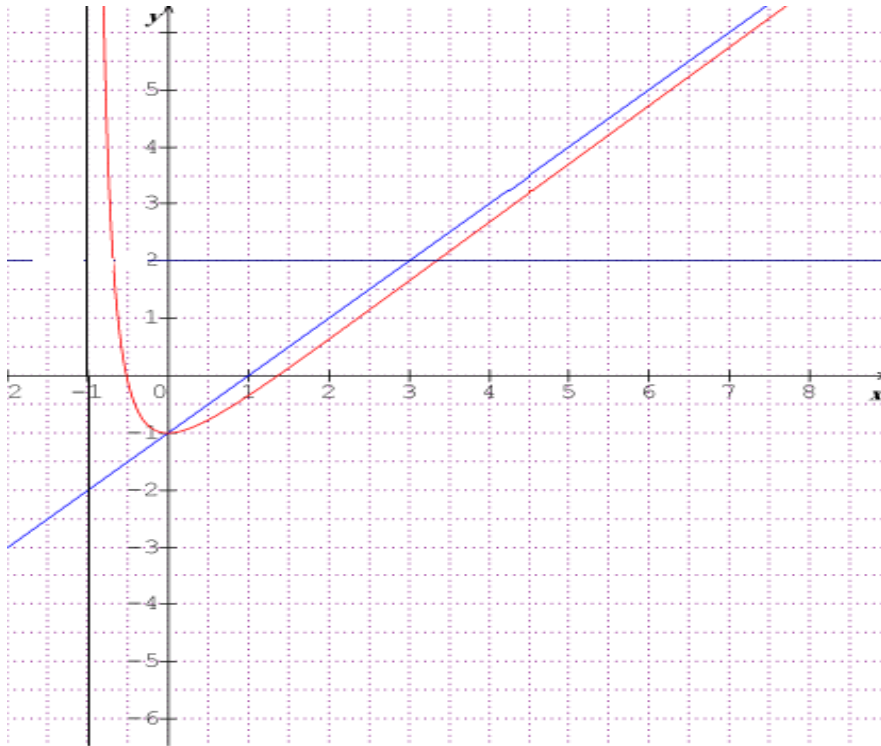
4 بين أن المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[3,3; 3,4]$ ولدينا :

$$\begin{cases} f(3,3) = 1,9 < 2 \\ f(3,4) = 2,06 > 2 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4

5 أرسم (C_f)



التمرين 05

I- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)

2 أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم استنتج النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وفسر النتائج هندسيا

3 أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

- 4 أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$: (Δ) في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتهما
- 5 أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$
- ب/ أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1
- 6 أثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0; 1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتهما ، ثم أكتب معادلة للمماس (T)
- 7 أ/ أرسم (T) ، (Δ) و (C_f)
- ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$
- II - h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1 بين أن h دالة زوجية
- 2 دون دراسة تغيرات الدالة h ، ارسم (C_h) معللا إجابتك

حل تمرين 05

1 أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

أولا : نحسب $f(-x)$:

$$f(-x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} = 1 + \frac{\ln x^2}{x}$$

بالتعويض نجد

$$f(-x) + f(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

لدينا من جهة :

$$f(-x) + f(x) = 2$$

ومن جهة أخرى :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

ومنه نستنتج أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

2 أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{\ln x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{2\ln|x|}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{2\ln x}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\ln x^2}{x} \right] = +\infty$$

استنتج النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا مما سبق : $f(-x) + f(x) = 2$ ومنه $f(x) = 2 - f(-x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [2 - f(-x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [2 - f(x)] = 2 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - f(-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - f(x)] = 2 - 1 = 1$$

تفسير النتائج هندسيا

المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

المستقيم $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

3 أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات f

$$f'(x) = -\frac{\frac{2}{x}(x) - \ln x^2}{x^2} = -\frac{2 - \ln x^2}{x^2} = \frac{-2 + \ln x^2}{x^2}$$

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-2 + \ln x^2)$

$-2 + \ln x^2 \geq 0$ ، يكافئ : $\ln x^2 \geq 2$ ، يكافئ : $x^2 \geq e^2$ ، يكافئ : $x > e$ و $x < -e$

$$x \in]-\infty; -e] \cup [e; +\infty[$$

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -e]$ و $[e; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $]-e; 0[$ و $]0; e]$

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	1	$\nearrow \approx 1,7$ $\searrow -\infty$		$+\infty$ $\searrow \approx 0,26$ $\nearrow 1$	

4 أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$: (Δ) في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتهما

نحل المعادلة $f(x) = 1$

$$1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1 \text{ ، يكافئ } -\frac{\ln x^2}{x} = 0 \text{ ، يكافئ } \frac{\ln x^2}{x} = 0 \text{ ، يكافئ } \ln x^2 = 0 \text{ ، يكافئ } x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ أو } x = 1$$

ومنه المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$: (Δ) في النقطتين $(-1; 1)$ و $(1; 1)$

5 أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ ولدينا $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(-\frac{1}{2}) = -1,7 \end{cases}$: $f(-1) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$ ،

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

ب/ أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(D): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(D): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(D): y = -2x + 3$$

6 أثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0; 1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب

تعيين إحداثيتهما ، ثم أكتب معادلة للمماس (T)

للبحث عن x_0 نحل المعادلة $1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

$$1 = -x_0 \times f'(x_0) + f(x_0)$$

$$1 = -x_0 \left(\frac{-2 + \ln x_0^2}{x_0^2} \right) + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0}$$

$$0 = \frac{2 - \ln x_0^2}{x_0} - \frac{\ln x_0^2}{x_0}$$

$$\frac{2 - 2 \ln x_0^2}{x_0} = 0$$

$$2 - 2 \ln x_0^2 = 0$$

$$\ln x_0^2 = 1$$

$$x_0^2 = e^1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{e^1} \\ x_0 = -\sqrt{e^1} \end{cases}$$

ومنه المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0; 1)$ ويمس المنحني (C_f) في النقطتين

$$(-\sqrt{e^1}; 1 + \frac{1}{\sqrt{e^1}}) \text{ و } (\sqrt{e^1}; 1 - \frac{1}{\sqrt{e^1}})$$

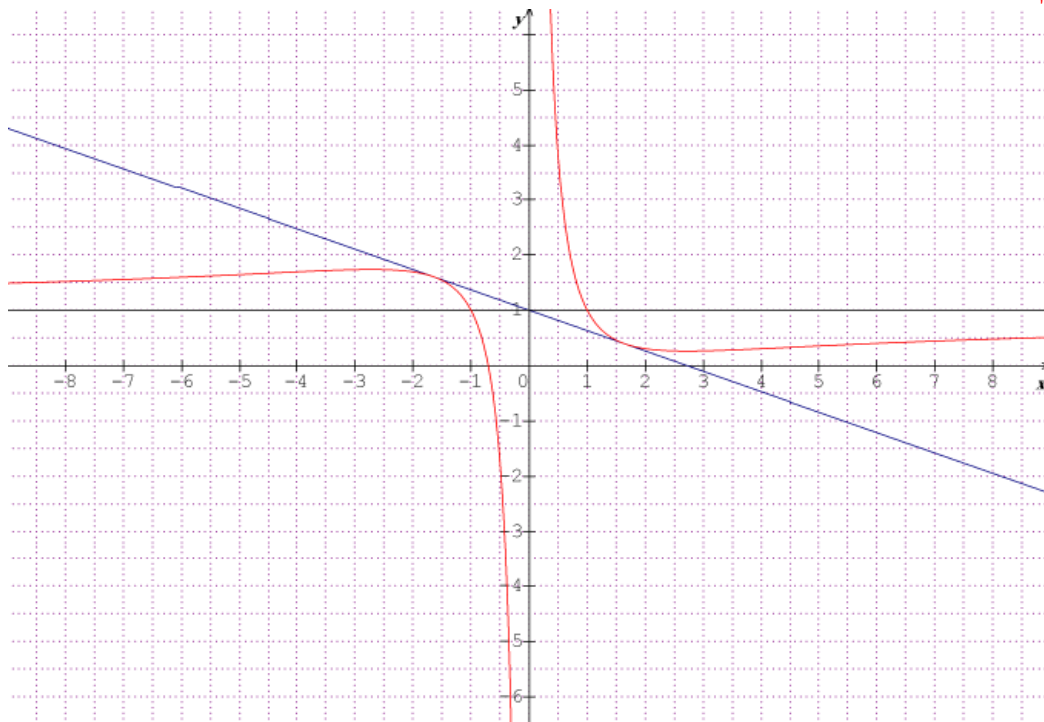
أكتب معادلة للمماس (T): الأمر سيان سواء عوضنا بـ $x_0 = \sqrt{e^1}$ أو $x_0 = -\sqrt{e^1}$

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(\sqrt{e^1})(x - \sqrt{e^1}) + f(\sqrt{e^1})$$

$$(D): y = -\frac{1}{e}x + 1$$

7 أ / أرسم (T) ، (Δ) و (C_f)



ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$

للبحث عن النقطة الثابتة نتبع الخطوات التالية: $y = mx + 1$ أي $y - mx - 1 = 0$

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ومنه جميع المستقيمات تشمل النقطة $A(0; 1)$

✓ إذا كان $m \in]-\infty; -\frac{1}{e}[$ ، فإن للمعادلة لا تقبل حلول

✓ إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ ، للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

✓ إذا كان $m \in]-\frac{1}{e}; 0[$ ، فإن للمعادلة حلان موجبان معا وحلان سالبان معا

✓ إذا كان $m \in [0; +\infty[$ ، فإن للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

II - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$
1 بين أن h دالة زوجية

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية **و. ه. م**

2 دون دراسة تغيرات الدالة h ، ارسم (C_h) مغللا إجابتك

أولا يجب أن نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\ln x^2}{x} & ; x > 0 \\ 1 - \frac{\ln x^2}{x} = f(x) & ; x < 0 \end{cases}$$

لما يكون $x \in]-\infty; 0[$ فإن $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن الدالة h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب



التمرين 06 (رياضيات / تقني رياضي)

I - الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x - x \ln x$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

2 بين أن المعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$

3 استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0; +\infty[$

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$

1 بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادليتهما $x = 0$ و $y = 0$

2 أ/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب/ بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]0; \alpha[$ ومتناقصة على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

3 أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب/ عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

4 أ/ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ب/ أرسم (C_f)

5 نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي :

$$x^2 + x - 2m(x + 1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ/ تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

ب/ عين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين

-II h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ ، (C_h) منحناها البياني

أ/ بين أن الدالة h زوجية

ب/ ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

حل تمرين 06

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x - x \ln x$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x - x \ln x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - \ln x)] = -\infty$$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 1 - \ln x + \frac{1}{x}(-x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	0	1	$-\infty$

2 بين أن المعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[3,5; 3,6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(3,5) = -0,8 > -1 \\ g(3,6) = -1,01 < -1 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$

3 استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x) + 1$		+	-

-II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

1 بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادليتهما $x = 0$ و $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln x}{x+1} \right] = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x+1} \times \frac{x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} \right] = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2 أ/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1-\ln x}{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{g(x)+1}{x}}{(x+1)^2} = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

و.ه.م

ب/ بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]0; \alpha]$ ومتناقصة على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x(x+1)^2 > 0$ ، فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+1$

ومنه نستنتج أن الدالة f متزايدة على المجال $]0; \alpha]$ ومتناقصة على $[\alpha; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

3 أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

ب/ عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بياناً

حسب تعريف العدد المشتق فإن :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha) + 1}{\alpha(\alpha + 1)^2} = \frac{-1 + 1}{\alpha(\alpha + 1)^2} = 0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \alpha$

4 أ/ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1} \dots \dots (1)$$

لدينا مما سبق $g(\alpha) = -1$ ، ومنه $\alpha - \alpha \ln \alpha = -1$ أي $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha} \dots \dots (2)$

بتعويض (2) في (1) نجد $f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$

و.ه.م

$$3,5 < \alpha < 3,6$$

$$\frac{1}{3,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3,5}$$

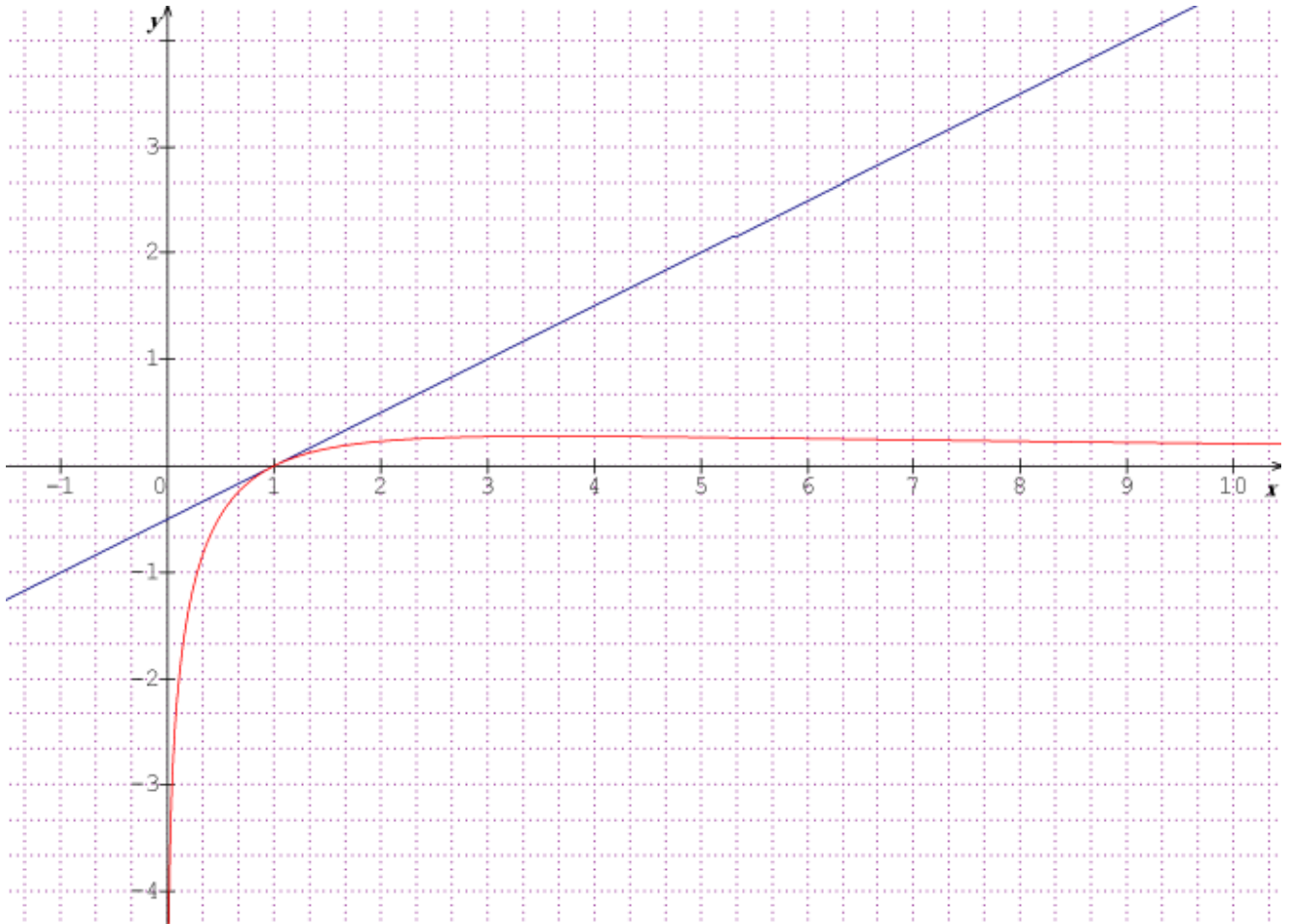
$$0,28 < f(\alpha) < 0,29$$

لدينا

ومنه

ومنه

ب/ أرسم (C_f)



5 نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي :

$$x^2 + x - 2m(x + 1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ/ تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

$$x^2 + x - 2m(x + 1) = \ln(x^2)$$

$$x(x + 1) - 2m(x + 1) = 2\ln x$$

$$x - 2m = \frac{2\ln x}{x + 1}$$

$$\frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - m$$

و.ه.م

ب/ عين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين

$$m \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ أي } -m \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$$

II- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ ، منحناها البياني

أ/ بين أن الدالة h زوجية

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

$$h(-x) = \frac{\ln|-x|}{-|-x|-1} = \frac{\ln|x|}{-|x|-1} = h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية

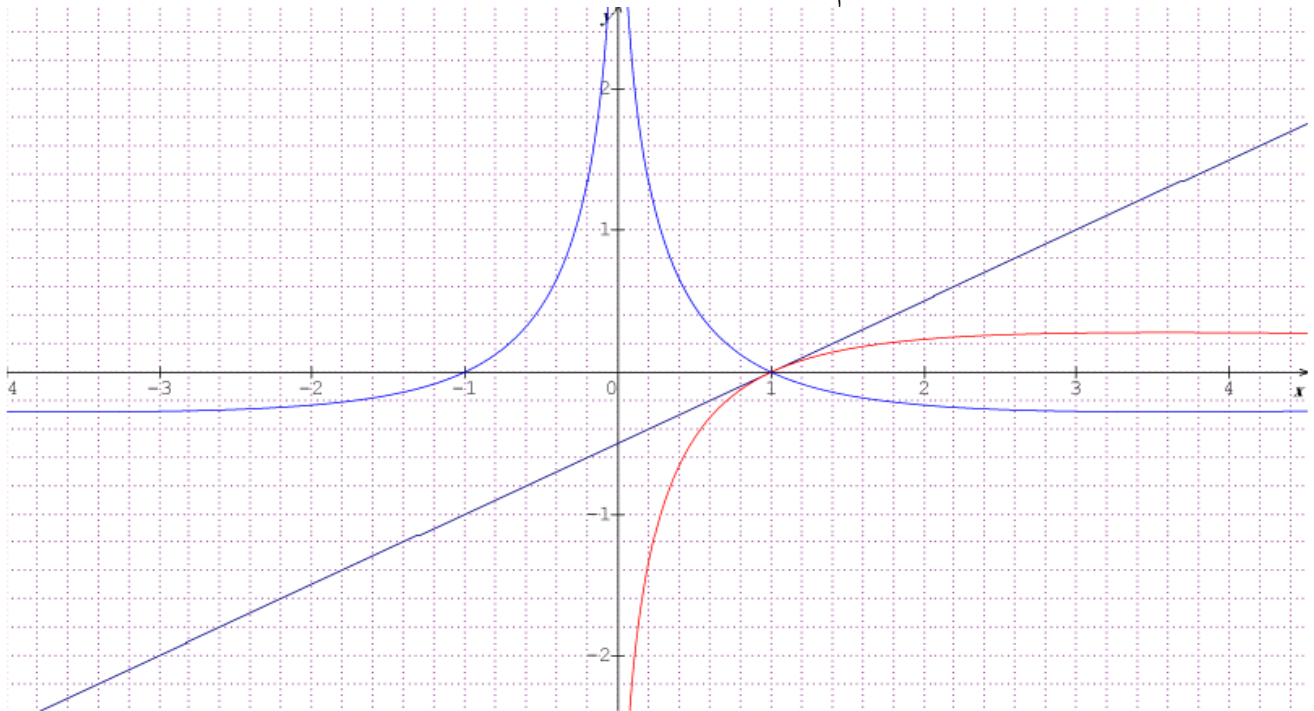
ب/ ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

أولا يجب أن نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{-x-1} = -f(x) & ; x > 0 \\ \frac{\ln(-x)}{x-1} & ; x < 0 \end{cases}$$

لما يكون $x > 0$ فإن $h(x) = -f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن الدالة h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب



التمرين 07

I- g الدالة العددية المعرفة $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - 2 \ln x$

1 أ/ ادرس تغيرات الدالة g ، ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II- f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x}(1 + 2 \ln x)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب/ بين أن f' مشتقة الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2 أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ج/ بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5 < \alpha < 0,6$

3 أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x; 2)$ مع $x \geq 1$

ب/ حل المعادلة $x^2 \times g'(x) - 2x \times g(x) = 0$ ، ثم بين أن $B\left(e; e + \frac{3}{e}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ج/ أنشئ (Δ) و (T) ، (C_f)

حل تمرين 07

I- الدالة العددية المعرفة $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - 2 \ln x$

1 أ/ ادرس تغيرات الدالة g

❖ أولا النهايات

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \ln x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 - 2 \ln x = +\infty - \infty$$

هي حالة عد تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2} \right) \right] = +\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة البسط

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (مرفوض) } \end{cases} \text{ ومنه } x^2 = 1 \text{ ، ومنه } 2x^2 - 2 = 0 \text{ ، معناه } g'(x) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

ومن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى 2 ، ومنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) \geq 2 > 0$

ومنه بالتعدي $g(x) > 0$

1- f - Π دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x}(1 + 2 \ln x)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{x} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + 2 \ln x] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{x} \right] = +\infty$$

ب/ بين ان f' مشتقة الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}(1 + 2 \ln x) + \frac{2}{x} \times \frac{1}{x} = 1 - \frac{1 + 2 \ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 1 - 2 \ln x + 2}{x^2}$$

$$\frac{x^2 + 1 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2 > 0$ و $g(x) > 0$ فإن $f(x) > 0$ ومنه نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{x} \right] = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $y = x$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \frac{1}{x}(1 + 2 \ln x)$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $(1 + 2 \ln x)$ ومنه

$$1 + 2 \ln x \geq 0 \text{ يكافئ } 2 \ln x \geq -1 \text{ يكافئ } \ln x \geq \frac{-1}{2} \text{ يكافئ } x \geq e^{\frac{-1}{2}}$$

x	0	$e^{\frac{-1}{2}}$	$+\infty$
$f(x) - x$		-	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع في (Δ) $A(e^{\frac{-1}{2}}; e^{\frac{-1}{2}})$	(C_f) فوق (Δ)

ج/ بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5 < \alpha < 0,6$

الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $[0,5; 0,6]$ ولدينا : $\begin{cases} g(0,5) = -0,27 \\ g(0,6) = 0,56 \end{cases}$ ، ومنه $g(0,5) \times g(0,6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5 < \alpha < 0,6$

3 أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x;2)$ مع $x \geq 1$

للبحث عن x_0 نقوم بحل المعادلة $f(x_0) = 2$ ومنه $x_0 + \frac{1}{x_0}(1 + 2 \ln x_0) = 2$

يكافئ $x_0 + \frac{1+2 \ln x_0}{x_0} - 2 = 0$ ، يكافئ $x_0 + \frac{1}{x_0}(1 + 2 \ln x_0) - 2 = 0$

يكافئ $\frac{x_0^2 + 1 + 2 \ln x_0 - 2x_0}{x_0} = 0$ ، يكافئ $x_0^2 + 1 + 2 \ln x_0 - 2x_0 = 0$ ، يكافئ $(x_0 - 1)^2 + 2 \ln x_0 = 0$

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 = 0 \\ 2 \ln x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ \ln x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = 2x$$

ب/ حل المعادلة $x^2 \times g'(x) - 2x \times g(x) = 0$

$$x^2 \times g'(x) - 2x \times g(x) = 0$$

$$x^2 \left(\frac{2x^2 - 2}{x} \right) - 2x(x^2 + 1 - 2 \ln x) = 0$$

$$x(2x^2 - 2) - 2x(x^2 + 1 - 2 \ln x) = 0$$

$$x(2x^2 - 2 - 2x^2 - 2 + 4 \ln x) = 0$$

$$x(-4 + 4 \ln x) = 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -4 + 4 \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \ln x = 1 \Rightarrow \{ x = e$$

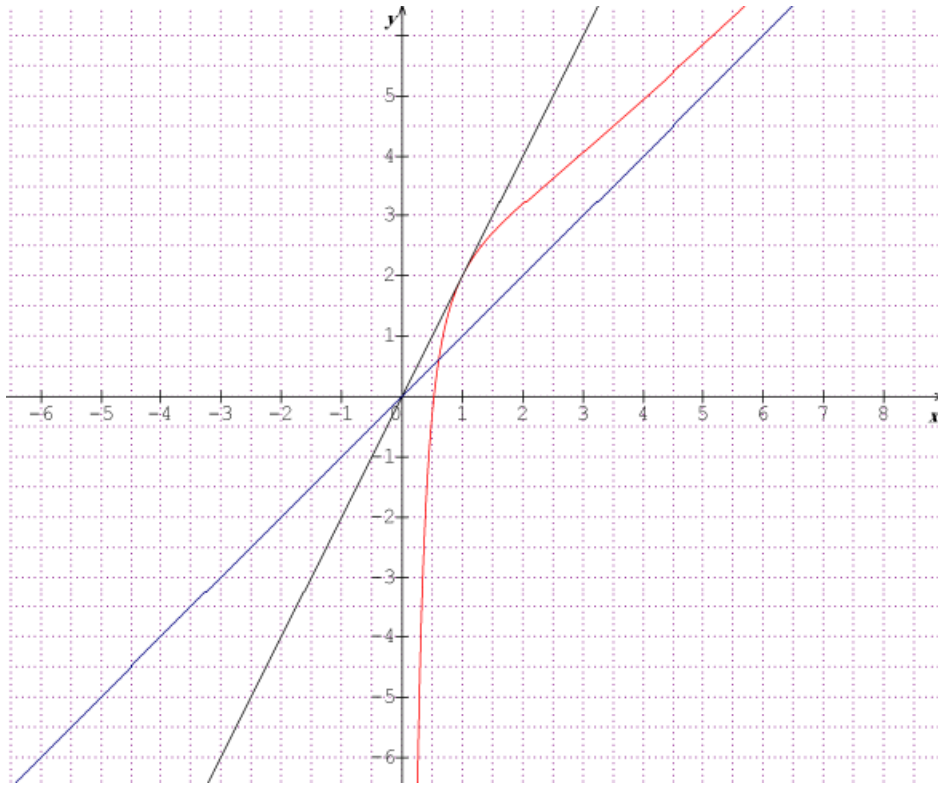
ثم بين أن $B(e; e + \frac{3}{e})$ نقطة انعطاف لـ (C_f)

$$f''(x) = \frac{x^2 \times g'(x) - 2x \times g(x)}{x^4}$$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-4 + 4 \ln x)$

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$		⊖	+

بما أن $f''(x)$ إنعدم عند $x = e$ مغيرا إشارته فإن النقطة $B(e; e + \frac{3}{e})$ نقطة انعطاف لـ (C_f)



التمرين 08

I- f دالة معرفة على المجال $D_f =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2/ أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$ ثم إستنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول التغيرات

ب/ عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات فاصلة 2

II- g دالة معرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1/ أ/ بين أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$ فإن : $\frac{x+1}{x} > 1$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

ج/ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ ، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C)

د/ أرسم (C) و (Δ) ثم المنحنى (C_f)

2/ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = 0$

I-f دالة معرفة على المجال $D_f =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{x-1} \right] = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1)] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(x+1)] = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \left| \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(x+1)] = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x-1} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1)] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2 أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$ ثم إستنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول التغيرات

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+x^2+1-2x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2-3x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$$

و.ه.م

لدينا من أجل كل $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ فإن $x+1 > 0$ ، وبما أن $(x-1)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

x	-1	0	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $]-1; 0[$ و $]3; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجالين $]0; 1[$ و $]1; 3[$

x	-1	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	+	
$f(x)$		$-\infty$	-1	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \ln 4$	$+\infty$

ب/ عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات فاصلة 2

$$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(\Delta): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$(\Delta): y = \frac{-2}{3}x + \frac{7}{3} + \ln 3$$

$g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$: ب : $]1; +\infty[$ معرفة على $g(x)$ دالة معرفة على $g(x)$

1 أ/ بين أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$ فإن: $\frac{x+1}{x} > 1$

$$\frac{x+1}{x} > 1, \quad \frac{x+1}{x} - 1 > 0, \quad \text{يكافئ} \quad \frac{x+1-x}{x} > 0, \quad \text{يكافئ} \quad \frac{1}{x} > 0$$

وهو محقق دوما من أجل كل x من $]1; +\infty[$

استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$

لدينا من أجل كل x من $]1; +\infty[$ فإن $x - 1 > 0$ ومنه
لدينا مما سبق من أجل كل x من $]1; +\infty[$ فإن: $\frac{x+1}{x} > 1$ ، يكافئ $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > 0$ (**)
بجمع (*) مع (**) طرفا لطرف نجد $g(x) > 0$

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x-1} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] = \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

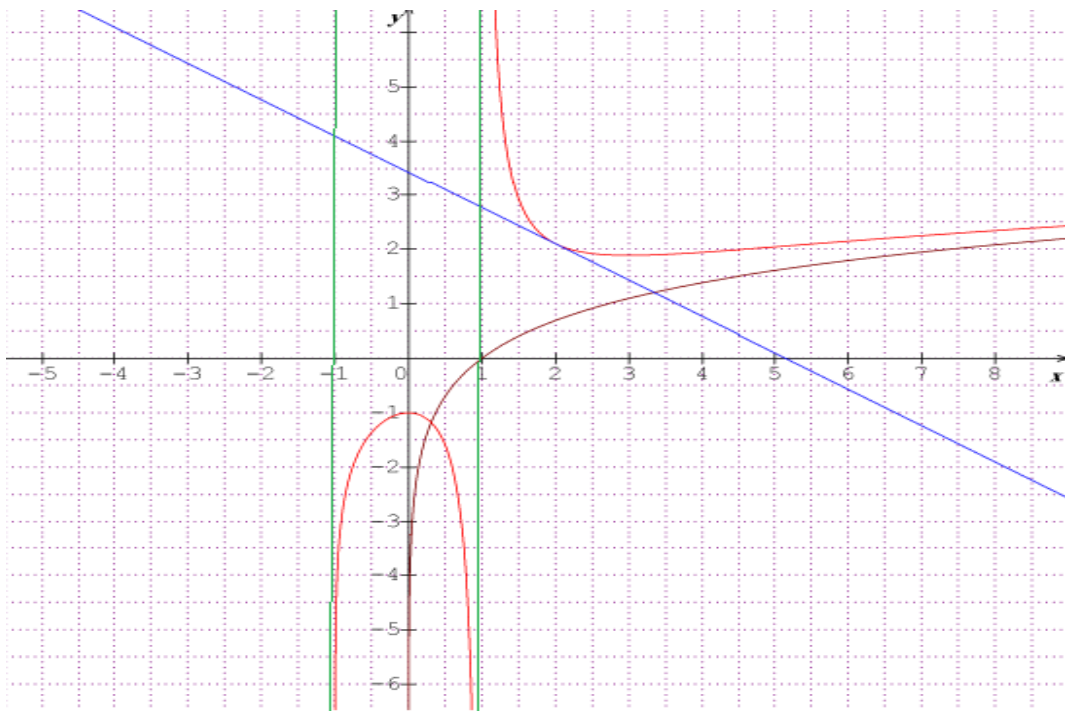
$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_g) بجوار $+\infty$

ج/ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ ، ثم حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمنحني (C)
ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - \ln x = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = g(x) > 0$$

ومنه (C_f) فوق (C) على المجال $]1; +\infty[$

د/ أرسم (C) و (Δ) ثم المنحني (C_f)



2 ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = 0$

$$\frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = 0$$

$$\frac{1}{x-1} + \ln(x+1) - \ln m = 0$$

$$\frac{1}{x-1} + \ln(x+1) = \ln m$$

$$\frac{1}{x-1} + \ln(x+1) = \ln m$$

$$f(x) = \ln m$$

ومنه حلول المعادلة بياناً هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = \ln m$

المناقشة	قيم m	قيم $\ln m$
حلان مختلفان في الإشارة	$m \in]0; e^{-1}[$	$\ln m \in]-\infty; -1[$
حلا مضاعف معدوم	$m = e^{-1}$	$\ln m = -1$
لا يوجد حلول	$m \in]e^{-1}; 4\sqrt{e}[$	$\ln m \in]-1; \frac{1}{2} + \ln 4 [$
حل مضاعف موجب	$m = 4\sqrt{e}$	$\ln m = \frac{1}{2} + \ln 4$
حلان موجبان	$m \in]4\sqrt{e}; +\infty[$	$\ln m \in]\frac{1}{2} + \ln 4; +\infty [$



09 التمرين

I- g هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1 أدرس تغيرات الدالة g

2 أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II- f هي الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x}$

نسمي (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا $f(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

2 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر النتيجة المتحصل عليها هندسياً

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم انجز جدول تغيرات الدالة f

3 أ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

4 أنشئ المستقيم (D) والمنحني (C_f)

III- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x^2}{|x|} - \frac{\ln x^2}{|x|} \right]$ نسمي (C_h) المنحني الممثل لها في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ/ أدرس شفعية الدالة h . ب/ اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) في المعلم السابق

ج/ استنتج حلول المتراجحة $h(x) \geq -\frac{\sqrt{e}}{2}$

حل تمرين 09

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1 أدرس تغيرات الدالة g

❖ أولا النهايات

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\ln x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 3 - 2\ln x] = +\infty - \infty$$

هي حالة عدم تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2} \right) \right] = +\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة البسط

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (مرفوض)} \end{cases} \quad g'(x) = 0 \text{ معناه } 2x^2 - 2 = 0 \text{ ، ومنه } 2x^2 = 2 \text{ ، ومنه } x^2 = 1 \text{ ، ومنه } x = 1 \text{ (مرفوض)}$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$\ominus$	$+$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$\ominus$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى 2 ، ومنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) \geq 4 > 0$

ومنه بالتعدي $g(x) > 0$

II- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$

1 بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} + \frac{2x(2x) - 2(x^2 - 1)}{4x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{4x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2(x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{x^2 + 1}{2x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 - 2 \ln x + x^2 + 1}{2x^2} = \frac{x^2 + 3 - 2 \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

و.ه.م

بما أن $2x^2 > 0$ ، و $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

2 / أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 - 1}{2x} \right] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم انجز جدول تغيرات الدالة f

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 1}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{2} \right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 / أ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1 - x^2}{2x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{-1}{2x} \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $y = \frac{1}{2}x$ (D) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x} + \frac{-1}{2x} = \frac{2 \ln x - 1}{2x}$$

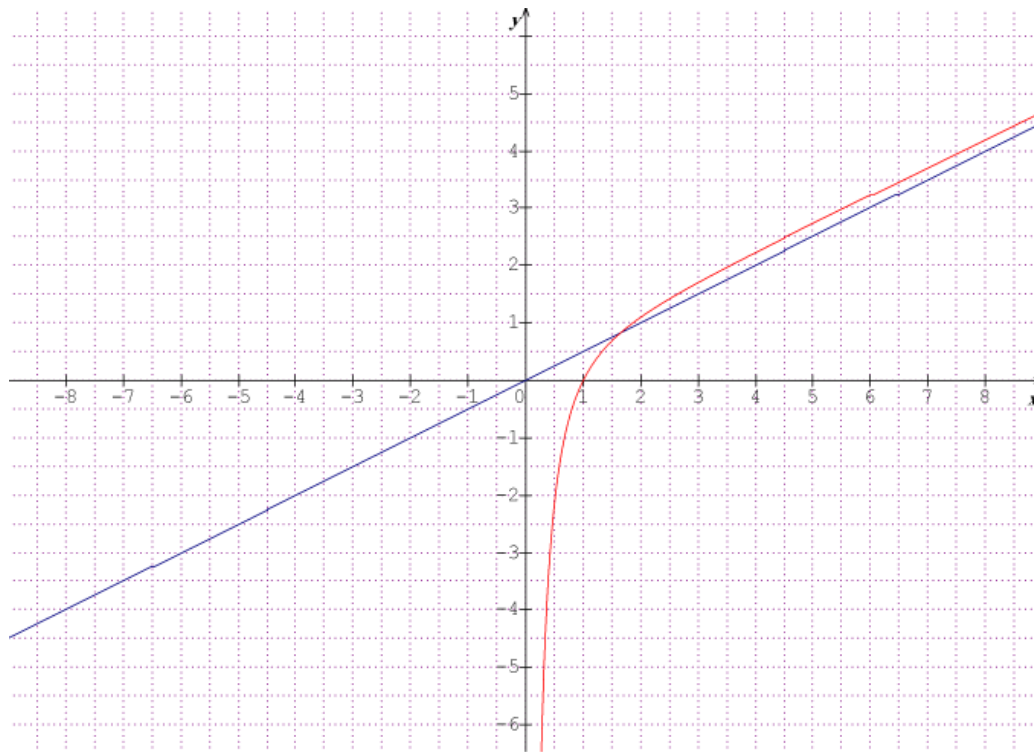
بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $2 \ln x - 1$ ومنه

$2 \ln x - 1 \geq 0$ ، يكافئ $2 \ln x \geq 1$ ، بما أن الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما فإن

$$\begin{aligned} x &\geq e^{\frac{1}{2}} \\ x &\geq \sqrt{e} \end{aligned}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x) - y$		$\circ$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع في (D) $A(\sqrt{e}; \frac{\sqrt{e}}{2})$	(C_f) فوق (D)

4 أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C_f)



III- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x^2}{|x|} - \frac{\ln x^2}{|x|} \right]$ نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها في $(O; \vec{i}, \vec{j})$
أ/ أدرس شفعية الدالة h .

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

$$h(-x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1-(-x)^2}{|-x|} - \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x^2}{|x|} - \frac{\ln x^2}{|x|} \right] = h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية **و. ه. م**

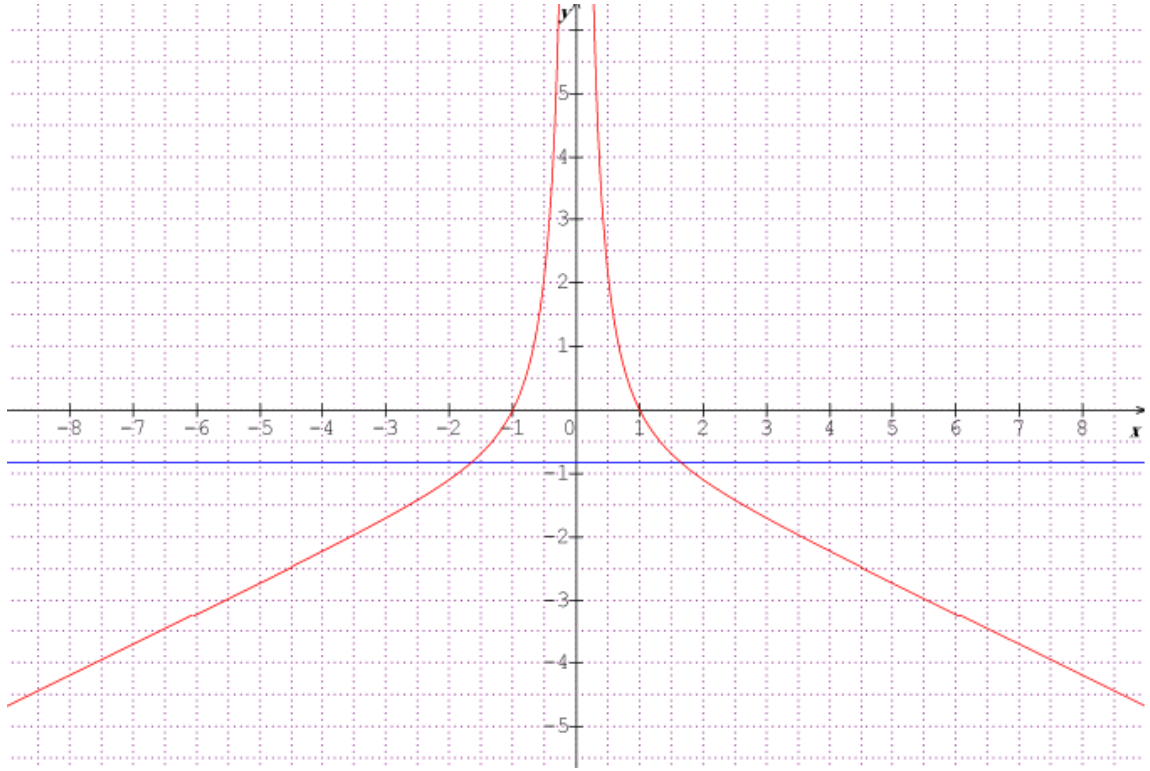
ب/ اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) في المعلم السابق

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $|x| = x$ ومنه

$$h(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x^2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right] = \frac{1-x^2}{2x} - \frac{\ln x}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x} = -f(x)$$

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $h(x) = -f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب



ج/ استنتج حلول المتراجحة $h(x) \geq -\frac{\sqrt{e}}{2}$

حلول المتراجحة هي فواصل نقاط المنحني الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{\sqrt{e}}{2}$
 $x \in [-\sqrt{e}; 0[\cup]0; \sqrt{e}]$



التمرين 10

I- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = x^2 - \ln x^2$ ، (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) > 0$

II- دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ثم فسر النتائج بياناً

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x) = -h(x)$

ب/ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

3 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}^*$ فإن $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟

4 أ/ بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $]0.3; 0.4[$

ب/ إستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً آخر β يطلب تعيين حصراً له

5 بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادليهما

6 أ/ أنشئ (C_f) ، (T_1) و (T_2) ، (Δ)

ب/ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$

7 لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $k(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} - (x+1) - \frac{2}{x+1} \right) + 2$

(C_k) تمثيلها البياني ، بين أنه يوجد تحويل بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k)

حل تمرين 10

I- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = x^2 - \ln x^2$ ، (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أدرس اتجاه تغير الدالة h

الدالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$

المعادلة $g'(x) = 0$ معناه $2x^2 - 2 = 0$ ، $2x^2 = 2$ ، ومنه $x^2 = 1$ ، ومنه إما $x = 1$ أو $x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$2x^2 - 2$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$-$	$\bigcirc$	$+$	
x	$-$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$-$	$+$	
$h'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$ $	$-$	$\bigcirc$	$+$

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; -1]$ و $]0; 1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1; 0[$ و $[1; +\infty[$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	$ $	$- \quad 0 \quad +$	
$h(x)$					

إستنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) > 0$

❖ الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى 1 ، ومنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ ، فإن $h(x) \geq 1 > 0$

ومنه بالتعدي $h(x) > 0$

❖ الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى 1 ، ومنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $h(x) \geq 1 > 0$

ومنه بالتعدي $h(x) > 0$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $h(x) > 0$

II- دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{2 \ln x}{x} - x - \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{2 \ln x}{x} - x - \frac{2}{x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{2 \ln(-x)}{-x} - x - \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2 \ln(-x)}{-x} - x - \frac{2}{x} \right) \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2) - x^2 - 2}{x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2) - x^2 - 2}{x} \right) \right] = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x) = -h(x)$

يكفي أن نثبت أن : $f'(x) = -\frac{h(x)}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\frac{2}{x}(x) - \ln(x^2)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-2 + \ln(x^2)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2 + \ln(x^2) - x^2 + 2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x^2) - x^2}{x^2} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - \ln x^2}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{h(x)}{x^2} \right) = -\frac{h(x)}{2x^2}$$

و. ه. م

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

لدينا مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $h(x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$

ومنه نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $-\infty$

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right) + \frac{1}{2}x \right] =$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x^2)}{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2 \ln|x|}{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x \right]$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x} \right] = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $y = -\frac{1}{2}x$: (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : ندرس إشارة الفرق

$$f(x) + \frac{1}{2}x = -\frac{\ln(x^2)}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{-\ln(x^2) - 2}{2x}$$

$$x^2 \leq e^{-2} \text{ ، } \ln(x^2) \leq -2 \text{ ، } -\ln(x^2) \geq 2 \text{ ، } -\ln(x^2) - 2 \geq 0$$

$$x^2 \leq \frac{1}{e^2} \text{ ، } x \in \left[-\frac{1}{e}; 0 \right[\cup \left] 0; \frac{1}{e} \right]$$

ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) في المجالين $\left[-\frac{1}{e}; 0 \right[$ و $\left] 0; \frac{1}{e} \right]$

(C_f) يقع فوق (Δ) في المجالين $\left[-\infty; -\frac{1}{e} \right]$ و $\left[\frac{1}{e}; +\infty \right[$

(C_f) يقطع (Δ) في النقطتين ذات الفاصلتين $x = -\frac{1}{e}$ و $x = \frac{1}{e}$

3 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}^*$ فإن $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟

لدينا :
$$f(-x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x} - (-x) - \frac{2}{-x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + x + \frac{2}{x} \right)$$

ولدينا أيضا :
$$f(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right) = f(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + x + \frac{2}{x} \right)$$

ومنه :
$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + x + \frac{2}{x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + x + \frac{2}{x} \right) = 0$$

و.ه.م

ماذا تستنتج ؟

بما أن $f(-x) + f(x) = 0$ ، فإن $f(-x) = -f(x)$ ومنه نستنتج أن f دالة فردية

4 أ/ بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,3; 0,4[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $[0,3; 0,4]$ ولدينا : $\begin{cases} f(0,3) = 0,53 \\ f(0,4) = -0,41 \end{cases}$ ، ومنه $f(0,3) \times f(0,4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,3; 0,4[$

ب/ إستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصرا له

بما أن f دالة فردية فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا آخر β حيث $-0,4 < \beta < -0,3$

5 بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادليهما

نحل المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$ ، ومنه $-\frac{h(x_0)}{2x_0^2} = -\frac{1}{2}$ ، $\frac{h(x_0)}{2x_0^2} = 1$ ، ومنه $h(x_0) = x_0^2$

$$x_0^2 - \ln x_0^2 = x_0^2$$

$$-\ln x_0^2 = 0$$

$$\ln x_0^2 = 0$$

$$x_0^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) في النقطتين $(-1; \frac{3}{2})$ و $(1; -\frac{3}{2})$

$$(T_1): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T_1): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

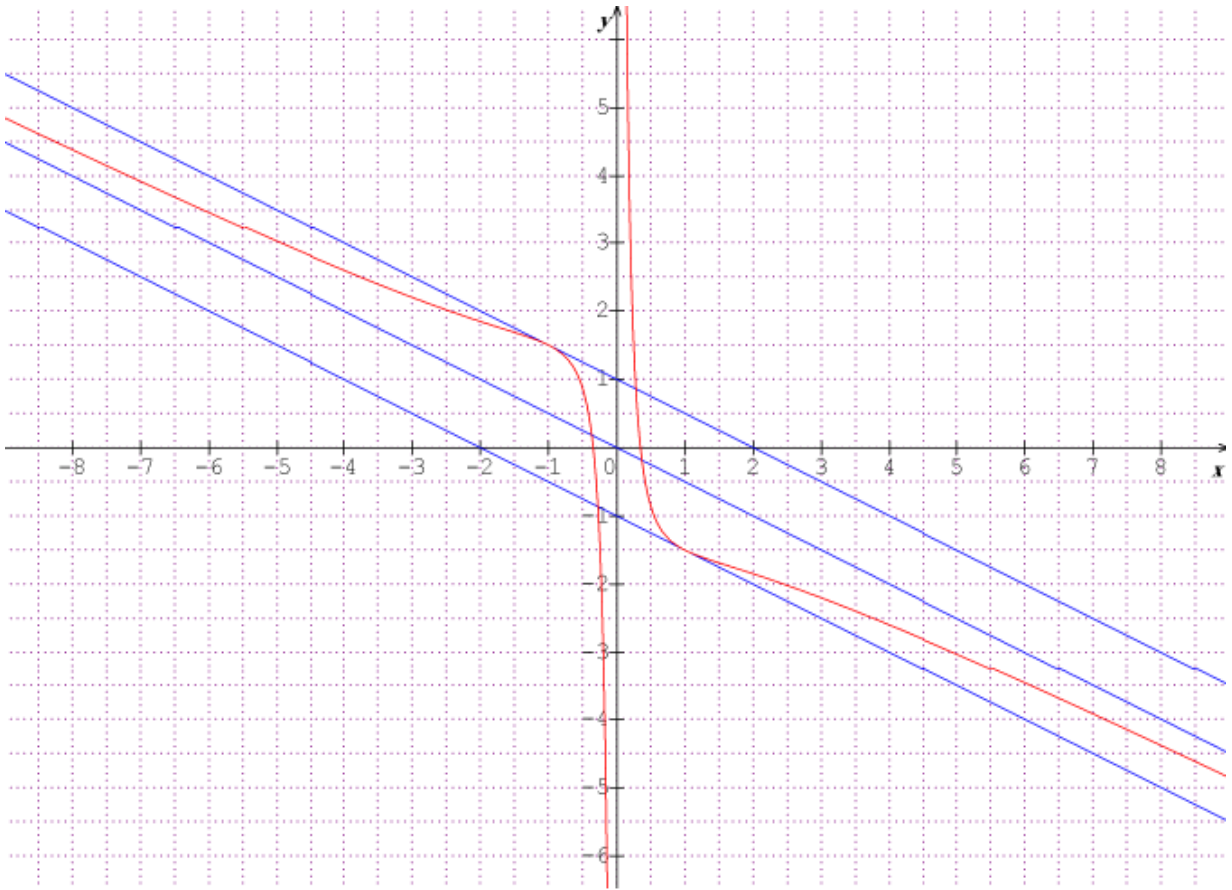
$$(T_1): y = \frac{-1}{2}x - 1$$

$$(T_2): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T_2): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$(T_2): y = \frac{-1}{2}x + 1$$

ب/



ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$
ومنه حلول المعادلة بياناً هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + m$

المناقشة	قيم m
للمعادلة حلاً وحيداً سالباً	$m \in]-\infty; -1[$
حلاً مختلفان في الإشارة	$m = -1$
حلاً موجباً معاً وحلاً وحيداً سالباً	$m \in]-1; 0[$
حلاً مختلفان في الإشارة	$m = 0$
حلاً وحيداً موجباً وحلاً سالباً معاً	$m \in]0; 1[$
حلاً مختلفان في الإشارة	$m = 1$
حلاً وحيداً موجباً	$m \in]1; +\infty[$

7 لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $k(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} - (x+1) - \frac{2}{x+1} \right) + 2$

(C_k) تمثيلها البياني ، بين أنه يوجد تحويل بسيط يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_k)

لدينا أن $k(x) = f(x+1) + 2$ ، ومنه (C_k) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\left(-\frac{1}{2}\right)$



I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$

1 أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

2 إستنتج إشارة $f'(x)$

3 بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4 أنشئ (C_f) ، ثم ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = e^m$

II- نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{2x}{x+2}$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

2 بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ فإن: $f(x) - h(x) = x f'(x)$

3 إستنتج وضعية المنحنى (C_h) بالنسبة إلى (C_f) ثم أنشئ (C_h)

4 بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فصلتها α يقطع محور الترتيب عند النقطة التي ترتيبها $h(\alpha)$

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$

1 أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

❖ لدينا: $\left(\frac{x+2}{x} \right)' = \frac{-2}{x^2}$ ، ومنه $\frac{-2}{x(x+2)}$

$$f'(x) = 1 \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \left(\frac{-2}{x(x+2)} \right) \times x = \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2}{x+2}$$

ملاحظة: لا يمكن دراسة إشارة $f'(x)$ ، ولهذا سنلجأ إلى دراسة تغيرات الدالة f'

❖ أدرس إتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

$$f''(x) = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{-2(x+2) + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

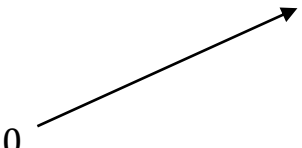
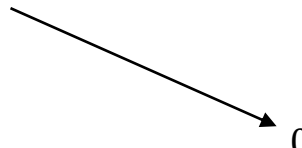
بما أن $(x+2)^2 > 0$ فإن إشارة $f''(x)$ من إشارة $-4x$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
-4				
$x(x+2)^2$	-			+
$f''(x)$	+			-

ومنه الدالة f' متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -2[$ و متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2}{x+2} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2}{x+2} \right] = 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	+			-
$f'(x)$				

2 إستنتج إشارة $f'(x)$

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$

3 بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$$

بوضع $t = \frac{2}{x}$ ، ومنه $x = \frac{2}{t}$

لما $x \rightarrow +\infty$ ، فإن $t \rightarrow 0$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{2}{t} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[2 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) \right] = 2$$

و. ه. م

بنفس الكيفية نجد أيضا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) \right] = 1 \quad \text{توضيح}$$

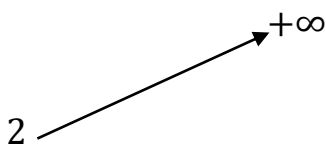
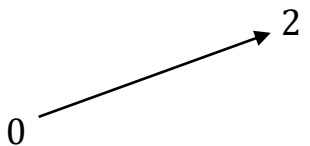
إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

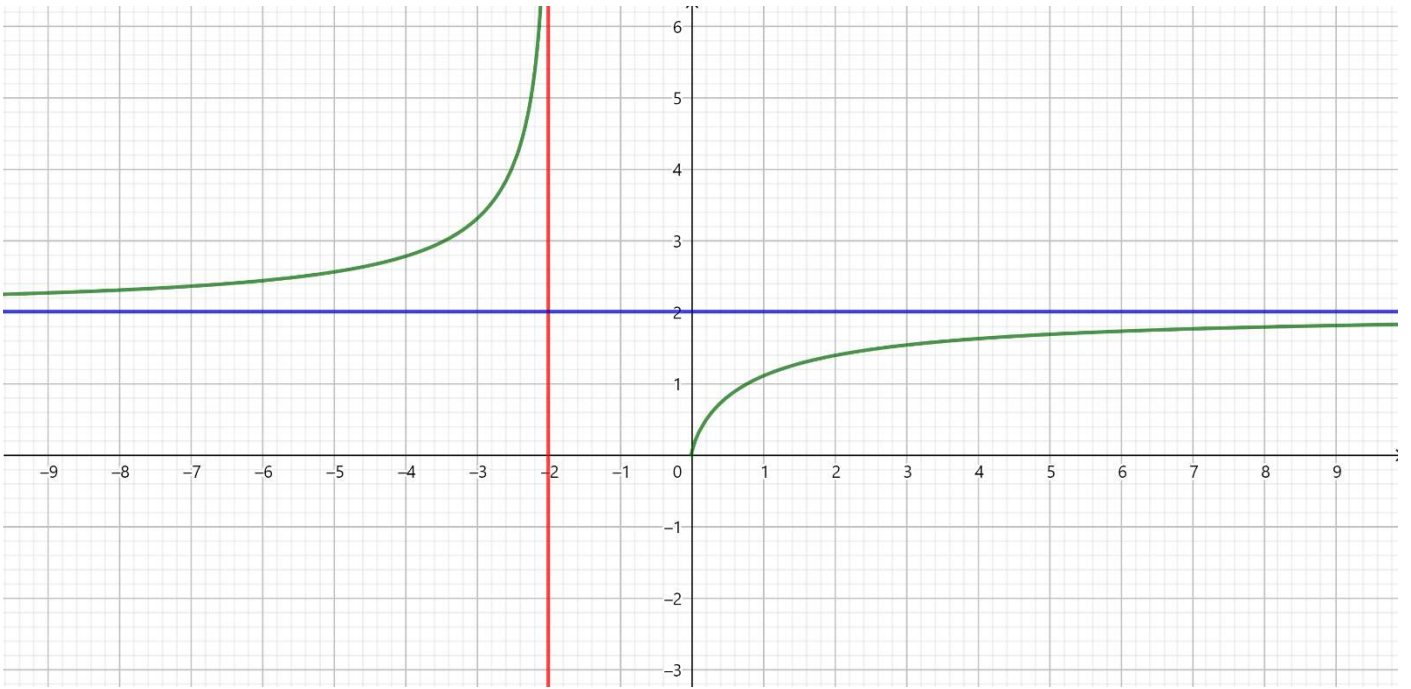
بما أن $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -2[$ و $]0; +\infty[$

❖ حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} (x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \left[\ln \left(\frac{x+2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x)] = -\infty \end{cases} \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x [\ln(x+2) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln(x+2) - x \ln x] = 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			-
$f(x)$				



ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = e^m$
حلول المعادلة بياناً هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = e^m$

المناقشة	قيم m	قيم e^m
للمعادلة حلاً وحيداً موجباً	$m \in]-\infty; \ln 2[$	$e^m \in]0; 2[$
لا يوجد حلول	$m = \ln 2$	$e^m = 2$
للمعادلة حلاً وحيداً سالباً	$m \in]\ln 2; +\infty[$	$e^m \in]2; +\infty[$

II- نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[\cup]-\infty; -2[$ بـ : $h(x) = \frac{2x}{x+2}$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

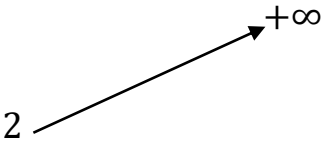
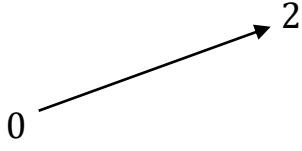
$$h'(x) = \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{4x}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه الدالة h متزايدة تماماً على المجالين $]0; +\infty[$ و $] -\infty; -2[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x}{x} \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{x} \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = +\infty \text{ فإن } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} (2x) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -2} [x+2] = 0^- \end{cases} \text{ بما أن } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} [x+2] = 2 \end{cases} \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$	+			-
$h(x)$				

2 بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ فإن: $f(x) - h(x) = xf'(x)$

$$f(x) - h(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2x}{x+2} = x \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} \right] = xf'(x)$$

و. ه. م

3 إستنتج وضعية المنحنى (C_h) بالنسبة إلى (C_f) ثم أنشئ (C_h)

$$f(x) - h(x) = xf'(x)$$

ندرس إشارة الفرق $f'(x) > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة x

(C_f) يقع تحت (C_h) على المجال $]-\infty; -2[$ ، أي أن (C_h) يقع فوق (C_f) (

(C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$ ، أي أن (C_h) يقع تحت (C_f) (

4 بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α يقطع محور الترتيب عند النقطة التي ترتيبها $h(\alpha)$

نكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α ومنه

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

$$y = xf'(\alpha) - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$$

توضيح

نعلم أن معادلة مماس تكتب من الشكل $y = ax + b$ ، وكما نعلم أن b هي ترتيب نقطة تقاطع مماس مع

محور الترتيب ، ولهذا يجب أن نثبت أن $b = -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = h(\alpha)$

لدينا مما سبق $f(x) - h(x) = xf'(x)$ ومنه $f(\alpha) - h(\alpha) = \alpha f'(\alpha)$

$$-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = h(\alpha) \text{ ومنه}$$



و. ه. م

(رياضيات)

12

التمرين

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2 أ/ بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $10 < \alpha < 10,5$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- h الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب: $h(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

1 أ/ أحسب نهايتي الدالة h عند أطراف مجموعة التعريف

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ فإن: $h'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ج/ أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

III- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ ، $(\| \vec{i} \| = 3cm)$

1 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f(x) = h(e^x)$

2 أ/ إستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3 برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4 أكتب معادلة المماس (T) عند نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

5 أرسم (T) ، (C_f) ، نقبل $\ln\sqrt{\alpha} = 1.17$ و $f(\ln\sqrt{\alpha}) = 0,7$

حل تمرين 12

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 1} [2x] = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)\ln(x-1)] = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x-1) \left[\frac{2x}{x-1} - \ln(x-1) \right] \right] = -\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2 - \left[\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(x-1) \right] = 2 - \ln(x-1) - 1 = 1 - \ln(x-1)$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(x-1) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq 1$$

$$x-1 \leq e \Leftrightarrow x \leq e+1$$

x	1	$e+1$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1; e+1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[e+1; +\infty[$

x	1	$e+1$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	2	$e+2$	$-\infty$

2 أ/ بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $10,5 < \alpha < 10$

g متناقصة تماما على المجال $[10; 10,5]$ ولدينا : $\begin{cases} g(10) = 0,22 \\ g(10,5) = -0,3 \end{cases}$ أي $g(10) \times g(10,5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $10 < \alpha < 10,5$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$		+	○ -

h -II الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب: $h(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

1 أ/ أحسب نهايتي الدالة h عند أطراف مجموعة التعريف

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\ln(x^2-1)}{x} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{x} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{x} \right] = 0$$

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ فإن: $h'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

$$h'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{x^2-1} \right) (x) - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2-1} - \ln(x^2-1)}{x^2} =$$

$$\frac{\frac{2x^2 - (x^2-1) \ln(x^2-1)}{x^2-1}}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1) \ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

و. ه. م

ج/ أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2(x^2-1) > 0$ على المجال $]1; +\infty[$ فإن إشارة $h'(x)$ من إشارة $g(x^2)$

❖ $g(x) \leq 0$ إذا فقط إذا كان $x \geq \alpha$

❖ $g(x^2) \leq 0$ إذا فقط إذا كان $x^2 \geq \alpha$ ، ومنه $x \in]-\infty; \sqrt{\alpha}] \cup [\sqrt{\alpha}; +\infty[$

لكن $]1; +\infty[\not\subset]-\infty; \sqrt{\alpha}]$ ، ومنه $g(x^2) \leq 0$ إذا فقط إذا كان $x \in [\sqrt{\alpha}; +\infty[$

x	1	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$h'(x)$		+	○ -

الدالة h متزايدة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha}; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1; \sqrt{\alpha}]$

x	1	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$h'(x)$		+	○ -
$h(x)$		$h(\sqrt{\alpha})$	0

III- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ ، $(\| i \| = 3cm)$

1 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = h(e^x)$

$$h(e^x) = \frac{\ln((e^x)^2 - 1)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = f(x)$$

2 أ/ إستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(e^x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

$$f'(x) = e^x \times h'(e^x)$$

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h'(e^x)$

$h'(e^x) \leq 0$ إذا فقط إذا كان $e^x \geq \sqrt{\alpha}$ ، أي $x \geq \ln \sqrt{\alpha}$

x	0	$\ln \sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \ln \sqrt{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\ln \sqrt{\alpha}; +\infty[$

x	0	$\ln \sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(\ln \sqrt{\alpha})$	0

3 برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

نلاحظ من جدول التغيرات أن $f(\ln \sqrt{\alpha})$ هي قيمة حدية محلية عظمى لـ (C_f) ومنه من أجل كل x من

$$f(x) \leq f(\ln \sqrt{\alpha}) \quad]0; +\infty[$$

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(e^{2 \ln \sqrt{\alpha}} - 1)}{e^{\ln \sqrt{\alpha}}}$$

نعلم أن: $\ln \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} \ln \alpha$ ، ومنه

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(e^{2 \ln \sqrt{\alpha}} - 1)}{e^{\ln \sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln(e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln \alpha} - 1)}{e^{\ln \sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}} \dots \dots (1)$$

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ، ومنه $2\alpha - (\alpha - 1) \ln(\alpha - 1) = 0$

$$\ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \dots \dots (2) \quad \text{ومنه}$$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)} = \frac{2\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

بما أن $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$ فإن $f(x) \leq f(\ln \sqrt{\alpha})$

4 أكتب معادلة المماس (T) عند نقطة تقاطع (Cf) مع حامل محور الفواصل

لإيجاد نقطة تقاطع (Cf) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة $f(x_0) = 0$ ، ومنه $\frac{\ln(e^{2x_0}-1)}{e^{x_0}} = 0$ ومنه $\ln(e^{2x_0}-1) = 0$ أي $e^{2x_0}-1 = 1$ ، ومنه $e^{2x_0} = 2$ ، ومنه $2x_0 = \ln 2$ ، ومنه $x_0 = \frac{1}{2} \ln 2$ ومنه $x_0 = \ln \sqrt{2}$

$$(T): y = f'(\ln \sqrt{2})(x - \ln \sqrt{2}) + f(\ln \sqrt{2})$$

$$(T): y = 2\sqrt{2}(x - \ln \sqrt{2}) + f(\ln \sqrt{2})$$

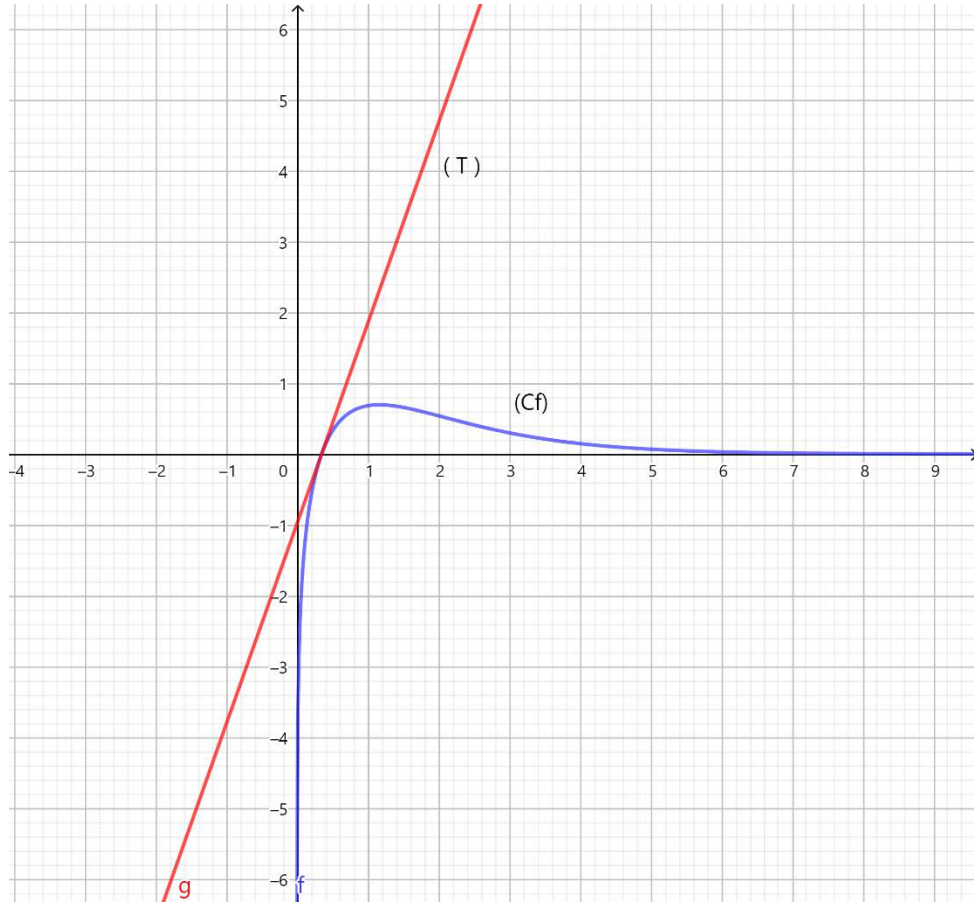
$$(T): y = 2\sqrt{2}(x - \ln \sqrt{2})$$

حيث $f(\ln \sqrt{2}) = 0$

لدينا $f'(x) = e^x \times h'(e^x)$ ومنه

$$f'(\ln \sqrt{2}) = \sqrt{2} \times h'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \frac{g(2)}{2(2-1)} = \sqrt{2} \times \frac{g(2)}{2} = \sqrt{2} \times \frac{4}{2} = 2\sqrt{2}$$

5 أرسم (T) ، (Cf) ، نقبل $\ln \sqrt{\alpha} = 1.17$ و $f(\ln \sqrt{\alpha}) = 0.7$



I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$

① أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4 < \alpha < 1.5$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-2)\ln x$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① أحسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

② أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

③ بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \simeq 1.45$

④ أكتب معادلة المماس (T) الذي يشمل النقطة $A(2; 0)$

⑤ أرسم (C_f)

III- نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي

① تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة $A(2; 0)$

② ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - 2m$

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$

① أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❖ أولا النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln x + \frac{x-2}{x} \right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln x] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x-2}{x} \right] = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x + \frac{x-2}{x} \right] = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-2}{x} \right] = 1$

❖ ثانيا : الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1x - 1(x-2)}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4 < \alpha < 1.5$

g متزايدة تماما على المجال $[1.4; 1.5]$ ولدينا : $\begin{cases} g(1.4) = -0.09 \\ g(1.5) = 0.07 \end{cases}$ ، أي $g(1.4) \times g(1.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $1.4 < \alpha < 1.5$

إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

-II نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x - 2)\ln x$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + (x - 2)\ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + x\ln x - 2\ln x] = +\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x - 2)\ln x] = +\infty$$

2 أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

$$f'(x) = 1 \ln x + \frac{1}{x}(x - 2) = \ln x + \frac{x - 2}{x} = g(x)$$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3 بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha}$

لدينا : (1) $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 2)\ln \alpha$

لدينا مما سبق : $g(\alpha) = 0$ أي $\ln \alpha + \frac{\alpha - 2}{\alpha} = 0$ ، ومنه (2) $\ln \alpha = -\frac{\alpha - 2}{\alpha}$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$f(\alpha) = 1 + (\alpha - 2) \left(-\frac{\alpha - 2}{\alpha} \right) = 1 - \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha}$$

و.ه.م

أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \simeq 1.45$

$$f(\alpha) \simeq 1 - \frac{(1.45 - 2)^2}{1.45} = 0.8$$

4 أكتب معادلة المماس (T) الذي يشمل النقطة $A(2; 0)$

لدينا $A \in (T)$ معناه A تحقق معادلة المماس (T) ، ومنه

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): 0 = f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} & \left(\ln x_0 + \frac{x_0 - 2}{x_0} \right) (2 - x_0) + 1 + (x_0 - 2) \ln x_0 = 0 \\ & (2 - x_0) \ln x_0 + \frac{(x_0 - 2)(2 - x_0)}{x_0} + 1 + (x_0 - 2) \ln x_0 = 0 \\ & -(x_0 - 2) \ln x_0 + \frac{(x_0 - 2)(2 - x_0)}{x_0} + 1 + (x_0 - 2) \ln x_0 = 0 \\ & \frac{(x_0 - 2)(2 - x_0)}{x_0} + 1 = 0 \\ & \frac{-x_0^2 + 5x_0 - 4}{x_0} = 0 \\ & -x_0^2 + 5x_0 - 4 = 0 \\ & \Delta = 25 - 4(-1)(-4) = 9 > 0 \end{aligned}$$

ومنه إما $x_0 = 4$ أو $x_0 = 1$

ومنه (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) عند النقطتين ذات الفاصلتين على الترتيب $x_0 = 1$ و $x_0 = 4$

❖ معادلة المماس (T_1) عند $x_0 = 1$

$$(T_1): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T_1): y = -1(x - 1) + 1$$

$$(T_1): y = -x + 2$$

❖ معادلة المماس (T_2) عند $x_0 = 4$

$$(T_2): y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) (x - 4) + 1 + 2 \ln 4$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) x - 4 \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) + 1 + 2 \ln 4$$

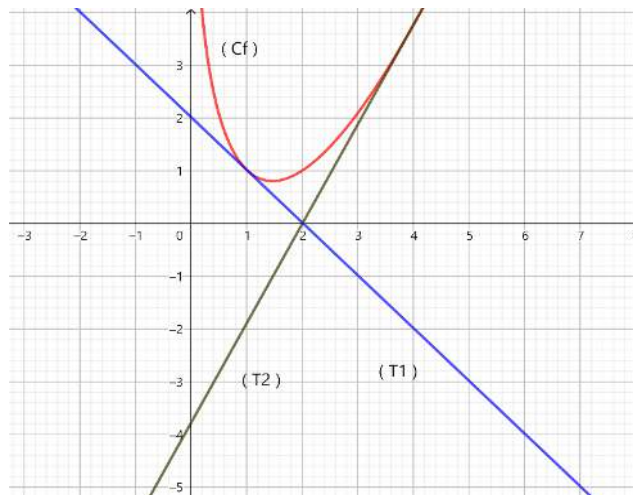
$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) x - 2 - 4 \ln 4 + 1 + 2 \ln 4$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) x - 1 - 2 \ln 4$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) x - 2 \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right)$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 \right) (x - 2)$$

5 أرسم (C_f)



III- نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي

1 تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة $A(2; 0)$

(d_m) يمر بالنقطة $A(2; 0)$ معناه $A \in (d_m)$

$$0 = m(2) - 2m$$

$$0 = 0$$

ومنه (d_m) يمر بالنقطة $A(2; 0)$

2 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - 2m$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m)

مناقشة دورانية

إذا كان $m \in]-\infty; -1]$ فإن للمعادلة حلان متميزان

إذا كان $m = -1$ فإن للمعادلة حلا وحيدا

إذا كان $m \in]-1; \frac{1}{2} + \ln 4]$: لا يوجد حلول

إذا كان $m = \frac{1}{2} + \ln 4$ فإن للمعادلة حلا وحيدا

إذا كان $m \in]\frac{1}{2} + \ln 4; +\infty[$ فإن للمعادلة حلان متميزان



التمرين 14 (بكالوريا المغرب 2019)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

2 أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f(x) = x + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} \ln x - 1) \ln x$

ب/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

3 أ/ بين من أجل كل x من $]0; 1]$: $x - 1 + \ln x \leq 0$

و أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $x - 1 + \ln x \geq 0$

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f

4 بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

5 أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

6 أرسم (Δ) ، (C_f)

حل تمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] = +\infty$$

المستقيم $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

2 أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$

$$x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\ln x)(\ln x) - \ln x = 1 + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 = f(x)$$

ب/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x \right] = +\infty$$

ج/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{[\ln(\sqrt{x})]^2}{(\sqrt{x})^2} = \frac{[2\ln(\sqrt{x})]^2}{(\sqrt{x})^2} = \left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \right] = 0$$

3 أ/ بين من أجل كل x من $]0; 1]$: $x - 1 + \ln x \leq 0$ ، وأنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $x - 1 + \ln x \geq 0$

لدينا من أجل كل x من $]0; 1]$ فإن $0 < x \leq 1$ ، ومنه (1) $-1 < x - 1 \leq 0$...

ولدينا من أجل كل x من $]0; 1]$ فإن (2) $\ln x \leq 0$...

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد $x - 1 + \ln x \leq 0$ وهو المطلوب

لدينا من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $x \geq 1$ ، ومنه (*) $x - 1 \geq 0$...

لدينا من أجل كل x من $]1; +\infty[$: (**) $\ln x \geq 0$...

بجمع (*) و (**) طرفا لطرف نجد $x - 1 + \ln x \geq 0$ وهو المطلوب

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \right) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

و. ه. م

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	1.5	$+\infty$

4 بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f''(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x) - (x - 1 + \ln x)}{x^2} = \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f''(x)$ من إشارة $2 - \ln x$

$f''(x) \geq 0$ ، يكافئ $2 - \ln x \geq 0$ ، ومنه $-\ln x \geq -2$ ، ومنه $\ln x \leq 2$ ، ومنه $x \leq e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$		+	○ -

بما أن $f''(x)$ إنعدم عند $x = e^2$ وغيّرت من إشارتها فإن النقطة $\left(e^2; \frac{2e^2+1}{2}\right)$ هي نقطة إنعطاف

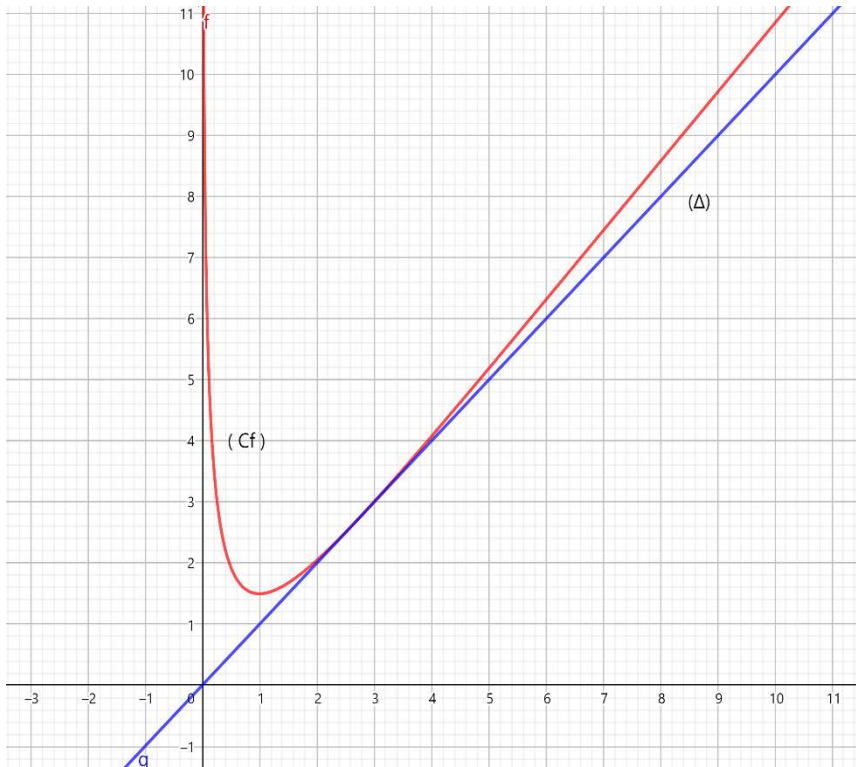
5 أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

$$f(x) - x = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x = \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = \frac{1}{2}[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1]$$

$$f(x) - x = \frac{1}{2}[\ln x - 1]^2 \geq 0$$

ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) دائما ويتقاطعان عند $x = e$

6 أرسم (Δ) ، (C_f)



α عدد حقيقي ، g_α هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g_\alpha(x) = x^2 - 1 + \alpha \ln x$ ، وليكن (C_α) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $(\|\vec{i}\| = 3cm)$

1 بين أن المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها

2 ناقش حسب قيم α وجود وعدد النقط الحدية للمنحنى (C_α)

3 نفرض $\alpha = 1$ ، و نضع $g_1 = g$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g

ب/ أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

f -II هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2 أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

3 أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4 أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

5 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = |x| - 1 - \frac{\ln|x|}{|x|}$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني

أ/ بين أن محور الترتيب محور تناظر للمنحنى (C_h) ، ثم أنشئ (C_h) مع توضيح كيفية الإنشاء

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $e^{h(x)} = \sqrt{|m|}$

1 بين أن المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها

نفرض : $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ، نحل المعادلة $g_{\alpha_1}(x) = g_{\alpha_2}(x)$ ، ومنه

$$x^2 - 1 + \alpha_1 \ln x = x^2 - 1 + \alpha_2 \ln x$$

$$\alpha_1 \ln x - \alpha_2 \ln x = 0$$

ومنه

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \ln x = 0$$

ومنه

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (تناقض) } \\ \ln x = 0 \end{array} \right. \text{ ومنه } x = 1$$

بالتعويض بقيمة $x = 1$ نجد $g_\alpha(1) = 1^2 - 1 + \alpha \ln 1$ ، ومنه $g_\alpha(1) = 0$

ومنه نستنتج أن جميع المنحنيات (C_α) تمر من النقطة $A(1; 0)$

2 ناقش حسب قيم α وجود وعدد النقاط الحدية للمنحنى (C_α)

الدالة g_α قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي $g'_\alpha(x) = 2x + \frac{\alpha}{x} = \frac{2x^2 + \alpha}{x}$ بما أن $x \in]0; +\infty[$ فإن إشارة $g'_\alpha(x)$ من إشارة $(2x^2 + \alpha)$

إذا كان $\alpha > 0$ فإن $2x^2 + \alpha > 0$ ومنه الدالة g_α متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، ومنه نستنتج أنه لا توجد أي قيمة حدية

إذا كان $\alpha = 0$ فإن $2x^2 + \alpha > 0$ ومنه الدالة g_α متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، ومنه نستنتج أنه لا توجد أي قيمة حدية

إذا كان $\alpha < 0$ ، فإن $2x^2 + \alpha = 0$ ، ومنه $2x^2 = -\alpha$ ، ومنه $x^2 = \frac{-\alpha}{2}$

ومنه إما : $x = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{-\alpha}{2}} \notin]0; +\infty[$

x	0	$\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$	$+\infty$
$g'_\alpha(x)$		-	+

ومنه توجد قيمة حدية صغرى واحدة هي $g_\alpha\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\right)$ عند $x = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$

3 نفرض $\alpha = 1$ ، ونضع $g_1 = g$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ب/ أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

لدينا : $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$		0	

ومنه

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	+

Π - f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ ، (C_f) منحنها البياني في $(0; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} [-x + 1] = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + 1] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2 أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0$ فإن $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-x + 1) = \frac{\ln x}{x}$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$

ومنه من أجل كل $x \in]0; 1[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ)

و من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 0)$

3 أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = -1 + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - \ln x}{x^2} = -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-(x^2 - 1 + \ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

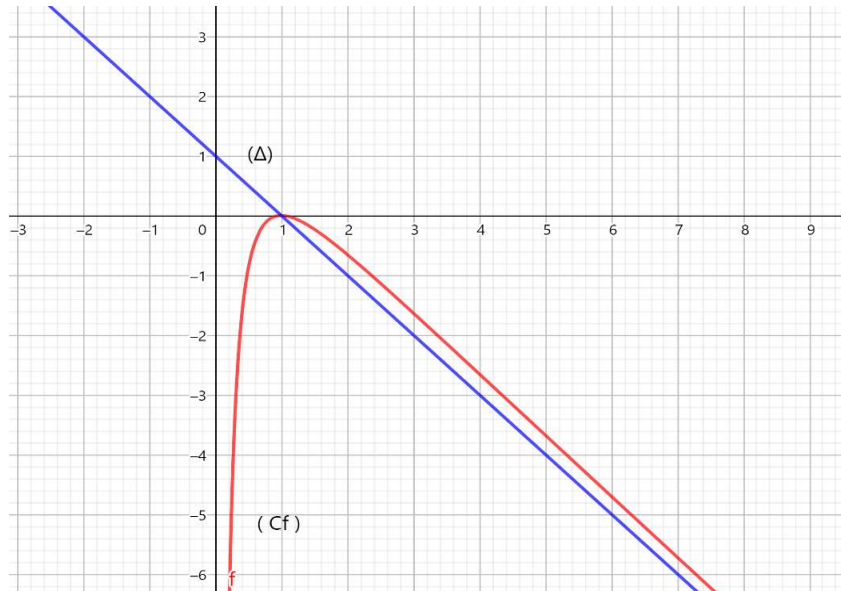
ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

4 أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = |x| - 1 - \frac{\ln|x|}{|x|}$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني
أ/ بين أن محور الترتيب محور تناظر للمنحنى (C_h)

الشرط 01 : لدينا $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

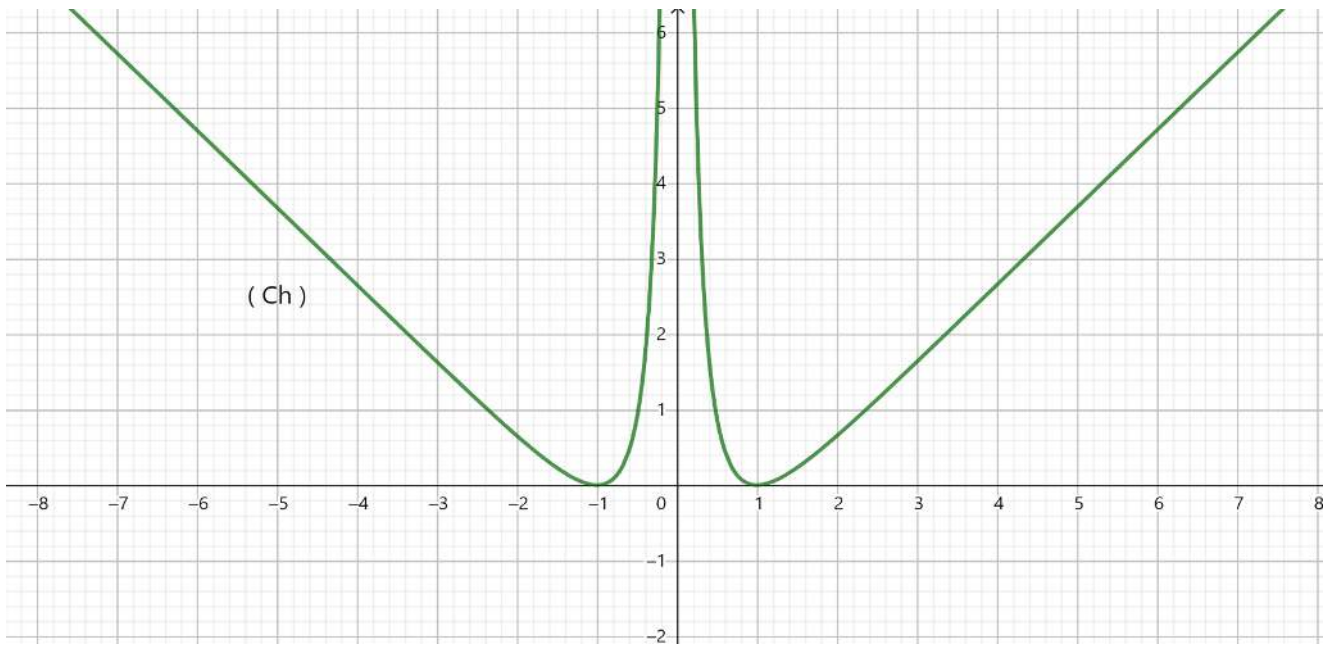
$$\text{الشرط 02 : } h(-x) = |-x| - 1 - \frac{\ln|-x|}{|-x|} = |x| - 1 - \frac{\ln|x|}{|x|} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية ، إذن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_h)

أنشئ (C_h) مع توضيح كيفية الإنشاء

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = -f(x) & ; x > 0 \\ -x - 1 - \frac{\ln(-x)}{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

لما يكون $x \in]0; +\infty[$ فإن $h(x) = -f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل
وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب



ب/ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^{h(x)} = \sqrt{|m|}$

لدينا: $e^{h(x)} = \sqrt{|m|}$ ، ومنه $h(x) = \ln \sqrt{|m|}$ ، ومنه حلول المعادلة بياناً هي فواصل نقاط تقاطع

المنحنى (C_h) مع المستقيم $y = \ln \sqrt{|m|}$

المناقشة	قيم m	قيم $ m $	قيم $\sqrt{ m }$	قيم $\ln \sqrt{ m }$
لا يوجد حلول	$m \in]-1; 0[\cup]0; 1[$	$ m \in]0; 1[$	$\sqrt{ m } \in]0; 1[$	$\ln \sqrt{ m } \in]-\infty; 0[$
حلان	$m \in \{-1, 1\}$	$ m = 1$	$\sqrt{ m } = 1$	$\ln \sqrt{ m } = 0$
أربعة حلول	$m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$	$ m \in]1; +\infty[$	$\sqrt{ m } \in]1; +\infty[$	$\ln \sqrt{ m } \in]0; +\infty[$

