



السنة الدراسية 1446 / 2024 - 2025
الأحد 02 رمضان 1446 / 02 مارس 2025

امتحان الفصل الثاني
الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) حلول المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ هي حيث c عدد حقيقي:

أ	$y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + c$	ب	$y = \sqrt{x^2+1} + c$	ج	$y = 2\sqrt{x^2+1} + c$
---	-----------------------------------	---	------------------------	---	-------------------------

(2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ ، القيمة المتوسطة للدالة g على المجال $[-\ln 2; \ln 2]$ هي:

أ	$2\ln 2$	ب	$\frac{1}{2\ln 2}$	ج	$\frac{1}{2}$
---	----------	---	--------------------	---	---------------

(3) β عدد حقيقي ، تكون الأعداد: $2e^\beta$ ، $e^\beta + 2$ و $e^\beta + 1$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

أ	$\beta = \ln(\sqrt{5} - 1)$	ب	$\beta = 0$	ج	$\beta = \ln(\sqrt{5} + 1)$
---	-----------------------------	---	-------------	---	-----------------------------

(4) a و b عدد حقيقيان. X متغير عشوائي، قانون احتماله موزع كالآتي

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	b	$\frac{1}{2}$

قيمتا a و b التي من أجلها الأمل الرياضي $E(X) = \frac{23}{10}$

هي:

أ	$a = \frac{3}{10}$ ، $b = \frac{2}{10}$	ب	$a = \frac{1}{4}$ ، $b = \frac{1}{4}$	ج	$a = \frac{2}{10}$ ، $b = \frac{3}{10}$
---	---	---	---------------------------------------	---	---

التمرين الثاني (05 نقاط) :

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$.

1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n - 1)}{5 - u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

5. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

II. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$.

1. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ ثم أحسب v_0 .

أكتب v_n بدلالة n ، ثم بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$

أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: علوم تجريبية /امتحان الفصل الثاني مارس 2025

2. أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = \frac{2}{u_0-3} + \frac{2}{u_1-3} + \dots + \frac{2}{u_n-3}$ و $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس. منها أربع كريات بيضاء وثلاث كريات حمراء وكرتان خضراوان نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق.

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A "الحصول على 3 كريات من نفس اللون"

B "الحصول على الألوان الثلاثة"

C "الحصول على كرة بيضاء على الأقل"

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لثلاثة كريات عدد الألوان المحصل عليها.

أ / عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي.

ب / احسب $E(1446X + 2025)$.

(3) نضيف الآن إلى الصندوق كرة واحدة سوداء، ثم نسحب عشوائيا 4 كريات على التوالي دون إرجاع.

بيّن أنّ احتمال الحدث D "الحصول على الألوان الأربعة" هو $\frac{4}{35}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

(1) أدرس تغيّرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $\alpha \in]2,2; 2,3[$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f المعرفة على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

(Δ) المستقيم الذي معادلته: $y = x$.

(1) احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسّر النتائج بيانيا.

(2) أ / بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$.

ب / ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) أ / تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

ب / ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) أنشئ كلّ من (Δ) و (C_f) .

(5) أ / احسب الدالة المشتقة للدالة: $1 - \ln x \mapsto x$ من أجل كل عدد حقيقي x من D_f .

ب / بيّن أنّه: $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx = \ln 2$ ثم احسب بـ cm^2 المساحة المساحة الحرة المستوي المحدّد ب المنحني

(C_f) والمستقيم (Δ) وبالمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = \sqrt{e}$ و $x = 1$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

يحتوي كيس على كرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 ، وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و اربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 4 . (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

(I) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد .

(1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون ."

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأقل ."

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها .

أ . بين أن: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

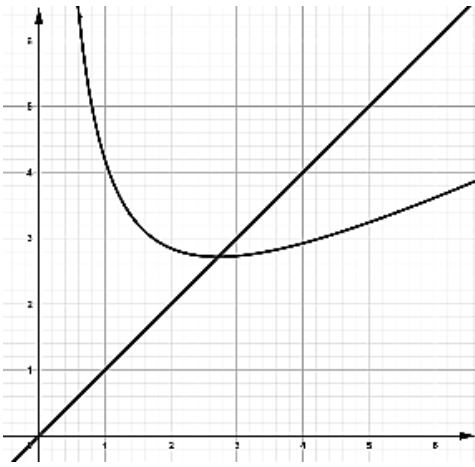
ب . احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع .

ليكن C الحدث: " الحصول على 3 أرقام جُداؤها عدد زوجي " .

احسب احتمال C .

التمرين الثاني: (05 نقاط).



لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + e^2}{2x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (Δ) الذي معادلته: $y = x$. كما هو موضح في الشكل المقابل:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2e$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ // انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

ب / اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وكذا تقاربها.

(2) أ / أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]e; +\infty[$ ثم برهن

بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e$.

ب / أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(e - u_n)(e + u_n)}{2u_n}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج / استنتج تقارب المتتالية (u_n) ثم احسب نهايتها.

(3) أ / أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - e \leq \frac{1}{4}(u_n - e)$.

ب / استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - e \leq e \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

ج / احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (04 نقاط).

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير:

- (1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. الدالة الأصلية F على المجال $]1; +\infty[$ والتي تحقق: $F(e) = e$ معرفة بـ: $F(x) = \ln(\ln x) + e$.
- (2) قيمة التكامل $\int_{-1}^1 x e^x dx$ هي: $2e^{-1}$.
- (3) الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 2x + \frac{4}{1+e^x}$ تحقق من أجل كل عدد حقيقي x :
 $h(x) + h(-x) = 4$
- (4) (v_n) متتالية هندسية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n وحدودها موجبة تماما وأساسها $q > 1$. والتي تحقق:

$$\begin{cases} \ln(v_1) + \ln(v_3) = 8 + \ln 4 \\ v_1 + v_4 = 2e^2(e^4 + 1) \end{cases}$$
 قيمة الأساس q هي: $q = e^2$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+1)e^x - e$.
 (1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.
 (2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقق أنّ: $\alpha \in]0,5; 0,6[$.
 (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- II لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x e^x - e x + e - 2$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $\|\vec{j}\| = 2cm, \|\vec{i}\| = 4cm$
 (1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
 (2) أ / بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.
 ب / استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
 (3) أ / بيّن أنّ المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.
 ب / ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (D) .
 ج / بيّن أنّه يوجد مماس (T) للمنحني (C_f) يوازي المستقيم (D) ، يطلب تعيين معادلة له.
 (4) أنشئ كلاً من (D) ، (T) و (C_f) نأخذ $f(\alpha) \approx 0,2$.
 (5) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m+2-e)e^{-x} = x$.
 (6) أ / باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب: $\int_{\lambda}^0 x e^x dx$ حيث λ عدد حقيقي سالب تماماً.
 ب / احسب بالسنتيمتر المربع، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها
 $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 8$ ، ثمّ تحقق أنّ: $x = \lambda$ و $x = 0$ ، $y = -ex + e - 2$

