

العُبْقَرِي في الرياضيات

المنشآت العددية

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية)

الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول المتتاليات العددية // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: تسيير وإ.

دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) :

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

- في حالة $u_{n+1} - u_n > 0$ ، فإن: (u_n) متزايدة تماما.
- في حالة $u_{n+1} - u_n < 0$ ، فإن: (u_n) متناقصة تماما.
- في حالة $u_{n+1} - u_n = 0$ ، فإن: (u_n) ثابتة.

تقارب وتباعدها متتالية:

- إذا كانت $\lim u_n = l$ ، حيث: $(l \in \mathbb{R})$ فإن: (u_n) متقاربة؛
- في الحالات الأخرى (u_n) متباعدة.

نتائج: (حول تقارب متتالية)

- إذا كانت (u_n) متزايدة تماما ومحدود من الأعلى $u_n < A$ ($u_n \leq A$) فهي: متقاربة.
- إذا كانت (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل $u_n > B$ ($u_n \geq B$) فهي: متقاربة.

متتالية ثابتة:

- (u_n) ثابتة، معناه: $u_{n+1} = u_n = \alpha \in \mathbb{R}$. (كل الحدود متساوية وتساوي الحد الأول)

المتتالية الحسابية:

1) طريقة إثبات أن المتتالية (u_n) حسابية:

يكفي أن نثبت أن: ① الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت أي: $u_{n+1} - u_n = r$.

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $u_{n+1} = u_n + r$.

حيث: r عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

2) عبارة الحد العام لمنناية حسابية: (u_n) بدلالة n ؛ u_n يسمى الحد العام.

① بصفة عامة $u_n = u_p + (n - p)r$ ، علاقة تربط بين حدين مختلفين.

② $u_n = u_0 + nr$ ، في حالة u_0 هو الحد الأول.

③ $u_n = u_1 + (n - 1)r$ ، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة: ① هذه العلاقات يمكن إستعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

② تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) حسابية ومعرفة بحدين مختلفين وبإستعمال العلاقة نقوم

بحساب الأساس نجد: $r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$.

(3) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

$$\text{بصفة عامة: } \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}.$$

حيث: 1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

(4) خاصية الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$ أو $b = \frac{a+c}{2}$.

المتتالية الهندسية:

(1) طريقة إثبات أن المتتالية (u_n) هندسية:

يكفي أن نُثبت أن: ① الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $u_{n+1} = qu_n$.

حيث: q عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

(2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية: (u_n) بدلالة n ؛ u_n يسمى الحد العام.

① بصفة عامة $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ، علاقة تربط بين حدين مختلفين.

② $u_n = u_0 \times q^n$ ، في حالة u_0 هو الحد الأول.

③ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة: ① هذه العلاقات يُمكن إستعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

② تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) هندسية ومعرفة بحدين مختلفين وبإستعمال العلاقة نقوم

بحساب الأساس نجد: $q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$.

(3) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

$$\text{بصفة عامة: } \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right) (\text{الحد الأول}) = \text{المجموع}.$$

حيث: 1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

(4) خاصية الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$.

(5) قوانين النهايات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية:

① إذا كان: $q > 1$ ، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

② إذا كان: $-1 < q < 1$ ، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

③ إذا كان: $q \leq -1$ ، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ غير موجودة.

مجلة العبقرى في الرياضيات (المتتاليات العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (04 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\begin{cases} u_0 = \alpha ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) في كل ما يلي $\alpha = 2$ ، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

(أ) احسب u_1 ، u_2 .

(ب) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

(ج) أكتب عبارة u_n بدلالة n . وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2. أ. اثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

ب. جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

أ. بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

ب. عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n .

ج. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د. احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 03: (04 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n \leq 2$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(ج) استنتج مع التبرير أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$.

(أ) بين أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول وأساسها.

(ب) أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n .

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(د) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + \dots + u_n$.

التمرين 04: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

1. (U_n) متتالية عددية معرفة بـ $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = 3U_n - 2$. احسب U_1, U_2 .

2. لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة بـ: $V_n = U_n - 1$.

أ- أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0 .

ب- اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n .

3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

4. عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $U_0 + U_1 + \dots + U_n = n - 79$.

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

1) n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n$

(S_n) مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1؛ و e يُرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$.

بين أن: $w_n = u_n + v_n$.

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $(n+1)(n+4) = 4 + 6 + 8 + \dots + (2n+4)$.

4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث: $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

التمرين 06: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$.

1) احسب الحدود u_1, u_2, u_3 .

2) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ج- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$

التمرين 07: (05,5 نقطة) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.

1) احسب الحدود u_1 و u_2 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

ج. احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 08: (05 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$.

(ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين 09: (05 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط. يُقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد).

يُرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

(1) أ- احسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

ب- هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برّر إجابتك.

ج- بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدّد أساسها وحدّها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$$

(3) أما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين 10: (05 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3} \right) u_n - \frac{2a+4}{3}$$

1- عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

- 2- نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثم احسب عندئذٍ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية.
- 3- عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.
- 4- نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بيّن أنّ:
- $$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

التمرين 11: (04 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.
- (1) - احسب الحدود: u_1, u_2, u_3 و u_4 .
- ب- هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برّر إجابتك.
- (2) - أبين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$.
- ب- استنتج أنّ المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ج- اكتب v_n ، ثمّ u_n بدلالة n .
- د- بيّن أنّ (u_n) متقاربة.
- (3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال (1) ب-.

التمرين 12: (05 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- أجب بصحيح أو خطأ، مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:
- 1/ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$.
- (أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإنّ (v_n) متقاربة.
- (ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإنّ (v_n) متناقصة.
- (ج) إذا كانت (u_n) هندسية فإنّ (v_n) حسابية.
- 2/ إحصاء.

التمرين 13: (04,5 نقطة) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.
- (1) - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > -3$.
- (ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- (ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.
- 2- لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$.
- (أ) بيّن أنّ: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.
- (ب) احسب الأساس q ثمّ عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n .
- (ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.

(أ) (u_n) حسابية، (ب) (u_n) هندسية، (ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

(2) (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون

$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ ، هي:

(أ) $n = 31$ ، (ب) $n = 32$ ، (ج) $n = 33$.

(3) دالة عددية.

(4) (5) (6) احتمالات.

التمرين 15: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنوياً وبالمقابل يُوظف 3000 عامل سنوياً. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

(ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = 60 - u_n$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) قدير عدد العمال سنة 2017.

(د) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(هـ) احسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

التمرين 16: (04,5 نقطة) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $V_0 = 18$ والعلاقة: $V_0 + V_1 + V_2 = 38$.

1/ بيّن أنّ أساس المتتالية (V_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

2/ اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n .

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n) .

(ج) احسب نهاية (V_n) .

3/ نضع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.

(أ) احسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

(ب) جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين 17: (05 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 5$ و $U_{n+1} = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7}$.

- (1) احسب الحدّين U_1 و U_2 .
- (2) أبرهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n: U_n > 1$.
ب-بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما.
ج-ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (U_n) ؟
- (3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 1$.
أ-بيّن أنّ (V_n) متتالية هندسية مُعيّنة أساسها وحدّها الأوّل.
ب-اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n , $U_n = 1 + 4 \left(\frac{4}{7}\right)^n$.
ج-احسب نهاية (U_n) .

التمرين 18: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأوّل $u_0 = -1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
- (1) أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $u_n < 3$.
ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.
 - (2) (v_n) المتتالية المعرفة بـ: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $v_n = 3 - u_n$.
أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم عيّن حدّها الأوّل.
ب) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
بيّن أنّ: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $S_n = 3(n - 1) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

التمرين 19: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأوّل $u_0 = 2$ ومن أجل كلّ n طبيعي، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
- (1) احسب u_1 , u_2 , u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 - (2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ: من أجل كلّ n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.
أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدّها الأوّل.
ب) عيّن v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.
 - (3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
أ) احسب S_n بدلالة n .
ب) بيّن أنّ: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 20: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأوّل $u_0 = -2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
- (1) أ) بيّن أنّ: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $u_n < 2$.
ب) عيّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة.
 - (2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $v_n = 2u_n - 4$.
أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0 .
ب) جد عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 21: (04 نقاط) بكالوريا 2017 د02 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول $v_0 = 1$ حيث $v_0 = 1$. e أساس اللوغاريتم النيبيري

(1) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

(2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n = w_n - v_n \text{ و } w_n = 2n + 4 + e^{2n}$$

بين أن: المتتالية (u_n) حسابية، حدد أساسها r وحدها الأول u_0 .

(3) أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n , $(n+1)(n+4) = 4 + 6 + 8 + \dots + (2n+4)$.

(4) استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

التمرين 22: (04 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي:

$$u_0 = 50 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = 0,7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

(1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0,7 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0 ، وكتابة عبارة v_n بدلالة n .

(2) أ. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

ب. عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة: ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

(1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

(2) أ. برّر العبارة $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$.

ب. ابتداءً من أي سنة يُصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

التمرين 23: (04 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $2u_{n+1} = u_n + 6$.

(1) أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n < 6$.

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ. بين أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب. اكتب v_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) احسب بدلالة n ما يلي: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

التمرين 24: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

(1) أ. احسب كلا من u_1 و u_2 .

ب. برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n < 8$.

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $v_n = u_n - \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2, n \text{ عدد طبيعي}$$

(ب) عيّن قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يُطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

(ج) نضع $\alpha = 8$ ، عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

(4) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين 25: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

(1) احسب حدّها الأول u_0 وأساسها r .

(2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) بيّن أنّ العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم احسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 .

حيث $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$ و $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344}$.

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$.

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{6-2u_n}$.

- احسب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$.

مجلة العبقرى في الرياضيات (المتتاليات العددية - بكالوريا جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (04 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\begin{cases} u_0 = \alpha ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \text{ لدينا:}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

$$u_0 = u_n = u_{n+1} = \alpha \in \mathbb{R} \text{ معناه } (u_n) \text{ ثابتة}$$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = -\frac{8}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = -\frac{8}{3}$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{8}{9} = \frac{-16}{9} - \frac{8}{9} = \frac{-16-8}{9} = \frac{-24}{9} = -\frac{8}{3}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$$(2) \text{ لدينا: } \alpha = 2, \text{ نجد: } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \end{cases} \text{ المتتالية } (v_n) \text{ معرفة كما يلي: } v_n = u_n + \frac{8}{3}$$

(أ) حساب u_1, u_2 :

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}(2) - \frac{8}{9} = \frac{12-8}{9} = \frac{4}{9}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} = \frac{8-24}{27} = \frac{-16}{27}$$

(ب) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 :

(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + \frac{8}{3}$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{16}{9} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2 \times 8}{3 \times 3} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}v_n$$

$$\text{أي: } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$

(ج) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

يمكن تعويض u_n مباشرة

$$u_n = v_n - \frac{8}{3}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = \frac{14}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ v_n = u_n + \frac{8}{3} \end{cases} \text{ إذن: } \boxed{u_n = v_n - \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3}}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ (لأن } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{)}, \text{ إذن: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{8}{3}}$$

حل التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

1. حساب u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{13}{8}$$

2. أثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq -2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$, لدينا: $u_0 = 1 \geq -2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n \geq -2$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} \geq -2$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n \geq -2$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{2}u_n \geq -1$$

$$\text{وعليه: } \frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1 - 1$$

$$\text{أي: } \boxed{u_{n+1} \geq -2}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq -2$.

ب. ايجاد اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

ولدينا من جهة أخرى: $u_n \geq -2$

$$\text{ومنه: } -\frac{1}{2}u_n \leq 1 - 1 \text{ وعليه: } \frac{1}{2}u_n - 1 \leq 1 - 1 \text{ أي: } \boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$$

إذن: (u_n) متناقصة تماما.

الاستنتاج:

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل ($u_n \geq -2$) فإنها متقاربة.

3. لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

أ. تبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

نُعوض u_n مباشرة

$$\boxed{v_{n+1} = v_n - 2}$$

لدينا: $v_n = u_n + 2$ ، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}(v_n - 2) + 1 = \frac{1}{2}v_n - 1 + 1 = \frac{1}{2}v_n$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n} \text{ أي:}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3}$.

ب. التعبير بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n :

$$\boxed{u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2} \text{ لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ ولدينا: } v_n = u_n + 2 \text{ إذن:}$$

ج. حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2} \text{ لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ (لأن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{)، إذن:}$$

د. حساب، بدلالة n ، المجموع S_n ، حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2)$$

$$\text{ومنه: } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 2(n - 0 + 1) = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) - 2(n - 0 + 1)$$

$$\text{وعليه: } S_n = 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) - 2(n + 1) = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) - 2(n + 1)$$

حل التمرين 03: (04 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(1) لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ، $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \text{ معناه: } 3u_{n+1} = u_n + 4$$

(أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n \leq 2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = -1 \leq 2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n \leq 2$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} \leq 2$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n \leq 2$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{3}u_n \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{وعليه: } \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq 2} \text{ أي:}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 2$.

(ب) تبين أن المتتالية (u_n) متزايدة: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ ▪
ولدينا من جهة أخرى: $u_n \leq 2$ ▪

ومنه: $-\frac{2}{3}u_n \geq -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}$

وعليه: $-\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \geq -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}$ أي: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

(ج) استنتاج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($u_n \leq 2$) فإنها متقاربة.

(2) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2$.

(أ) تبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول وأساسها:

(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 2$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \frac{1}{3}v_n$

أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3$.

(ب) كتابة الحد العام v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = -3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = v_n + 2$ إذن: $u_n = -3 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2$

(ج) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

(د) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + \dots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$

ومنه: $S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 2(n - 0 + 1) = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + 2(n - 0 + 1)$

ويكون: $S_n = -3 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) + 2(n + 1) = -\frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2(n + 1)$

حل التمرين 04: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (U_n) متتالية عددية معرفة بـ $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases}$

1. حساب U_2 ، U_1 :

▪ $U_1 = 3U_0 - 2 = 3(-1) - 2 = -5$

▪ $U_2 = 3U_1 - 2 = 3(-5) - 2 = -17$

2. لدينا: (V_n) متتالية عددية معرفة بـ: $V_n = U_n - 1$.

أ- إثبات أن المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0 : (نكتب V_{n+1} بدلالة V_n)

لدينا: $V_n = U_n - 1$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = 3U_n - 2 - 1 = 3U_n - 3 = 3(U_n - 1) = 3V_n$$

أي: $V_{n+1} = 3V_n$

إذن: (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $V_0 = U_0 - 1 = -1 - 1 = -2$.

ب- كتابة عبارة الحد العام V_n بدلالة n :

لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه: $V_n = -2(3)^n$

3. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n$

$$U_{n+1} - U_n = 3U_n - 2 - U_n = 2U_n - 2 = 2(U_n - 1) = 2V_n = (-4) \times 3^n$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

لدينا: $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n < 0$ ، إذن: (U_n) متناقصة تماماً.

4. تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون، $U_0 + U_1 + \dots + U_n = n - 79$

$$(V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \dots + (V_n + 1) = n - 79 \quad \text{يكافئ: } U_0 + U_1 + \dots + U_n = n - 79$$

$$(V_0 + V_1 + \dots + V_n) + 1(n - 0 + 1) = n - 79$$

$$V_0 \left(\frac{1 - (3)^{n-0+1}}{1-3} \right) + 1(n - 0 + 1) = n - 79$$

$$-2 \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \right) + (n + 1) = n - 79$$

$$(1 - 3^{n+1}) = -80$$

$$3^{n+1} = 81$$

$$\text{وبالتالي: } n + 1 = 4 \quad (\text{لأن } 3^4 = 81)$$

إذن: $n = 3$.

حل التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

1) n عدد طبيعي، حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n$

(S_n) عبارة عن مجموع الـ " $n + 1$ " حداً الأولى لمتتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1

$$\text{إذن: } S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$$

2) لدينا: (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$.

تبين أن $w_n = u_n + v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين الحد الأول

والأساس لكل منهما:

$$\text{لدينا: } w_n = 2n + 4 + e^n = u_n + v_n \quad \text{حيث: } u_n = 2n + 4 \text{ و } v_n = e^n$$

ولدينا: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 4$ ، وأساسها

$$r = u_{n+1} - u_n = [2(n + 1) + 4] - (2n + 4) = 2$$

$$\text{و } (v_n) \text{ متتالية حسابية حدها الأول } v_0 = e^0 = 1 \text{ وأساسها } e \quad q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = \frac{e^{n+1} \times e^1}{e^n} = e$$

3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

لدينا: $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$

ومنه: $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1) \left(\frac{4 + 2n + 4}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{2n + 8}{2} \right)$

وعليه: $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1) \left(\frac{2(n + 4)}{2} \right) = (n + 1)(n + 4)$

4) استنتاج المجموع S بدلالة n حيث، $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$:

لدينا: $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n)$

ومنه: $S = (u_0 + u_1 + \dots + u_n) + (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = (n + 1)(n + 4) + S_n$

وعليه: $S = (n + 1)(n + 4) + \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$

حل التمرين 06: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ، $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4} \end{cases}$

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4}$ معناه: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$

1) حساب الحدود u_1, u_2, u_3 :

$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}(1) + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$ ■

$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{4} = \frac{15+8}{16} = \frac{23}{16}$ ■

$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{23}{16}\right) + \frac{2}{4} = \frac{69+32}{64} = \frac{101}{64}$ ■

2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن، $u_n < 2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = 1 < 2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

■ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 2$ (فرضية التراجع)

■ ونبرهن صحة الخاصية $P(n + 1)$ أي: $u_{n+1} < 2$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 2$

ومنه: $\frac{3}{4}u_n < \frac{6}{4}$

وعليه: $\frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} < \frac{6}{4} + \frac{2}{4}$

أي: $u_{n+1} < 2$

وبالتالي: $P(n + 1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 2$.

ب- تبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} - u_n = \left(\frac{3}{4} - 1\right)u_n + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{2}{4}$ ■

ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 2$

ومنه: $-\frac{1}{4}u_n > -\frac{2}{4}$

$$\text{وعليه: } -\frac{1}{4}u_n + \frac{2}{4} > -\frac{2}{4} + \frac{2}{4}$$

أي: $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

ج-استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($u_n < 2$) فإنها متقاربة.

(3) لدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ-تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 2$ ، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} - 2 = \frac{3}{4}u_n - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3 \times 2}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2) = \frac{3}{4}v_n$$

$$\text{أي: } v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n.$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$.

ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 2 \text{ إذن: } u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2.$$

ج-حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ (لأن } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{)}، \text{ إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

(4) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = - \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = -4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right) = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4.$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن، $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$

$$\text{ومنه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 2(n - 0 + 1)$$

$$\text{وعليه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_n + 2n + 2 = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2 = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2.$$

حل التمرين 07: (05,5 نقطة) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإ.

$$\text{لدينا: } (u_n) \text{ متتالية عددية حيث، } \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \end{cases}$$

(1) حساب الحدود u_1 و u_2 :

$$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad \square$$

$$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{4+5}{25} = \frac{9}{25} \quad \square$$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{3}$

نستعمل البرهان بالتراجع، نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > \frac{1}{3}$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} > \frac{1}{3}$.

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > \frac{1}{3}$

$$\text{ومنه: } \frac{2}{5}u_n > \frac{2}{15}$$

$$\text{وعليه: } \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} > \frac{2}{15} + \frac{1}{5}$$

$$\text{أي: } \boxed{u_{n+1} > \frac{1}{3}}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{3}$.

(3) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - u_n = \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5} \quad \square$$

▪ ولدينا من جهة أخرى: $u_n > \frac{1}{3}$

$$\text{ومنه: } -\frac{3}{5}u_n < -\frac{1}{5}$$

$$\text{وعليه: } -\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5} < -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$ ، إذن: (u_n) متناقصة تماماً.

استنتاج أنها متقاربة: بمأن (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل ($u_n > \frac{1}{3}$) فإنها متقاربة.

(4) لدينا: (v_n) متتالية عددية حيث، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

أ. تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ ، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2 \times 1}{5 \times 3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}v_n$$

$$\text{أي: } \boxed{v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

ب. كتابة كلاً من v_n و u_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، ولدينا: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ إذن: $u_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$

جـ. حساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{2}{5} < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

حل التمرين 08: (05 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ، $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9} \end{cases}$

معناه: $u_{n+1} = \frac{3u_n}{9} + \frac{4}{9}$

1- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = 1 > \frac{2}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > \frac{2}{3}$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$

ومنه: $\frac{3}{9}u_n > \frac{2}{9}$

وعليه: $\frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} > \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

أي: $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - u_n = \left(\frac{3}{9} - 1\right)u_n + \frac{4}{9} = -\frac{6}{9}u_n + \frac{4}{9}$

ولدينا من جهة أخرى: $u_n > \frac{2}{3}$

ومنه: $-\frac{6}{9}u_n < -\frac{4}{9}$

وعليه: $-\frac{6}{9}u_n + \frac{4}{9} < -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$

أي: $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن: (u_n) متناقصة تماماً.

2) لدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}u_n - \frac{3 \times 2}{9 \times 3} = \frac{3}{9}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{9}v_n$$

أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه: $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}$ إذن: $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{1}{3} < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

3) حساب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_2 + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right)$

ومنّه: $S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \frac{2}{3}(n - 0 + 1) = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n + 1)$

وعليه: $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n + 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{2}{3}(n + 1)$

حل التمرين 09: (05 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط. يُقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد).

يُرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

1) أ- حساب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 :

▪ $u_0 = 50000$

▪ $u_1 = \left(u_0 + \frac{5}{100}u_0\right) - 5000 = 47500$

▪ $u_2 = \left(u_1 + \frac{5}{100}u_1\right) - 5000 = 44875$

ب- المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية التعليل

▪ لدينا: $\begin{cases} u_0 + u_2 = 94875 \\ 2u_1 = 95000 \end{cases}$ ومنه: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ إذن: (u_n) ليست حسابية.

▪ لدينا: $\begin{cases} u_0 \times u_2 = 2243750000 \\ u_1^2 = 2256250000 \end{cases}$ ومنه: $u_0 \times u_2 \neq u_1^2$ إذن: (u_n) ليست هندسية.

ج- تبين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$

لدينا: $u_2 = \left(u_1 + \frac{5}{100}u_1\right) - 5000$ و $u_1 = \left(u_0 + \frac{5}{100}u_0\right) - 5000$
 إذن: $u_{n+1} = \left(u_n + \frac{5}{100}u_n\right) - 5000 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)u_n - 5000 = 1,05u_n - 5000$
 (2) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n = u_n - 100000$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 100000$
 ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 100000 = 1,05u_n - 5000 - 100000 = 1,05u_n - 105000$
 ويكون: $v_{n+1} = 1,05\left(u_n - \frac{105000}{1,05}\right) = 1,05(u_n - 100000) = 1,05v_n$

أي: $v_{n+1} = 1,05v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ وحدّها الأول

$v_0 = u_0 - 100000 = 50000 - 100000 = -50000$

ب- كتابة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = -50000(1,05)^n$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$

لدينا $v_n = u_n - 100000$ إذن: $u_n = -50000(1,05)^n + 100000$

(3) - حساب المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 (أي بداية جانفي 2016):

بما أن u_n هو المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$

فإن u_8 هو المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي 2016.

(لأن $2008 + n = 2016$ معناه: $n = 8$)

ومنه: $u_8 = -50000(1,05)^8 + 100000 = 26127,23DA$

ب- ايجاد السنة التي لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة:

نضع: $u_n < 5000$ نجد: $-50000(1,05)^n + 100000 < 5000$

ومنه: $-50000(1,05)^n < -95000$

وعليه: $(1,05)^n > \frac{-95000}{-50000}$

أي: $\ln(1,05)^n > \ln(1,9)$

ويكون: $n > \frac{\ln(1,9)}{\ln(1,05)}$ (لأن $\ln(1,05) > 0$)

وبالتالي: $n = 14$, إذن: ابتداءً من سنة (2008 + 14) أي: سنة 2022

لا يُسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد.

حل التمرين 10: (05 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفّة بـ، $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3} \end{cases}$ حيث a وسيط حقيقي.

1- تعيين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه: $u_0 = u_n = u_{n+1} = 3$

ومنه: $3 = \left(\frac{2a+1}{3}\right)3 - \frac{2a+4}{3}$

$$\text{وعليه: } \frac{6a+3-2a-4}{3} = 3, \text{ ويكون: } 4a - 1 = 9, \text{ وبالتالي: } 4a - 1 = 9 \text{ إذن: } \boxed{a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}}$$

2- لدينا: $a \neq \frac{5}{2}$

تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية:

$$(u_n) \text{ حسابية معناه: } \frac{2a+1}{3} = 1 \text{ ومنه: } \boxed{a = 1}$$

$$\text{حساب } u_n: \text{ أساس المتتالية الحسابية } (u_n) \text{ هو: } r = -\frac{2(1)+4}{3} = -2$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ إذن: } \boxed{u_n = 2n + 3}$$

حساب مجموع n حدا الأولى من المتتالية:

$$\text{لدينا: } \underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ حدا الأولى}} = ((n-1) - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right) = n \left(\frac{3 - 2(n-1) + 3}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } \underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ حدا الأولى}} = n \left(\frac{-2n+8}{2} \right) = n(4 - n)$$

3- تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية:

$$(u_n) \text{ هندسية معناه: } -\frac{2a+4}{3} = 0 \text{ ومنه: } \boxed{a = -2}$$

$$\text{تعيين } u_{50}: \text{ أساس المتتالية الهندسية } (u_n) \text{ هو: } q = \frac{2(-2)+1}{3} = -1$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ وبالتالي: } u_n = 3(-1)^n \text{ إذن: } \boxed{u_{50} = 3(-1)^{50} = 3}$$

تعيين مجموع 50 حدا الأولى من المتتالية:

$$\text{لدينا: } \underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_{49}}_{\text{مجموع 50 حدا الأولى}} = u_0 \left(\frac{1 - q^{49-0+1}}{1-q} \right) = 3 \left(\frac{1 - (-1)^{50}}{1 - (-1)} \right) = 0$$

$$\text{4- لدينا: } a = 4 \text{ نجد: } \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$$

البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $u_n = 3^n + 2$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = 3^0 + 2 = 3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = 3^n + 2$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} = 3^{n+1} + 2}$

$$\text{البرهان: لدينا: } u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3(3^n + 2) - 4 = 3^1 \times 3^n + 6 - 4 = 3^{n+1} + 2$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3^n + 2$.

$$\text{تبيان أن، } \underline{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)}$$

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (3^0 + 2) + (3^1 + 2) + \dots + (3^n + 2)$$

$$\text{ومنه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) + 2(n - 0 + 1)$$

$$\text{وعليه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) + 2(n + 1)$$

ويكون: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3} \right) + 2(n+1) = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 2n + 2$
وبالتالي: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1 + 4n + 4) = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$

حل التمرين 11: (04 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ، $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$

(1) - حساب الحدود u_1, u_2, u_3, u_4 :

▪ $u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 6 = -\frac{1}{2}(6) + 6 = 3$
▪ $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 6 = -\frac{1}{2}(3) + 6 = \frac{9}{2}$
▪ $u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right) + 6 = \frac{15}{4}$
▪ $u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right) + 6 = \frac{33}{8}$

ب- دراسة رتبة المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_0 = 3 - 6 = -3 \\ u_2 - u_1 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه: $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ وبالتالي: الحدود u_0, u_1, u_2 ليست مرتبة
إذن: المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$.

(2) - أبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

لدينا: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$ ومنه: $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2$

أي: $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$ ويكون:

ب- استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ، $v_n = u_n - 4$ هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:
(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 4$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

وحسب السؤال السابق (2) - أ- نجد $v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - 4) = -\frac{1}{2}v_n$ أي: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

ج- كتابة v_n ، ثم u_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ ولدينا: $v_n = u_n - 4$ إذن: $u_n = 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4$

د- تبين أن (u_n) متقاربة:

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < -\frac{1}{2} < 1$)، وبالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ، إذن: (u_n) متقاربة.

(3) - باستعمال عبارة u_n ، التأكد من نتيجة السؤال (1) ب-: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 6 - u_n = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)u_n + 6 = -\frac{3}{2}u_n + 6$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2} \left[2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 \right] + 6 = -3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6 + 6 = -3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

■ بمأَن: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ متغير الإشارة

فإن: الفرق $u_{n+1} - u_n$ إشارته غير ثابتة وبالتالي: المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$.

حل التمرين 12: (05 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

الإجابة بصحيح أو خطأ، مع التبرير:

1/ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$.

(أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإن (v_n) متقاربة. _____ خطأ

التبرير: نأخذ مثلاً $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ نجد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، أي أن المتتالية (u_n) متقاربة.

■ ولدينا: $v_n = \ln u_n = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^n = n \ln \frac{1}{2} = -n \ln 2$

ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ (لأن $\ln 2 > 0$)، أي أن المتتالية (v_n) متباعدة.

(ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإن (v_n) متناقصة. _____ صحيح

التبرير: (u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$\text{أي: } u_{n+1} \leq u_n$$

$$\text{ومنه: } \ln u_{n+1} \leq \ln u_n$$

$$\text{أي: } v_{n+1} \leq v_n$$

وبالتالي: $v_{n+1} - v_n \leq 0$ ، إذن: (v_n) متناقصة.

(ج) إذا كانت (u_n) هندسية فإن (v_n) حسابية. _____ صحيح

التبرير: (u_n) هندسية أساسها q معناه: $u_{n+1} = qu_n$

$$\text{ومنه: } \ln u_{n+1} = \ln(qu_n)$$

$$\text{وعليه: } \ln u_{n+1} = \ln q + \ln u_n$$

$$\text{أي: } v_{n+1} = \ln q + v_n \text{، إذن: } (v_n) \text{ حسابية أساسها } \ln q.$$

/2 إحصاء.

حل التمرين 13: (04,5 نقطة) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي، $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$

1- أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = 3 > -3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

■ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > -3$ (فرضية التراجع)

■ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} > -3$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > -3$

$$\text{ومنه: } \frac{2}{3}u_n > -2$$

$$\frac{2}{3}u_n - 1 > -2 - 1 \text{ وعليه:}$$

$$\boxed{u_{n+1} > -3} \text{ أي:}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$.

(ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)u_n - 1 = -\frac{1}{3}u_n - 1$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } u_n > -3$$

$$\text{ومنه: } -\frac{1}{3}u_n < 1$$

$$\text{وعليه: } -\frac{1}{3}u_n - 1 < 1 - 1$$

$$\text{أي: } \boxed{u_{n+1} - u_n < 0} \text{، إذن: } (u_n) \text{ متناقصة تماماً.}$$

(ج) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل ($u_n > -3$) فإنها متقاربة.

$$\text{2- لدينا: } (v_n) \text{ متتالية هندسية متقاربة أساسها } q \text{، حيث } v_0 = 6 \text{ و } v_0 + v_1 + \dots + v_n = 18$$

$$\text{أ) تبيان أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] = \frac{v_0}{1-q}$$

$$\text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0 \text{ وبالتالي: } -1 < q < 1 \text{ فإن } q \text{، أساسها } q \text{، متتالية هندسية متقاربة أساسها } q \text{، فإن } -1 < q < 1 \text{ وبالتالي:}$$

(ب) حساب الأساس q :

$$1 - q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \text{ وعليه: } \frac{6}{1-q} = 18 \text{ ومنه: } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q} = \frac{6}{1-q} \end{cases}$$

$$\boxed{q = \frac{2}{3}} \text{ إذن:}$$

تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{v_n = 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n}$$

(ج) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$:

نستعمل البرهان بالتراجع، نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = v_0 - 3 = 6 - 3 = 3$ ، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = v_n - 3$ (فرضية التراجع)

ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} = v_{n+1} - 3}$

$$\text{البرهان: لدينا: } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = \frac{2}{3}v_n - 3 = v_{n+1} - 3$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا: $u_n = v_n - 3$ ومنه: $u_n = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$

حل التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

اختيار الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التبرير:

(1) لدينا: (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بعدها العام، $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.
(ب) (u_n) هندسية،

التبرير: لدينا: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1} = 5 \times 2^n \times \frac{3^n}{3} = \frac{5}{3} (6)^n$

ومنه: $u_{n+1} = \frac{5}{3} (6)^{n+1} = \frac{5}{3} \times 6^n \times 6 = 6u_n$

إذن: (u_n) هندسية أساسها $q = 6$.

(2) لدينا: (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون

$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ هي: $n = 31$ ، التبرير:

لدينا: (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ نجد: $\begin{cases} v_1 = v_0 + r = 1 + 4 = 5 \\ v_n = v_0 + nr = 4n + 1 \end{cases}$

ولدينا: $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ يعني: $(n - 1 + 1) \left(\frac{v_1 + v_n}{2}\right) = 2015$

ومنه: $n \left(\frac{5 + 4n + 1}{2}\right) = 2015$

وعليه: $n(2n + 3) = 2015$

أي: $2n^2 + 3n - 2015 = 0$

ومميزها $\Delta = 16129 > 0$ وبالتالي: $\begin{cases} n_1 = \frac{-3 + \sqrt{16129}}{4} = 31 \in \mathbb{N} \\ n_2 = \frac{-3 - \sqrt{16129}}{4} = -32,5 \notin \mathbb{N} \end{cases}$ إذن: $n = 31$.

(3) دالة عددية.

(4) (5) (6) احتمالات.

حل التمرين 15: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنوياً وبالمقابل يُوظف 3000 عامل سنوياً. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

(1) حساب u_1 و u_2 :

■ u_1 هو عدد العمال سنة $2012 + 1$ أي سنة 2013، ومنه:

$$u_1 = u_0 - \frac{5}{100} u_0 + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_0 + 3 = 0,95 u_0 + 3 = 0,95(50) + 3 = 50,5$$

■ u_2 هو عدد العمال سنة $2012 + 2$ أي سنة 2014، ومنه:

$$u_2 = u_1 - \frac{5}{100} u_1 + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_1 + 3 = 0,95 u_1 + 3 = 0,95(50,5) + 3 = 50,975$$

(2) أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 0,95 u_n + 3$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)u_n + 3 = 0,95u_n + 3$$

لدينا: $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)u_n + 3 = 0,95u_n + 3$

(ب) تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:

ط01: لدينا: $\begin{cases} u_0 + u_2 = 100,975 \\ 2u_1 = 110 \end{cases}$ ومنه: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ وعليه: (u_n) ليست حسابية.

ط02: لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_0 = 0,5 \\ u_2 - u_1 = 0,475 \end{cases}$ ومنه: $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ وعليه: (u_n) ليست حسابية.

ط03: لدينا: $u_{n+1} \neq u_n + r$ (حيث $r \in \mathbb{R}$)، وعليه: (u_n) ليست حسابية.

تبيان أن (u_n) ليست هندسية.

ط01: لدينا: $\begin{cases} u_0 \times u_2 = 2548,75 \\ u_1^2 = 2550,25 \end{cases}$ ومنه: $u_0 \times u_2 \neq u_1^2$ وعليه: (u_n) ليست هندسية.

ط02: لدينا: $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = 1,010 \\ \frac{u_2}{u_1} = 1,009 \end{cases}$ ومنه: $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ وعليه: (u_n) ليست هندسية.

ط03: لدينا: $u_{n+1} \neq qu_n$ (حيث $q \in \mathbb{R}$)، وعليه: (u_n) ليست هندسية.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 60 - u_n$.

(أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

$$v_n = 60 - u_n$$

ومنه: $v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0,95u_n + 3) = 57 - 0,95u_n = 0,95\left(\frac{57}{0,95} - u_n\right)$

وعليه: $v_{n+1} = 0,95(60 - u_n) = 0,95v_n$

$$v_{n+1} = 0,95v_n$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0,95$ وحدّها الأول $v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$

(ب) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 10(0,95)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = 60 - v_n$ ومنه: $u_n = 60 - 10(0,95)^n$

(ج) تقدير عدد العمال سنة 2017:

لدينا: $5 = 2017 - 2012$ أي: $n = 5$ ، ومنه: $u_5 = 60 - 10(0,95)^5 = 52,262$

إذن: عدد العمال سنة 2017 يُقدر بـ 52262 عامل.

(د) تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = [60 - 10(0,95)^{n+1}] - [60 - 10(0,95)^n]$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = 60 - 10(0,95)^n \times 0,95 - 60 + 10(0,95)^n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = 10(0,95)^n(-0,95 + 1) = 0,5(0,95)^n > 0$

أي: $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

(هـ) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,95)^n = 0$ (لأن $-1 < -0,95 < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 60$

حل التمرين 16: (04,5 نقطة) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} V_0 = 18 \\ V_0 + V_1 + V_2 = 38 \end{cases}$

1/ تبين أن أساس المتتالية (V_n) هو $q = \frac{2}{3}$:

بما أن: (V_n) متتالية هندسية حدّها الأول V_0 فإن: $V_1 = V_0 \times q = 18q$ و $V_2 = V_0 \times q^2 = 18q^2$ ومنه العلاقة: $V_0 + V_1 + V_2 = 38$ تُصبح: $18 + 18q + 18q^2 = 38$ ، وعليه: $9q^2 + 9q - 10 = 0$ مميزها: $\Delta = (9)^2 - 4(9)(-10) = 441 > 0$

ومنه: $q' = \frac{-9 + \sqrt{441}}{2(9)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ و $q'' = \frac{-9 - \sqrt{441}}{2(9)} = \frac{-30}{18} = \frac{-5}{3}$ (مرفوض لأن حدود (V_n) موجبة).

إذن: $q = \frac{2}{3}$.

2/ كتابة عبارة الحد العام V_n بدلالة n :

لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه: $V_n = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (V_n) :

ط01: (ندرس إشارة الفرق $V_{n+1} - V_n$)

لدينا: $V_{n+1} - V_n = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} - 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

ومنه: $V_{n+1} - V_n = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3}\right) = -6 \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0$

أي: $V_{n+1} - V_n < 0$.

إذن: (V_n) متناقصة تماماً.

ط02: بما أن: $\begin{cases} V_0 > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ فإن: (V_n) متناقصة تماماً.

ج) حساب نهاية (V_n) :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

3/ لدينا: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

أ) حساب S_n بدلالة n :

لدينا: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1} = V_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q}\right) = 18 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right)$

ومنه: $S_n = 18 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right) = 54 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

استنتاج نهاية S_n عندما n يوول إلى $+\infty$:

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 54$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

ب) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$:

$$S_n = \frac{3510}{81} \text{ يُكافئ: } 54 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3510}{81}$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{65}{81} \text{ ومنه:}$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-16}{81} \text{ وعليه:}$$

$$\text{أي: } \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{ إذن: } \boxed{n = 4} \text{ (} S_4 = \frac{3510}{81} \text{).}$$

حل التمرين 17: (05 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\text{لدينا: } (U_n) \text{ متتالية معرفّة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} \end{cases}$$

(1) حساب الحدين U_1 و U_2 :

$$U_1 = \frac{4}{7}U_0 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}(5) + \frac{3}{7} = \frac{20}{7} + \frac{3}{7} = \frac{23}{7} \quad \blacksquare$$

$$U_2 = \frac{4}{7}U_1 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}\left(\frac{23}{7}\right) + \frac{3}{7} = \frac{92+21}{49} = \frac{113}{49} \quad \blacksquare$$

(2) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 1$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $U_0 = 5 > 1$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $U_n > 1$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $U_{n+1} > 1$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $U_n > 1$

$$\text{ومنّه: } \frac{4}{7}U_n > \frac{4}{7}$$

$$\text{وعليه: } \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} > \frac{4}{7} + \frac{3}{7}$$

$$\text{أي: } \boxed{U_{n+1} > 1}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n > 1$.

ب- تبيان أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماماً: (ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$)

$$\text{لدينا: } U_{n+1} - U_n = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} - U_n = \left(\frac{4}{7} - 1\right)U_n + \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}U_n + \frac{3}{7} \quad \blacksquare$$

▪ ولدينا من جهة أخرى: $U_n > 1$

$$\text{ومنّه: } -\frac{3}{7}U_n < -\frac{3}{7}$$

$$\text{وعليه: } -\frac{3}{7}U_n + \frac{3}{7} < -\frac{3}{7} + \frac{3}{7}$$

$$\text{أي: } \boxed{U_{n+1} - U_n < 0} \text{، إذن: } (U_n) \text{ متناقصة تماماً.}$$

ج- الاستنتاج بالنسبة لتقارب المتتالية (U_n) :

بمأنّ (U_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل ($U_n > 1$) فإنّها متقاربة.

(3) لدينا: (V_n) متتالية معرفّة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 1$

أ- تبيان أن (V_n) متتالية هندسية مُعَيَّنًا أساسها وحدّها الأول: (نكتب V_{n+1} بدلالة V_n)

$$\text{لدينا: } V_n = U_n - 1 \text{ ومنه: } V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} - 1 = \frac{4}{7}U_n - \frac{4}{7} = \frac{4}{7}(U_n - 1) = \frac{4}{7}V_n$$

$$\boxed{V_{n+1} = \frac{4}{7}V_n} \text{ أي:}$$

$$\text{إذن: } (V_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{4}{7} \text{ وحدّها الأول } \boxed{V_0 = U_0 - 1 = 5 - 1 = 4}$$

ب- كتابة V_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } V_n = V_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{V_n = 4 \left(\frac{4}{7}\right)^n}$$

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n , $U_n = 1 + 4 \left(\frac{4}{7}\right)^n$

$$\text{لدينا: } V_n = U_n - 1 \text{ ومنه: } \boxed{U_n = 4 \left(\frac{4}{7}\right)^n + 1}$$

ج- حساب نهاية (U_n) :

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0 \text{ (لأن } -1 < \frac{4}{7} < 1 \text{)}, \text{ إذن: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1}$$

حل التمرين 18: (04 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإ.

$$\text{لدينا: } (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بـ: } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n < 3$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$, لدينا: $u_0 = -1 < 3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 3$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} < 3$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 3$

$$\text{ومنّه: } \frac{1}{3}u_n < 1$$

$$\text{وعليه: } \frac{1}{3}u_n + 2 < 1 + 2$$

$$\text{أي: } \boxed{u_{n+1} < 3}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n < 3$.

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n + 2 = -\frac{2}{3}u_n + 2$$

ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 3$

$$\text{ومنّه: } -\frac{2}{3}u_n > -2$$

$$\text{وعليه: } -\frac{2}{3}u_n + 2 > -2 + 2$$

أي: $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($u_n < 3$) فإنها متقاربة.

2) لدينا: (v_n) متتالية معرفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 - u_n$.

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم تعيين حدّها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = 3 - u_n$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) = 1 - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(3 - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = 3 - u_0 = 3 - (-1) = 4$

ب) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (3 - v_0) + (3 - v_1) + \dots + (3 - v_n)$

$$\text{ومنه: } S_n = 3(n - 0 + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 3(n + 1) - \left[v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$\text{وعليه: } S_n = 3(n + 1) - \left[4 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)\right] = 3(n + 1) - \left[6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right]$$

$$\text{وبالتالي: } S_n = 3n + 3 - \left[6 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^n\right] = 3n + 3 - 6 + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{ويكون: } S_n = 3n - 3 + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3(n - 1) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

حل التمرين 19: (04 نقاط) بكالوريا 2017 د 01 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3 :

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u_2 = 3u_1 - 2 = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$u_3 = 3u_2 - 2 = 3(10) - 2 = 30 - 2 = 28$$

تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

2) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدّها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = (3u_{n+1} - 2) - (3u_n - 2) = 3u_{n+1} - 2 - 3u_n + 2$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$$

أي: $v_{n+1} = 3v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدّها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$.

(ب) تعيين v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 2(3)^n$.

استنتاج أن المتتالية (u_n) متزايدة: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $0 < v_n = 2(3)^n = u_{n+1} - u_n$ ، إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

(3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

(أ) حساب S_n بدلالة n :

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{1-(3)^{(n-1)-0+1}}{1-3} \right) = 2 \left(\frac{1-3^n}{-2} \right) = -(1-3^n)$

ومنّه: $S_n = 3^n - 1$.

(ب) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = S_n + u_0$:

ط01: يُمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

ط02: لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ومنّه: $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n$

إذن: $u_n = S_n + u_0$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = S_n + u_0 = (3^n - 1) + 2 = 3^n + 1$.

حل التمرين 20: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (u_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

(1) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = -2 < 2$ ، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 2$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} < 2$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 2$

ومنّه: $\frac{1}{2}u_n < 1$

وعليه: $\frac{1}{2}u_n + 1 < 1 + 1$

أي: $u_{n+1} < 2$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 2$.

(ب) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = \left(\frac{1}{2} - 1\right)u_n + 1 = -\frac{1}{2}u_n + 1$

ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 2$

$$\text{ومنه: } -\frac{1}{2}u_n > -1$$

$$\text{وعليه: } -\frac{1}{2}u_n + 1 > -1 + 1$$

$$\text{أي: } \boxed{u_{n+1} - u_n > 0}, \text{ إذن: } (u_n) \text{ متزايدة تماماً.}$$

استنتاج أنها متقاربة:

بمأن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($u_n < 2$) فإنها متقاربة.

(2) لدينا: (v_n) متتالية معرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n = 2u_n - 4$.

(أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 : (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

$$\text{لدينا: } v_n = 2u_n - 4$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 = 2\left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - 4 = \frac{1}{2} \times 2u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2} \times 2u_n - 2$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} = \frac{1}{2}(2u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$$\text{أي: } \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

$$\text{إذن: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \boxed{q = \frac{1}{2}} \text{ وحدها الأول } \boxed{v_0 = 2u_0 - 4 = 2(-2) - 4 = -8}$$

(ب) ايجاد عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{v_n = -8 \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = 2u_n - 4 \text{ ومنه: } u_n = \frac{v_n + 4}{2} \text{ ويكون: } \boxed{u_n = -4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(\frac{1}{2}v_0 + 2\right) + \left(\frac{1}{2}v_1 + 2\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}v_n + 2\right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 2(n - 0 + 1) = \frac{1}{2} \left[v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \right] + 2(n + 1)$$

$$\text{وعليه: } S_n = \frac{1}{2} \left[-8 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) \right] + 2(n + 1) = -8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + 2(n + 1)$$

$$\text{وبالتالي: } S_n = 8 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) + 2(n + 1) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

حل التمرين 21: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (v_n) متتالية هندسية ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$.

(1) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 1 \left(\frac{1 - (e^2)^{n+1}}{1 - e^2} \right) = \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}$$

(2) لدينا: (u_n) و (w_n) متتاليتين معرفتين كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n = w_n - v_n \text{ و } w_n = 2n + 4 + e^{2n}$$

تبيان أن المتتالية (u_n) حسابية، مع تحديد أساسها r وحدها الأول u_0 :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = 1(e^2)^n = e^{2n}$

ومنه: $u_n = w_n - v_n = 2n + 4$ إذن: $w_n = 2n + 4 + e^{2n} = 2n + 4 + v_n$

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n .

لدينا: $u_n = 2n + 4$ ، ومنه: $u_{n+1} = 2(n+1) + 4 = 2n + 2 + 4 = u_n + 2$

أي: $u_{n+1} = u_n + 2$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $[r=2]$ وحدّها الأول $[u_0 = 2(0) + 4 = 4]$.

(3) اثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$

لدينا: $4 + 6 + 8 + \dots + (2n+4) = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n-0+1) \left(\frac{u_0+u_n}{2} \right)$

ومنه: $4 + 6 + 8 + \dots + (2n+4) = (n+1) \left(\frac{4+2n+4}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{2n+8}{2} \right)$

وعليه: $4 + 6 + 8 + \dots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$

(4) استنتاج المجموع T_n بدلالة n حيث، $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

لدينا: $u_n = w_n - v_n$

ومنه: $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n)$

وعليه: $T_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_n) + (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$

ويكون: $T_n = (n+1)(n+4) + \frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}$

حل التمرين 22: (04 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

I) لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان كما يلي $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0,7u_n + 6 \end{cases}$ و $v_n = u_n - 20$

(1) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0,7 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0 : (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 20$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = (0,7u_n + 6) - 20 = 0,7u_n - 14 = 0,7 \left(u_n - \frac{14}{0,7} \right)$

وعليه: $v_{n+1} = 0,7(u_n - 20) = 0,7v_n$

أي: $v_{n+1} = 0,7v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $[q = 0,7]$ وحدّها الأول $[v_0 = u_0 - 20 = (50) - 20 = 30]$

كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 30(0,7)^n$

(2) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n :

لدينا: $v_n = u_n - 20$ ومنه: $u_n = 30(0,7)^n + 20$

ب. تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = (30(0,7)^{n+1} + 20) - (30(0,7)^n + 20)$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = 30(0,7)^n \times 0,7 - 30(0,7)^n = 30(0,7)^n(0,7 - 1) = -9(0,7)^n < 0$

أي: $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن: (u_n) متناقصة تماماً.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0$ (لأن $-1 < 0,7 < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$.

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة: ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$
(1) u_1 عدد المشتركين في سنة 2017 حيث،

$$u_1 = u_0 - \frac{30}{100} u_0 + 6 = (1 - 0,3)u_0 + 6 = 0,7u_0 + 6 = 0,7(50) + 6 = 41$$

إذن: عدد المشتركين في سنة 2017 هو 4100 مشترك.

■ u_2 عدد المشتركين في سنة 2018 حيث،

$$u_2 = u_1 - \frac{30}{100} u_1 + 6 = (1 - 0,3)u_1 + 6 = 0,7u_1 + 6 = 0,7(41) + 6 = 34,7$$

إذن: عدد المشتركين في سنة 2017 هو 3470 مشترك.

(2) تبرير العبارة $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$:

لدينا: u_{n+1} هو عدد المشتركين في سنة $2016 + (n + 1)$ ؛ و u_n هو عدد المشتركين في سنة $2016 + n$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100} u_n + 6 = (1 - 0,3)u_n + 6 = 0,7u_n + 6$$
 ومنه:

ب. عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك معناه: $u_n < 24$

$$30(0,7)^n + 20 < 24$$
 ومنه:

$$(0,7)^n < \frac{2}{15}$$
 وعليه:

$$n \ln(0,7) < \ln\left(\frac{2}{15}\right)$$
 ويكون:

$$(\ln(0,7) < 0) \quad n > \frac{\ln\left(\frac{2}{15}\right)}{\ln(0,7)}$$
 وعليه:

وبالتالي: $n = 6$

إذن: ابتداءً من سنة 2016 + 6 أي سنة 2022 يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك.

حل التمرين 23: (04 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 2u_{n+1} = u_n + 6 \end{cases}$

$$2u_{n+1} = u_n + 6 \quad \text{معناه:} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

(1) أ. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 6$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = -1 < 6$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

■ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 6$ (فرضية التراجع)

■ ونبرهن صحة الخاصية $P(n + 1)$ أي: $u_{n+1} < 6$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 6$

$$\frac{1}{2}u_n < 3$$
 ومنه:

$$\text{وعليه: } \frac{1}{2}u_n + 3 < 3 + 3$$

$$\boxed{u_{n+1} < 6} \text{ أي:}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 6$.

ب. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = \left(\frac{1}{2} - 1\right)u_n + 3 = -\frac{1}{2}u_n + 3$$

ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 6$

$$\text{ومنه: } -\frac{1}{2}u_n > -3$$

$$\text{وعليه: } -\frac{1}{2}u_n + 3 > -3 + 3$$

$$\text{أي: } \boxed{u_{n+1} - u_n > 0}, \text{ إذن: } (u_n) \text{ متزايدة تماماً.}$$

استنتاج أنها متقاربة:

بما أن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($u_n < 6$) فإنها متقاربة.

(2) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 6$.

أ. تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0 : (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 6$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n} \text{ أي:}$$

$$\text{إذن: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \boxed{q = \frac{1}{2}} \text{ وحدّها الأول } \boxed{v_0 = u_0 - 6 = -1 - 6 = -7}.$$

ب. كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{v_n = -7 \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 6 \text{ ومنه: } \boxed{u_n = -7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6}.$$

$$\text{ولدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ (لأن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{)}, \text{ إذن: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6}.$$

(3) حساب بدلالة n ما يلي: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\text{ومنه: } S_n = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + (v_2 + 6) + \dots + (v_n + 6)$$

$$\text{وعليه: } S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + 6(n - 0 + 1)$$

$$\text{ويكون: } S_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + 6(n+1) = -7 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) + 6(n+1)$$

$$\text{إذن: } S_n = 14 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) + 6(n+1)$$

حساب بدلالة n ما يلي، $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$:

لدينا: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

ومنه: $P_n = (v_0 \times q^0) \times (v_0 \times q^1) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n)$

وعليه: $P_n = (v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0) \times (q^0 \times q^1 \times \dots \times q^n) = v_0^{n+1} \times q^{0+1+\dots+n}$

إذن: $P_n = (-7)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

حل التمرين 24: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

(1) حساب كلا من u_1 و u_2 :

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(-4) + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(-1) + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

(ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$:

نسعى هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = -4 < 8$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

▪ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 8$ (فرضية التراجع)

▪ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} < 8$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 8$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{4}u_n < 6$$

$$\text{وعليه: } \frac{3}{4}u_n + 2 < 6 + 2$$

$$\text{أي: } u_{n+1} < 8$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$.

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{3}{4} - 1\right)u_n + 2 = -\frac{1}{4}u_n + 2$$

▪ ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 8$

$$\text{ومنه: } -\frac{1}{4}u_n > -2$$

$$\text{وعليه: } -\frac{1}{4}u_n + 2 > -2 + 2$$

$$\text{أي: } u_{n+1} - u_n > 0$$

إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

استنتاج أنها متقاربة:

بما أن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($u_n < 8$) فإنها متقاربة.

(3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.

(أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$:

لدينا: $v_n = u_n - \alpha$

ومن: $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \frac{3}{4}u_n + 2 - \alpha = \frac{3}{4}(v_n + \alpha) + 2 - \alpha = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}\alpha + 2 - \alpha$

وعليه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \left(\frac{3}{4} - 1\right)\alpha + 2 = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

(ب) تعيين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يُطلب تعيين حدّها الأول v_0 :

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ معناها: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

أي: $-\frac{1}{4}\alpha + 2 = 0$

ومن: $\alpha = 8$

وبالتالي: $v_n = u_n - 8$ إذن: حدّها الأول $v_0 = u_0 - 8 = -4 - 8 = -12$

(ج) لدينا: $\alpha = 8$ نجد: $v_n = u_n - 8$

التعبير عن v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$

لدينا: $v_n = u_n - 8$ ومنه: $u_n = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$

(4) حساب المجموع S_n بدلالة n حيث، $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_1 + 8) + (v_2 + 8) + \dots + (v_n + 8)$

ومن: $S_n = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + 8(n - 1 + 1) = v_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{3}{4}}\right) + 8n$

وعليه: $S_n = -9 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}\right) + 8n = 36 \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) + 8n$

حل التمرين 25: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$

(1) حساب حدّها الأول u_0 وأساسها r :

لدينا: $u_n = u_1 + (n - 1)r$ ومنه: $\begin{cases} u_2 = u_1 + r = \frac{9}{2} + r \\ u_5 = u_1 + 4r = \frac{9}{2} + 4r \end{cases}$

العلاقة $u_2 + 2u_5 = 27$ تُصبح: $\left(\frac{9}{2} + r\right) + 2\left(\frac{9}{2} + 4r\right) = 27$

ومن: $9r = 27 - 9 - \frac{9}{2}$

وعليه: $9r = \frac{27}{2}$ ، وبالتالي: $r = \frac{3}{2}$

ويكون: $\boxed{u_0 = u_1 - r = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3}$ (لأن $r = u_1 - u_0$)

(2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = \frac{3}{2}n + 3}$

(3) تبين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية:

نضع: $u_n = 2019$ نجد: $\frac{3}{2}n + 3 = 2019$

ومنه: $\frac{3}{2}n = 2016$

وعليه: $3n = 4032$

وبالتالي: $n = \frac{4032}{3} = 1344 \in \mathbb{N}$ ($u_{1344} = 2019$)

إذن: العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) .

حساب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$

و $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344}$:

■ لدينا: $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344} = (1344 - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_{1344}}{2} \right)$

ومنه: $S_1 = 1344 \left(\frac{\frac{9}{2} + 2019}{2} \right) = 672(2023,5) = 1359792$

■ لدينا: $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344} = \frac{(1344-1+1)}{2} \frac{u_2 + u_{1344}}{2} = \frac{1344}{2} \frac{6 + 2019}{2}$

ومنه: $S_2 = 672(1012,5) = 680400$

-استنتاج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$

نلاحظ أن $S_1 = S_2 + S_3$ ومنه: $S_3 = S_1 - S_2 = 679392$

(4) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{6-2u_n}$.

-حساب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

لدينا: $\frac{1}{v_n} = e^{3n}$ ومنه: $v_n = e^{6-2u_n} = e^{6-2(\frac{3}{2}n+3)} = e^{-3n}$

وعليه: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} = e^{3(0)} + e^{3(1)} + \dots + e^{3n}$

ويكون: $S_n = (e^3)^0 + (e^3)^1 + \dots + (e^3)^n = \left(\frac{1-(e^3)^{n+1}}{1-e^3} \right) = \frac{1-e^{3(n+1)}}{1-e^3}$