

المفيد في الرياضيات

الأعداد المركبة
ملخص و 18 تمرين محلول .

BAC
2023

وفق
منهاج
التربية

دعواتكم للأستاذ
أحمد جواليل رحمه
الله و لكل موتانا
بالرحمة .

لطلبة بكالوريا
شعب علمية
الأستاذ
بلجودي حمو

المفيد في الرياضيات

الأستاذ: حمو بلجودي

الأعداد المركبة

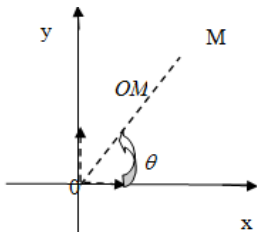
نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + yi$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$.

• نرسم إلى مجموعة الأعداد المركبة C :
 • الكتابة $z = x + yi$ تسمى الشكل الجبري لـ z .
 • x هو الجزء الحقيقي لـ z و رمزه $\text{Re}(z)$.
 • y هو الجزء التخيلي لـ z و رمزه $\text{Im}(z)$.
 • إذا كان $y = 0$ نقول أن z حقيقي. إذا كان $x = 0$ نقول أن z تخيلي صرف.

❖ **تساوي عددين مركبين و انعدام عدد مركب:**

• z و z' عددان مركبان حيث $z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$:
 $z = z'$ معناه $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ • $z = 0$ معناه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

❖ **التمثيل الهندسي لعدد مركب:**



المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$. نرفق النقطة $M(x, y)$ إلى كل

عدد مركب $z = x + yi$

• M هي صورة العدد المركب z

• الشعاع $\vec{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب

• z هي لاحقة النقطة M و الشعاع $\vec{OM}$.

❖ **مجموع وجداء عددين مركبين:**

z عدد مركب حيث $z = x + yi$ و x و y عددان حقيقيان ، z عدد مركب حيث $z' = x' + y'i$ و x' و y' عددان

حقيقيان: $z + z' = (x + x') + (y + y')i$ و $z \times z' = xx' - yy' + (y + y')i$

❖ **مرافق عدد مركب:**

z عدد مركب حيث $z = x + yi$ و x و y عددان حقيقيان العدد المركب $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z حيث

$$\bar{z} = x - yi$$

• إذا كان z حقيقي فإن $z = \bar{z}$ • إذا كان z تخيلي صرف فإن $\bar{z} = -z$.

• النقطتين M و M' صورتا z و $\bar{z}$ على الترتيب متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

خواص و عمليات: z عدد مركب و $\bar{z}$ مرافقه ، z' عدد مركب و مرافقه $\bar{z}'$.

$\bar{\bar{z}} = z$	$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$	$z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$	$\bar{z}\bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$, $z' \neq 0$	$\bar{z}^n = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

لاحقة نقطة ، لاحقة شعاع:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$. و A و B و G نقطتين من المستوي.

• Z_A هي لاحقة النقطة A و Z_B هي لاحقة النقطة B .

• $Z_B - Z_A$ هي لاحقة الشعاع $\vec{AB}$.

طويلة عدد مركب:

z عدد مركب حيث $z = x + yi$ و x و y عددان حقيقيان.

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

• في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$. حيث M هي صورة z $|z| = \|\vec{OM}\| = OM$.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

$ z \times z' = z \times z' $	$ -z = z $	$ \bar{z} = z $
$ z + z' \neq z + z' $	$ z'' = z ''$	$\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' } \quad z' \neq 0,$

A و B نقطتان لاحتقائهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$

عمدة عدد مركب غير معدوم:

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ لتكن M صورة العدد المركب الغير معدوم z .

نسمي عمدة العدد المركب z كل قياس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OI}; \vec{OM})$. و نرمز له بـ $\arg(z)$.

$$\arg(z) = \left(\vec{OI}; \vec{OM} \right) + 2k\pi \quad \text{حيث } (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{أي}$$

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومان ، n عدد طبيعي غير معدوم :

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$	$\arg(z)^n = n \arg(z)$	$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
--	-------------------------	--

الشكل المثلثي و الأسى لعدد مركب غير معدوم:

z عدد مركب غير معدوم . حيث : $|z| = r$ و $\arg(z) = \theta$

• الشكل المثلثي لـ z يكتب على الشكل $z = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$

• الشكل الأسى لـ z يكتب على الشكل $z = re^{i\theta}$

ملاحظة: إذا كان $z = x + iy$ ، $\cos \theta = \frac{x}{r}$ و $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

دستور موافر:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{عدد مركب طولته } r \text{ و } \theta \text{ عمدة له . من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم لدينا}$$

المعادلات من الدرجة الثانية:

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$ (E) حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$. لحل

المعادلة (E) نقوم بحساب المميز Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$.

عدد حلول المعادلة (E)	حلول المعادلة (E)	$\Delta = b^2 - 4ac$
تقبل حلين حقيقيين	$z' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	إذا كان $\Delta > 0$
تقبل حلا وحيدا حقيقيا	$z = \frac{-b}{2a}$	إذا كان $\Delta = 0$
تقبل حلين مركبين مترافقين	$z' = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ و $z'' = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a}$	إذا كان $\Delta < 0$

التفسيرات الهندسية في الأعداد المركبة :

في كل مما يأتي: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$. A, B, C, D نقط لواحقها على الترتيب z_A, z_B, z_C, z_D :

لاحقة شعاع	• $Z_B - Z_A$ هي لاحقة الشعاع $\vec{AB}$
طويلة شعاع	• $ Z_B - Z_A = AB$
لاحقة مرجح جملة :	Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ هي $Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B}{\alpha + \beta}$ حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
الارتباط الخطي و استقامية النقط :	• إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عددا حقيقيا غير معدوم فإن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطين خطيا . والنقط A, B, C على استقامة واحدة .
تداور النقط:	• إذا كان $ z_A - z_D = z_B - z_D = z_C - z_D = r$ فإن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها r .
التعامد:	• يكون الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ تخيليا صرفا.
لاحقة منتصف قطعة:	النقطة H منتصف القطعة $[AB]$: $Z_H = \frac{z_A + z_B}{2}$

طبيعة مثلث:

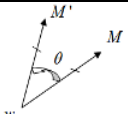
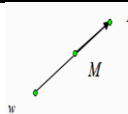
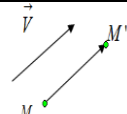
المثلث ABC	الشروط
قائم في A .	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$
قائم في A و متساوي الساقين	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ أو $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$
متساوي الساقين	حيث $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = a + bi$ و $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $ a + bi = 1$ وعمدة $a + bi$ تختلف عن $\pm \frac{\pi}{3}$
متقايس الأضلاع .	حيث $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = a + bi$ و $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $ a + bi = 1$ وعمدة $a + bi$ تساوي $\pm \frac{\pi}{3}$

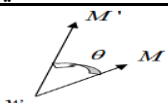
طبيعة رباعي:

الرباعي $ABCD$	الشروط
متوازي أضلاع	$z_B - z_A = z_C - z_D$
مستطيل	حيث $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai$ و $z_B - z_A = z_C - z_D$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$
مربع	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ أو $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$ و $z_B - z_A = z_C - z_D$
معين	$ a + bi = 1$ و $b \neq 0$ و $a \neq 0$ و $z_B - z_A = z_C - z_D$

التحويلات النقطية في الأعداد المركبة

في كل مما يأتي: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. A, B, C, D نقط لواحقتها على الترتيب z_A, z_B, z_C, z_D, F . التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاقطة z' حيث $z' = az + b$.

الدوران R	التحاكي h	الانسحاب T	
$z' = az + b$	$z' = az + b$	$z' = az + b$	العبارة المركبة
$z' - z_w = a(z - z_w)$	$z' - z_w = k(z - z_w)$		الصيغة المبسطة
$ a = 1$ و $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	$a = 1$	التعرف على طبيعة F
• مركزه w ذات اللاقطة $\frac{b}{1-a}$ • زاويته $\theta = \arg(a)$	• مركزه w ذات اللاقطة $\frac{b}{1-a}$ • نسبته $k = a$	شعاعه $\vec{V}$ صورة b	العناصر المميزة
• له نقطة صامدة وحيدة هي w إذا كان $\theta \neq 0$ • يحافظ على المسافات، الاستقامية، التوازي و المرجح.	• له نقطة صامدة وحيدة هي w • يحافظ على الاستقامية، التوازي والمرجح.	• يحافظ على المسافات، الاستقامية، التوازي و المرجح.	خواص
			هندسيا

التشابه المباشر S	
$z' = az + b$	العبارة المركبة
$z' - z_w = a(z - z_w)$	الصيغة المبسطة
$ a \neq 1$ و $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$	التعرف على طبيعة F
• مركزه w ذات اللاقطة $\frac{b}{1-a}$ • نسبته $ a $ • زاويته $\arg(a)$	العناصر المميزة
• يحافظ على الاستقامية، التوازي والمرجح. • يحول المسافات بضربها في النسبة و المساحات في مربع النسبة.	خواص
	هندسيا

نتائج:

- إذا وجد انسحاب شعاعه $\vec{AB}$ و يحول C إلى D فإن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .
- إذا وجد تحاكي مركزه A و يحول B إلى C فإن النقط A, B, C على استقامة واحدة.
- إذا وجد دوران مركزه A و يحول B إلى C فإن المثلث ABC :
 ◦ متساوي الساقين إذا كانت زاوية الدوران تختلف عن $\pm \frac{\pi}{2}$.

◦ قائم في A و متساوي الساقين إذا كانت زاوية الدوران تساوي $\pm \frac{\pi}{2}$.

- إذا وجد تشابه مباشر مركزه A و زاويته $\pm \frac{\pi}{2}$ و يحول B إلى C فإن المثلث ABC قائم في A .

- صورة دائرة (C) مركزها Ω ونصف قطرها r بالدوران R هي دائرة (C') مركزها Ω' ونصف قطرها r . حيث Ω' هي صورة Ω بالدوران R .
- صورة دائرة (C) مركزها Ω ونصف قطرها r بالتشابه المباشر S هي دائرة (C') مركزها Ω' ونصف قطرها $k \times r$. حيث Ω' هي صورة Ω بالتشابه المباشر S و k هي نسبة التشابه المباشر S .
- تركيب تحاكي نسبته k بدوران أو انسحاب (أو العكس) هو تشابه مباشر نسبته $|k|$.
- تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبتهجاء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين .

❖ طرق:

1. [•] لكتابة العبارة المركبة لتحويل نقطي نقوم بحساب a و b باستعمال المعطيات ثم تعويضهما في العبارة التالية :

$$z' = az + b \text{ أو استعمال الصيغة البسطة المذكورة في الجدول السابق .}$$

2. [•] لإيجاد طبيعة تحويل نقطي عبارته المركبة معطاة، نستخرج a من العبارة و نتعرف على طبيعة التحويل من خلاله .

3. [•] لإيجاد طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه A و يحول B إلى C نقوم بحساب a كالتالي: $a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم نتعرف على

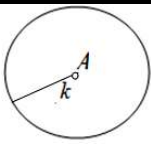
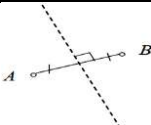
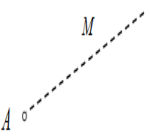
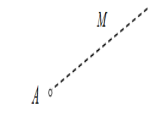
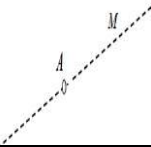
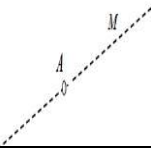
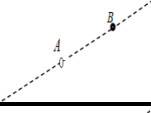
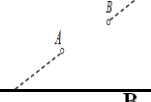
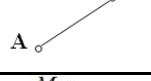
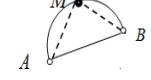
طبيعة التحويل من خلاله .

4. [•] لإيجاد طبيعة التحويل النقطي الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D نقوم بحساب a كالتالي: $a = \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ ثم نتعرف

على طبيعة التحويل من خلاله .

مجموعة النقط في الأعداد المركبة

في كل مما يأتي: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. A ، B نقط لواحقتها على الترتيب z_A ، z_B

الشكل	مجموعة النقط M	الإنشاء
$k > 0, z - z_A = k$ حيث $z - z_A = ke^{i\theta}$ θ متغير على $\mathbb{R}$ و k ثابت حقيقي موجب	دائرة مركزها A و نصف قطرها k	
$ z - z_A = z - z_B $	محور القطعة $[AB]$	
$\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$	نصف مستقيم مبدؤه A باستثناء A حيث $\left(\vec{u}; \vec{AM}\right) = \theta + 2k\pi$	
حيث $z - z_A = ke^{i\theta}$ k متغير على $\mathbb{R}_+^*$ و θ ثابت.	نصف مستقيم مبدؤه A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u}; \vec{AM}\right) = \theta + 2k\pi$	
$\arg(z - z_A) = \theta + k\pi$	المستقيم الذي يشمل A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u}; \vec{AM}\right) = \theta + 2k\pi$	
حيث $z - z_A = ke^{i\theta}$ k متغير على $\mathbb{R}^*$ و θ ثابت.	المستقيم الذي يشمل A باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{u}; \vec{AM}\right) = \theta + 2k\pi$	
$\arg \frac{z - z_B}{z - z_A} = k\pi$	المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B	
$\arg \frac{z - z_B}{z - z_A} = 2k\pi$	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$	
$\arg \frac{z - z_B}{z - z_A} = \pi + 2k\pi$	القطعة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	
$\arg \frac{z - z_B}{z - z_A} = \frac{\pi}{2} + k\pi$	دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	
$\arg \frac{z - z_B}{z - z_A} = \frac{\pi}{2} + k\pi$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	

تمارين محلولة

التمرين -1-

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

$Z_3 = (2+3i)^2 - (3-4i)$	$Z_2 = 2(2+i)(3-4i)$	$Z_1 = (2+3i) + 5(3-4i)$
$Z_6 = \frac{\sqrt{3} + 2i\sqrt{2}}{i}$	$Z_5 = \frac{\sqrt{2}-i}{1-i}$	$Z_4 = \frac{3-i}{3-2i} - \frac{2-i}{1-i}$

التمرين -2-

1. عين مرافق الأعداد المركبة التالية:

$Z_4 = -2i$	$Z_3 = 3$	$Z_2 = \sqrt{2} + (\sqrt{3}+1)i$	$Z_1 = 2-i$
-------------	-----------	----------------------------------	-------------

2. ليكن العددين المركبين التاليين: $Z_A = 2+i$, $Z_B = 1-i$

• أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

$(1-i)(Z_A + 3i) - \overline{Z_B} - \overline{Z_A}Z_B$	$i\overline{Z_A} - \overline{Z_B} - \overline{Z_A}$	$2\overline{Z_A} - 3\overline{Z_B}$
--	---	-------------------------------------

التمرين -3-

عين الطويلة لكل من الأعداد المركبة التالية:

$Z_4 = i\sqrt{2}$	$Z_3 = 2$	$Z_2 = 1-i\sqrt{3}$	$Z_1 = 2+i$
$\frac{Z_3}{Z_2} \times Z_4^3$	Z_2^3	$\frac{Z_1}{Z_2}$	$Z_1 \times Z_2$

التمرين -4-

عين عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية:

$Z_4 = -2-2i$	$Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$Z_1 = 1+i$
$Z_8 = Z_6^3$	$Z_7 = \frac{Z_5}{Z_2}$	$Z_6 = Z_1 \times Z_2$	$Z_5 = 2i$

التمرين -5-

1. اكتب على الشكل المثلثي ثم الأسّي الأعداد المركبة التالية:

$Z_3 = Z_1^3$	$Z_2 = -\sqrt{3}i$	$Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
---------------	--------------------	------------------------------

2. اكتب على الشكل الجبري:

$\bullet Z_3 = 3\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$	$\bullet Z_2 = 4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$	$\bullet Z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
$\bullet Z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\bullet Z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\bullet Z_4 = 8\left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right)$

التمرين -6-

حل في C المعادلات ثم اكتب الحلول على الشكل الجبري:

(4) $\bullet \frac{z+2i}{z-i} = i$	(2) $\bullet \frac{2}{3z-i} = 3+2i$	(1) $\bullet (2+i)z = 7-i$
(6) $\bullet z^2 - 2z + 1 = 0$	(3) $\bullet (2-i)\bar{z} = 3-i$	(5) $\bullet z^2 - 2z - 3 = 0$
	(8) $\bullet z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0 \quad \alpha \in]0; \pi[$	(7) $\bullet z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$

التمرين -7-

 $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ كثير حدود في مجموعة الأعداد المركبة حيث:1. احسب $P(-1)$.

2. عين الأعداد الحقيقية a, b و c حيث $P(z) = (z+1)(az^2+bz+c)$

3. حل في C المعادلة: $P(z) = 0$.

التمرين -8-

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B و M التي لواحقتها على

$$\text{الترتيب: } Z_A = 1+i, Z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

1. عين عمدة لكل من Z_A^n و Z_B^n

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: Z_A^n حقيقيا، Z_B^n تخيليا صرفا.

التمرين -9-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C و I التي لواحقتها على الترتيب

$$Z_I = -1, Z_C = Z_B - 4, Z_B = \overline{Z_A}, Z_A = 1+2i$$

1. اكتب الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2. بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I يطلب تحديد نصف قطرها.

3. عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $BADC$ متوازي أضلاع.

4. استنتج بدقة طبيعة الرباعي $BADC$.

عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 2); (B; -1); (C; 2)\}$.

التمرين -10-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C ذات اللواحق $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ،

$$Z_C = 1-i\sqrt{3}, Z_B = 2-i$$

1. اوجد العبارة المركبة للانسحاب t الذي شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة Z_A .

2. اوجد العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران

R . • استنتج طبيعة المثلث BAD

3. اوجد العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A ونسبته -2 ثم عين Z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بتحاكي h .

ماذا تستنتج بالنسبة للشعاعين $\vec{AC}$ و $\vec{AE}$ والنقط A, C, E .

التمرين -11-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقطتين A, B ، ذات اللاحقتين

$$Z_A = 1+i, Z_B = 3i \text{ على الترتيب.}$$

ليكن F التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = 2iZ + 6 + 3i$$

1. ما هي طبيعة التحويل F ، حدد عناصره المميزة.

2. عين Z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل F .

استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين -12-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقطتين A, B, C و D ذات اللواحق

$$Z_A = 1, Z_B = 2i, Z_C = -1-i, Z_D = -3-3i \text{ على الترتيب.}$$

1. ما هي طبيعة التحويل الذي مركزه A ويحول B إلى C .

2. ما هي طبيعة التحويل الذي يحول A إلى B ويحول B إلى D ، ثم جد عبارته المركبة.

التمرين -13-

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقطتين A, B, C و D ذات اللواحق

$$z_A = 1+i, Z_B = -\sqrt{2}-2i, Z_C = 2i, Z_D = 2 \text{ على الترتيب.}$$

عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق:

$ z + \sqrt{2} + i = z - 1 - i \bullet 3$	$ iz - 1 + i = 5 \bullet 2$	$ z - 1 - i = 3 \bullet 1$
$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{3} + k\pi \bullet 5$	$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \bullet 6$	$\left \frac{z + \sqrt{2} + i}{z - 1 - i} \right = 1 \bullet 4$
$\arg\left(\frac{z - 2}{z + 3 + i}\right) = k\pi \bullet 9$	$z = 1 + i + 3e^{i\theta} \bullet 8$ حيث θ متغير على $\mathbb{R}$	$z = 1 + i + ke^{i\frac{\pi}{4}} \bullet 7$ حيث k متغير على $\mathbb{R}^*$
$\arg\left(\frac{z - 2i}{z + \sqrt{2} + 2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \bullet 12$	$\arg\left(\frac{z - 2}{z + 3 + i}\right) = \pi + 2k\pi \bullet 11$	$\arg\left(\frac{z - 2}{z + 3 + i}\right) = 2k\pi \bullet 10$

التمرين 14-

(I) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $(z - 2i)(Z^2 - 6Z + 13) = 0$ (I) المعرفة كما يلي :
• حل في C المعادلة (I).

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$$Z_C = -2e^{i(-\frac{\pi}{2})}, Z_B = \overline{Z_A}, Z_A = 3 - 2i$$

1. اكتب Z_C على الشكل الأسّي ثم على الشكل الجبري .
2. عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع . ثم عين طبيعته بدقة .
3. ا- عين Z_W لاحقة النقطة W مركز الرباعي $ABCD$ و Z_E لاحقة النقطة E منتصف القطعة $[AB]$.
ب. أحسب $\frac{Z_W - Z_E}{Z_B - Z_E}$ ثم استنتج طبيعة المثلث EBW .

4. أكتب العدد المركب $\frac{Z_E}{Z_E - Z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه E و يحول B إلى O يطلب تعيين عناصره المميزة .

5. عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 16$.

التمرين 15-

(I) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $Z^3 - 3\sqrt{3}Z^2 + 7Z - 2\sqrt{3} = 0$ (I) المعرفة كما يلي :
• تحقق أن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I) ثم حل في C المعادلة (I).

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$$Z_C = \overline{Z_A}, Z_B = 4Z_A + 2i, Z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

1. اكتب كل من Z_C و Z_A على الشكل الأسّي .
2. أثبت أن Z_C^{2019} تخيلي صرف و أن $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}$ حقيقي
3. أكتب العدد المركب $\frac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث AOC .
4. عين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^n$ حقيقي.
5. عين طبيعة التحويل الذي مركزه B و يحول A إلى C . (لا يطلب تعيين عناصره المميزة) .
6. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{Z - Z_A}{Z}$ تخيليا صرفا ($Z \neq 0$) .

التمرين -16-

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A و w نقط لواحقها

$$Z_A = i, Z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}, Z_C = -1 + i\sqrt{3}, Z_D = \overline{Z_C}, Z_w = 2 + 2i \text{ على الترتيب.}$$

1. عين Z_I لاحقة النقطة I منتصف $[CD]$.

2. أكتب العدد $\frac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABI .

3. أوجد العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

4. ماهي طبيعة التحويل F الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D محددا نسبته.

5. ما هي طبيعة التحويل $F \circ R$ محددا نسبته و زاويته.

6. ليكن F التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$$Z' = \frac{1}{2}iZ + 3 + i$$

• ما هي طبيعة التحويل S ، حدد عناصره المميزة.

• عين $Z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحويل S .

7. عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث يكون $z = -i + 2e^{i\theta}$ ، حيث θ متغير على $\mathbb{R}$.

• عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

أنشئ (Γ) و (Γ') .

التمرين -17-

I حل في C المعادلة ذات المجهول Z التالية : $(z - i)(Z^2 - 4Z + 5) = 0$

II المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$$Z_A = i, Z_B = 2 - i, Z_C = 2 + i$$

1. اكتب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2. من اجل كل عدد مركب Z يختلف عن $2 + i$: $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

أ- عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق $|f(z)| = \frac{1}{2}$

ب- بين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.

3. نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين Z_D لاحقة D صورة A بالدوران r بين أن النقط D, A, C على استقامة واحدة.

ب- استنتج أن D صورة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة.

التمرين -18-

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$$Z_C = -2Z_A, Z_B = \overline{Z_A}, Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

1- أ- اكتب Z_A على الشكل الأسّي.

ب- احسب العدد $\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{\overline{Z_A}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2- T الانسحاب الذي يحول A الى C

ا- عين Z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T .

3- اكتب $Z_C - Z_A$ على الشكل الاسي .

4- جد قيم العدد الطبيعي التي من اجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C - Z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5- لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها Z حيث M تختلف عن A و C .

-عين (E) مجموعة النقط M التي من اجلها $\frac{Z_A - Z}{Z_C - Z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

حل التمارين

حل التمرين -1-

$$\bullet Z_2 = 2(2+i)(3-4i) = (4+2i)(3-4i)$$

$$= 12 - 16i + 6i - 8i^2 = 12 - 16i + 6i + 8 = 20 - 10i$$

$$\bullet Z_1 = (2+3i) + 5(3-4i) = 2+3i+15-20i = 17-17i$$

$$\bullet Z_3 = (2+3i)^2 - (3-4i) = 4-9+12i-3+4i = -8+16i$$

$$\bullet Z_4 = \frac{3-i}{3-2i} - \frac{2-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(3-2i)(1-i)} - \frac{(2-i)(3-2i)}{(1-i)(3-2i)}$$

$$= \frac{3-3i-i-1-6+4i+3i+2}{3-3i-2i-2} = \frac{-2+3i}{1-5i}$$

نقوم بضرب البسط و المقام في مرافق المقام أي في $1+5i$ نجد :

$$\bullet Z_4 = \frac{-2+3i}{1-5i} = \frac{(-2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{-2-10i+3i-15}{1+25}$$

$$= \frac{-17-7i}{26} = -\frac{17}{26} - \frac{7}{26}i$$

$$\bullet Z_5 = \frac{\sqrt{2}-i}{1-i} \quad \text{نقوم بضرب البسط و المقام في مرافق المقام أي في } 1+i \text{ نجد :}$$

$$\bullet Z_5 = \frac{(\sqrt{2}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i+1}{1+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}i$$

$$\bullet Z_6 = \frac{\sqrt{3}+2i\sqrt{2}}{i} \quad \text{نقوم بضرب البسط و المقام في مرافق المقام أي في } i \text{ نجد :}$$

حل التمرين -2-

تعيين مرافق الأعداد المركبة:

$$\overline{Z_4} = 2i, \bullet \overline{Z_1} = \overline{2-i} = 2+i, \bullet \overline{Z_2} = \overline{\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)i} = \sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)i, \bullet \overline{Z_3} = 3$$

(2) كتابة الأعداد المركبة على الشكل الجبري:

$$\bullet 2\overline{Z_A} - 3\overline{Z_B} = 2\overline{(2+i)} - 3\overline{(1-i)} = 2(2-i) - 3(1+i) = 4-2i-3-3i = 1-5i$$

$$\bullet i\overline{Z_A} - \overline{Z_B} - \overline{Z_A} = i\overline{(2+i)} - \overline{(1-i)} - \overline{(2-i)} = (2i-1-1+i) - (2+i)$$

$$= (-2+3i) - 2-i = -2-3i-2-i = -4-5i$$

$$\bullet i(\overline{Z_A} + 3i) - \overline{Z_B} - \overline{Z_A} = i(2+i+3i) - (1+i) - (2-i)(1-i)$$

$$= -5+i-1-3i = -5-i-(1+3i) = -6-4i$$

حل التمرين -3-

تعيين طويلة الأعداد المركبة:

$$\bullet |Z_2| = |1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \bullet |Z_4| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2} \quad \bullet |Z_1| = |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \quad \bullet |Z_3| = 2$$

$$\bullet |Z_2^3| = |Z_2|^3 = 2^3 = 8 \quad \bullet \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \bullet |Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2| = 2\sqrt{5}$$

$$\bullet \left| \frac{Z_3 \times Z_4^3}{Z_2} \right| = \frac{|Z_3|}{|Z_2|} \times |Z_4|^3 = \frac{2}{2} \times \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$$

حل التمرين -4-

تعيين عمدة للأعداد المركبة:

$$r = |Z_1| = |1+i| = \sqrt{2} : Z_1 \text{ عمدة } \theta_1 \text{ لتكن } \bullet Z_1 = 1+i$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{لدينا } \cos \theta_1 = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin \theta_1 = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ منه}$$

$$r = |Z_2| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = 1 : Z_2 \text{ عمدة } \theta_2 \text{ لتكن } \bullet Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\boxed{\theta_2 = -\frac{\pi}{6}} \text{ لدينا } \cos \theta_2 = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \sin \theta_2 = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$r = |Z_3| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1 : Z_3 \text{ عمدة لـ } Z_3. \text{ نقوم بحساب طولية } Z_3 : Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\boxed{\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} \text{ لدينا } \cos \theta_3 = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \text{ و } \sin \theta_3 = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = |Z_4| = |-2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} : Z_4 \text{ عمدة لـ } Z_4. \text{ نقوم بحساب طولية } Z_4 : Z_4 = -2 - 2i$$

$$\boxed{\theta_4 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}} \text{ لدينا } \cos \theta_4 = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin \theta_4 = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\theta_5 = \frac{\pi}{2}} \text{ لدينا } Z_5 \text{ عمدة لـ } Z_5. \text{ لنكن } Z_5 = 2i \text{ ونجرب التخيلي موجب ومنه } \theta_5 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\theta_6 = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}} \text{ لنكن } Z_6 = Z_1 \times Z_2 \text{ عمدة عمدة لـ } Z_6.$$

$$\boxed{\theta_7 = \theta_5 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}} \text{ لنكن } Z_7 = \frac{Z_5}{Z_2} \text{ عمدة عمدة لـ } Z_7.$$

$$\boxed{\theta_8 = 3 \times \theta_6 = 3 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}} \text{ لنكن } Z_8 = Z_6^3 \text{ عمدة عمدة لـ } Z_8.$$

حل التمرين 5-

1) الكتابة على الشكل المثلثي و الأسى :

$$Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \text{ نعين } \theta \text{ و } r \text{ طولية عمدة } Z_1 \text{ على الترتيب } r = 2 \text{ و } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ وشكله الأسى هو } Z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_2 = -\sqrt{3}i \text{ نعين } \theta \text{ و } r \text{ طولية عمدة } Z_2 \text{ على الترتيب } r = \sqrt{3} \text{ و } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bullet Z_1 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ وشكله الأسى هو } Z_1 = \sqrt{3} \left(\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bullet Z_3 = Z_1^3 \text{ نطبق دستور موافر .}$$

$$\bullet Z_3 = 2^3 \times \left(\cos 3 \times \frac{\pi}{4} + i \sin 3 \times \frac{\pi}{4} \right) = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\bullet Z_1 = 2^3 e^{i \left(3 \times \frac{\pi}{4} \right)} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ وشكله الأسى هو}$$

2) الكتابة على الشكل الجبري:

$$\bullet Z_1 = 2 \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\bullet Z_2 = 4 \left(\cos \frac{6\pi - \pi}{6} + i \sin \frac{6\pi - \pi}{6} \right) = 4 \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

نعلم أن $\cos(\pi - x) = -\cos x$ و $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ و منه :

$$\bullet Z_2 = 4 \left(\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{1}{2}} \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$\bullet Z_3 = 3 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 3 \left(\cos \frac{3\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{3\pi + \pi}{3} \right) \\ = 3 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

نعلم أن $\cos(\pi + x) = -\cos x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ و منه :

$$\bullet Z_3 = 3 \left(\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} - i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = 3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\bullet Z_4 = 8 \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4 - 4i\sqrt{3}$$

$$\bullet Z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\bullet Z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \right) = 2i$$

حل التمرين -6-

1. المعادلة $(2+i)z = 7-i$ تعني $z = \frac{7-i}{2+i}$ نضرب و نقسم على مرافق المقام لكتابة الحل على الشكل الجبري :

$$\boxed{z = \frac{13}{5} - \frac{9}{5}i} : \text{ إذن } z = \frac{(7-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{14-7i-2i-1}{2^2+1^2} = \frac{13}{5} - \frac{9}{5}i$$

2. المعادلة $\frac{2}{3z-i} = 3+2i$ مع $z \neq \frac{i}{3}$ تعني $(3z-i)(3+2i) = 2$ و منه $(3z-i)(3+2i) - i(3+2i) = 2$ و منه $3z(3+2i) = 3i$

منه $z(3+2i) = i$ و منه $z = \frac{i}{3+2i}$ ، نضرب و نقسم على مرافق المقام لكتابة الحل على الشكل الجبري :

$$\boxed{z = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i} : \text{ إذن } z = \frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

3. المعادلة $(2-i)\bar{z} = 3-i$ تعني $\bar{z} = \frac{3-i}{2-i}$ ، نضرب و نقسم على مرافق المقام نجد : $\bar{z} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$

$$\boxed{z = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i} : \text{ و منه } z = \overline{\bar{z}} = \overline{\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

4. $2z + \bar{z} = 1-i$ نضع $z = x+yi$ فيكون $\bar{z} = x-yi$ و بالتعويض في المعادلة نجد :

$2(x+yi) + (x-yi) = 1-i$ و منه $2x+2yi+x-yi=1-i$ و منه $(y+1)i+3x-1=0$ هذه المعادلة تعني :

$$\boxed{z = \frac{1}{3} - i} \text{ هو حل المعادلة 4} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} y+1=0 \\ 3x-1=0 \end{cases}$$

$$z' = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ و } z = \frac{2-4}{2} = -1 : \text{المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما : } \Delta = 4+12=16 > 0, z^2-2z-3=0 \bullet 5$$

$$z = \frac{2}{2} = 1 : \text{المعادلة تقبل حلا حقيقيا و حيدا هو : } \Delta = 4-4=0, z^2-2z+1=0 \bullet 6$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i : \text{المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : } \Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 = -1 < 0, z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \bullet 7$$

$$z' = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و}$$

$$\alpha \in]0; \pi[, z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0 \bullet 8$$

$$\Delta = (2 \cos \alpha)^2 - 4 = 4 \cos^2 \alpha - 4 = 4(\cos^2 \alpha - 1) \text{ نعلم أن } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ ومنه } \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$$

$$\Delta = 4(-\sin^2 \alpha) = -4 \sin^2 \alpha < 0$$

$$z = \frac{2 \cos \alpha - i\sqrt{-4 \sin^2 \alpha}}{2} = \cos \alpha - i \sin \alpha : \text{المعادلة (8) تقبل حلين مركبين مترافقين هما :}$$

$$z' = \frac{2 \cos \alpha + i\sqrt{-4 \sin^2 \alpha}}{2} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

حل التمرين -7-

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0 : \text{حساب (1) p(-1)}$$

(2) تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c :

$$(z+1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$$

$$= az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$$

$$P(z) = (z+1)(z^2-4z+7) \text{ يكون } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=7 \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} a=1 \\ b+a=-3 \\ c=7 \end{cases}$$

(3) حل في C المعادلة p(z)=0 :

$$P(z) = 0 \text{ المعادلة } (z+1)(z^2-4z+7)=0 \text{ تعني } z+1=0 \text{ أي } \boxed{z=-1}$$

$$z' = \frac{4-i\sqrt{12}}{2} = 2-i\sqrt{3} : \text{المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : } \Delta = 16-28=-12 < 0, z^2-4z+7=0 \text{ أو}$$

$$z'' = \frac{4+i\sqrt{12}}{2} = 2+i\sqrt{3}$$

حل التمرين -8-

$$\text{(1) تعيين عمدة لكل من } Z_A^n \text{ و } \left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$$

$$\bullet \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n = n \times \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = n \times \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = n \times [\arg(Z_B) - \arg(Z_A)]$$

$$\bullet \arg(Z_A^n) = n \times \arg(Z_A) = n \times \frac{\pi}{4}$$

$$= n\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{n\pi}{12}$$

(2) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحث يكون: Z_A^n حقيقيا:

Z_A^n حقيقي معناه $\arg(Z_A^n) = k\pi$ أي $n\frac{\pi}{4} = k\pi$ و منه $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا :

• Z_B^n تخيلي صرف معناه: $\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي $\frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و منه $n = 12k + 6$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين -9-

① الكتابة على الشكل الجبري لـ $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$:

$$\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{Z_B - 4 - Z_B}{1 + 2i - 1 + 2i} = \frac{-4}{4i} = \frac{-1}{i} = \frac{-1(-i)}{i(-i)} = i$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = i$ و منه: $\begin{cases} \left| \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} BC = BA \\ \left(\vec{BA}; \vec{BC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ و منه المثلث BCA قائم

في B و متساوي الساقين .

② بين أن النقاط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة:

طريقة 1 :

لدينا : $|Z_A - Z_I| = |Z_A - Z_I| = |Z_A - Z_I| = 2\sqrt{2}$ و منه $IA = IB = IC = 2\sqrt{2}$.

و منه فإن النقاط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$.

طريقة 2 :

بما أن المثلث BCA قائم فإن النقاط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها منتصف الوتر و نصف قطرها r نصف طول الوتر .

لاحقة منتصف الوتر: $Z_I = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{1 + 2i - 3 - 2i}{2} = -1 = Z_I$ إذن مركز الدائرة هو النقطة I .

نصف قطر الدائرة: $r = IA = |Z_A - Z_I| = |1 + 2i + 1| = 2\sqrt{2}$.

③ تعيين Z_D حتى يكون الرباعي $BADC$ متوازي أضلاع :

$BADC$ متوازي أضلاع معناه: $Z_B - Z_C = Z_A - Z_D$ و منه $Z_D = Z_A - Z_B + Z_C = 1 + 2i - 1 + 2i - 3 - 2i$ و منه

$$Z_D = -3 + 2i$$

④ استنتج بدقة طبيعة الرباعي $BADC$:

بما أن الرباعي $BADC$ متوازي أضلاع و لدينا مما سبق: $BC = BA$ و $\left(\vec{BA}; \vec{BC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

(أي لدينا متوازي أضلاع و فيه ضلعان متعاقدان متقايسان و حاملهما متعامدان)

إذن الرباعي $BADC$ مربع .

تعيين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة:

لدينا $2 - 1 + 2 + 3 \neq 0$ و منه G موجود و وحيد .

$$Z_G = \frac{2Z_A - Z_B + 2Z_C}{3} = Z_G = \frac{2(1 + 2i) - (1 - 2i) + 2(-3 - 2i)}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$$

حل التمرين -10-

① العبرة المركبة للانسحاب t :

العبرة المركبة للانسحاب t من الشكل: $Z' = Z + b$ حيث b هو لاحقة شعاع الانسحاب $\vec{v}$ أي $b = Z_A$ و منه العبرة

$$Z' = Z + 2i$$

② العبرة المركبة للدوران R :

العبرة المركبة للدوران R من الشكل : $Z' = aZ + b$ حيث a هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له ، و منه $a = i$.

النقطة B هي مركز R : $Z_B = \frac{b}{1-a}$ و منه $b = Z_B(1-a) = (2-i)(1-i) = 1-3i$.

إذن العبارة المركبة لـ R : $Z' = iZ + 1 - 3i$

• بعد إيجاد a يمكن استعمال الصيغة المختصرة مباشرة و إيجاد العبارة المركبة دون حساب b :

$Z' - Z_B = i(Z - Z_B)$ و منه $Z' = i(Z - Z_B) + Z_B = i(Z - 2 + i) + 2 - i = iZ - 2i - 1 + 2 - i = iZ - 2i - 1 + 2 - i$ و منه $Z' = iZ + 1 - 3i$.
 تعيين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالدوران R :

$$\boxed{Z_D = -1 - 3i} \quad \text{إذن} \quad Z_D = iZ_A + 1 - 3i = i \times 2i + 1 - 3i = -1 - 3i$$

استنتاج طبيعة المثلث BAD :

بما أن الدوران R مركزه B و يحول A إلى D فإن $Z_D - Z_B = i(Z_A - Z_B)$ ومنه $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i$ ومنه:

و منه:
$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$
 إذن المثلث BAD قائم في B و متساوي الساقين .

③ العبارة المركبة للتحاكى h الذي مركزه A ونسبته 2- :

الصيغة المختصرة للتحاكي هي الذي مركزه A هي : $Z' - Z_A = k(Z - Z_A)$ حيث : $k = -2$ و منه $Z' = -2Z + 3Z_A$ و منه $Z' - Z_A = -2(Z - Z_A) + Z_A$

إذن العبارة المركبة للتحاكى h هي : $Z' = -2Z + 6i$

تعيين Z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالدوران h :

$$Z_E = -2 + (6 + \sqrt{3})i, \quad Z_F = -2Z_C + 6i = -2(1 - i\sqrt{3}) + 6i = -2 + (6 + i\sqrt{3})$$

الاستنتاج :

بما أن الدوران h مركزه A و يحول C إلى E فإن $Z_E - Z_A = -2(Z_C - Z_A)$ ومنه $\vec{AE} = -2\vec{AC}$ إذن الشعاعين $\vec{AC}$ و $\vec{AE}$ مرتبطين خطياً و النقط E, C, A على استقامة واحدة.

حل التمرين -11-

① طبيعة التحويل F :

التحويل F من الشكل: $Z' = aZ + b$. حيث $a = 2i \in C - \mathbb{R}$ و $|a| = 2 \neq 1$.
اذن التحويل النقطي F هو تشابه مباشر.

① العناصر المميزة للتحويل F :

• نسبة التشابه المباشر هي $|a|=2$. زاويته $\arg(a)=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$

لاحقة المركز هي $3i = Z_B$ إذن مركز التشابه هو النقطة B .

تعيين Z_c لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل F :

$$Z_C = 4 + 5i \text{ منه } Z_C = 2iZ_A + 6 + 3i = 2i(1+i) + 6 + 3i$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

بما أن التشابه المباشر F مركزه B و يحول A إلى C فإن $Z_C - Z_B = 2i(Z_A - Z_B)$ ومنه $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i$ ومنه

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = 2 \neq 1 \\ \arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ ومنه: } \left\{ \begin{array}{l} BC \neq BA \\ \left(\vec{BA}; \vec{BC} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \text{ إذن المثلث } ABC \text{ قائم في } B.$$

حل التمرين -12-**(1) طبيعة التحويل الذي مركزه A و يحول B إلى C :**

التحويل الذي مركزه A و يحول B إلى C معناه $Z_C - Z_A = a(Z_B - Z_A)$ ومنه $a = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ومنه $a = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ومنه

$$a = \frac{-1-i-1}{2i-1} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = i$$

$a = i \in C - \mathbb{R}$ و $|a| = |i| = 1$. إذن التحويل دوران .

(2) طبيعة التحويل الذي يحول A إلى B و يحول B إلى D:

التحويل الذي يحول A إلى B و يحول B إلى D معناه : $\begin{cases} Z_B = aZ_A + b \dots (1) \\ Z_D = aZ_B + b \dots (2) \end{cases}$ بضرب المعادلة (2) في -1 ثم الجمع

$$a = \frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{2i+3-3i}{1-2i} = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 1+i \text{ ومنه } Z_B - Z_D = a(Z_A - Z_B)$$

$a = 1+i \in C - \mathbb{R}$ و $|a| = \sqrt{2} \neq 1$. إذن التحويل تشابه مباشر .

إيجاد عبارته المركبة:

العبرة المركبة للتشابه المباشر من الشكل: $Z' = aZ + b$. حيث $a = 1+i$.

نعوض قيمة a في إحدى المعادلتين لإيجاد b :

$$b = Z_B - aZ_A = 2i - (1+i) \times 1 = -1+i \text{ ومنه } Z_B = aZ_A + b \dots (1)$$

ومن العبرة المركبة للتشابه المباشر هي: $\boxed{Z' = (1+i)Z - 1+i}$.

حل التمرين -13-

1. $|z-1-i| = 3$ و $|z-(1+i)| = 3$ معناه $OA = 3$. مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r = 3$.

2. $|iz+1-i| = 5$ و $|iz-(-1+i)| = 5$ و $\left| i \left(z - \left(\frac{-1+i}{i} \right) \right) \right| = 5$ و $|i||z-(1+i)| = 5$ و $|z-z_A| = 5$ معناه

$OA = 5$. مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r = 5$.

3. $|z+\sqrt{2}+i| = |z-1-i|$ و $|z-(-\sqrt{2}-i)| = |z-(1+i)|$ و $|z-z_B| = |z-z_A|$ معناه $OB = OA$. مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$.

4. $\left| \frac{z+\sqrt{2}+i}{z-1-i} \right| = 1$ و $|z+\sqrt{2}+i| = |z-1-i|$ و $|z-(-\sqrt{2}-i)| = |z-(1+i)|$ و $|z-z_B| = |z-z_A|$ معناه

$OB = OA$. مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$.

$$\bullet 5 \arg(z-2i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z-z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ معناه } \left(\vec{u}; \vec{MC} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

نصف المستقيم الذي يشمل C باستثناء النقطة C حيث $\left(\vec{u}; \vec{MC} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\bullet 6 \arg(z-2i) = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ومنه } \arg(z-z_C) = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ معناه } \left(\vec{u}; \vec{MC} \right) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

المستقيم الذي يشمل C باستثناء النقطة C حيث $\left(\vec{u}; \vec{MC} \right) = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

$$\left(\vec{u}; \vec{OA}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ معناه } z - z_A = ke^{i\frac{\pi}{4}} \text{ منه } z - (1+i) = ke^{i\frac{\pi}{4}} \text{ منه } z = 1+i + ke^{i\frac{\pi}{4}} \bullet 7$$

$$\left(\vec{u}; \vec{MA}\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ حيث } A \text{ باستثناء النقطة } A \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي المستقيم الذي يشمل } A$$

$$OA = 3 \text{ معناه } |z - z_A| = 3 \text{ منه } z - z_A = 3e^{i\theta} \text{ منه } z - (1+i) = 3e^{i\theta} \text{ منه } z = 1+i + 3e^{i\theta} \bullet 8$$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r=3$.

$$\left(\vec{OA}; \vec{OD}\right) = k\pi \text{ معناه } \arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_A}\right) = k\pi \text{ و } \arg\left(\frac{z-2}{z-(1+i)}\right) = k\pi \text{ منه } \arg\left(\frac{z-2}{z-1-i}\right) = k\pi \bullet 9$$

مجموعة النقط M هي المستقيم (AD) باستثناء A و D .

$$\left(\vec{OA}; \vec{OD}\right) = 2k\pi \text{ معناه } \arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_A}\right) = 2k\pi \text{ و } \arg\left(\frac{z-2}{z-(1+i)}\right) = 2k\pi \text{ منه } \arg\left(\frac{z-2}{z+3+i}\right) = 2k\pi \bullet 10$$

النقط M هي المستقيم (AD) باستثناء القطعة $[AD]$.

$$\left(\vec{OA}; \vec{OD}\right) = \pi + 2k\pi \text{ معناه } \arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_A}\right) = \pi + 2k\pi \text{ و } \arg\left(\frac{z-2}{z-(1+i)}\right) = \pi + 2k\pi \text{ منه } \arg\left(\frac{z-2}{z+3+i}\right) = \pi + 2k\pi \bullet 11$$

مجموعة النقط M هي القطعة $[AD]$ باستثناء A و D .

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ منه } \arg\left(\frac{z-2i}{z-(-\sqrt{2}-2i)}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } \arg\left(\frac{z-2i}{z+\sqrt{2}+2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \bullet 12$$

$$\left(\vec{OB}; \vec{OC}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ معناه } \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي دائرة قطرها } [BC] \text{ باستثناء } B \text{ و } C$$

حل التمرين 14-

(I) حل في C المعادلة (I) :

المعادلة (I) تعني $(z-2i)=0$ و منه $z=2i$ أو $(*) Z^2 - 6Z + 13 = 0$ ، $\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 = (4i)^2$ ، للمعادلة (*)

$$\text{حلان هما : } z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i \text{ و } z_2 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i \text{ إذن } S = \{2i; 3-2i; 3+2i\}$$

(1) كتابة Z_C على الشكل الأسى ثم على الشكل الجبري:

$$Z_C = -2e^{i(-\frac{\pi}{2})} = i^2 \times 2e^{i(-\frac{\pi}{2})} = e^{i\pi} \times 2e^{i(-\frac{\pi}{2})} = 2e^{i(\pi-\frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

الشكل الجبري :

$$z_c = 2e^{i\frac{\pi}{2}} + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i) = 2i$$

(2) عين Z_D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه : $\vec{AB} = \vec{DC}$ أي $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ و منه

$$\boxed{Z_D = -2i} \text{ و منه } Z_D = Z_A - Z_B + Z_C = 3-2i-3-2i+2i = -2i$$

تعيين طبيعته بدقة :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \neq AD \\ \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ و منه } \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A} = \frac{3+2i-3+2i}{-2i-3+2i} = -\frac{4}{3}i$$

(3) أ- عين Z_W لاحقة النقطة W مركز الرباعي $ABCD$:

$$Z_W = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3-2i+2i}{2} = \frac{3}{2}$$

Z_E لاحقة النقطة E منتصف القطعة $[AB]$:

$$Z_E = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{3-2i+3+2i}{2} = 3$$

ب- حساب $\frac{Z_W - Z_E}{Z_B - Z_E}$ ثم استنتج طبيعة المثلث WEB:

$$\frac{Z_W - Z_E}{Z_B - Z_E} = \frac{\frac{3}{2} - 3}{3 + 2i - 3} = \frac{3}{4}i \begin{cases} EB \neq EW \\ (\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{EW}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \leftarrow k \in \mathbb{Z}$$

المثلث WEB قائم في E.

④ كتابة العدد $\frac{Z_E}{Z_E - Z_B}$ المركب على الشكل الأسى:

$$\frac{Z_E}{Z_E - Z_B} = \frac{3}{3 - 3 - 2i} = \frac{3}{-2i} = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه E و يحول B إلى O:

$$\text{لدينا: } \frac{Z_E}{Z_E - Z_B} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ أي } \frac{Z_E}{Z_E - Z_B} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (Z_B - Z_E)$$

$$\frac{Z_E}{Z_E - Z_B} \in C - R \text{ و } \left| \frac{Z_E}{Z_E - Z_B} \right| \neq 1 \text{ إذن يوجد تشابه مباشر مركزه E و يحول B إلى O زاويته } \frac{\pi}{2} \text{ و نسبته } \frac{3}{2}.$$

⑤ تعيين مجموعة النقط M بحيث: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 16$:

W مركز الرباعي ABCD إذن W مرجح النقط بمعاملات متساوية . و عليه :

$$\|4\overrightarrow{MW}\| = 16 \text{ و منه } \|4\overrightarrow{MW}\| = 16 \text{ و منه } MW = 4$$

المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها W و نصف قطرها r=4.

حل التمرين -15-

التحقق أن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I) :

$$(2\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}(2\sqrt{3})^2 + 7 \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 36\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

إذن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I).

حل في C للمعادلة (I):

بما أن $Z_0 = 2\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I). فإن المعادلة (I) تكتب من الشكل $(Z - 2\sqrt{3})(aZ^2 + bZ + c) = 0$

$$\text{حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية. بعد النشر و المطابقة نجد: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases} \text{ و تكون المعادلة (I) كالتالي}$$

$$(Z - 2\sqrt{3})(Z^2 - \sqrt{3}Z + 1) = 0 \text{ و هذه المعادلة تعني إما } Z - 2\sqrt{3} = 0 \text{ و منه } Z_0 = 2\sqrt{3} \text{ أو } Z^2 - \sqrt{3}Z + 1 = 0$$

$$\text{مميزها } \Delta = -1 \text{ و تقبل حلين مركبين مترافقين هما } Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ . إذن}$$

$$S = \left\{ 2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

① كتابة كل من Z_A و Z_C على الشكل الأسى :

$$Z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}} : Z_A \text{ عمدة لـ } Z_A \text{ ، و } |Z_A| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = 1$$

$$Z_C = e^{i\frac{\pi}{6}} : Z_C \text{ هو مرافق } Z_A \text{ و بالتالي}$$

(2) إثبات أن Z_C^{2019} تخيلي صرف وأن $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}$ حقيقي:

لدينا : $\arg(Z_C) = \frac{\pi}{6}$ ومنه $\arg(Z_C^{2019}) = 2020 \times \arg(Z_C) = 2019 \times \frac{\pi}{6} = 673 \frac{\pi}{2} = 672 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 336\pi$

ومنه $\arg(Z_C^{2019}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ إذن Z_C^{2019} عدد تخيلي صرف .

لدينا : $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right) = \arg(Z_C) - \arg(Z_A) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019} = 2019 \times \frac{\pi}{3} = 673\pi$

ومنه $\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019} = \pi + 2k\pi$ إذن $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^{2019}$ عدد حقيقي .

(3) كتابة العدد المركب $\frac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الأسى و استنتاج طبيعة المثلث AOC:

$$\frac{Z_C}{Z_A} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{لدينا}$$

إذن المثلث AOC متقايس $\begin{cases} AO = CO \\ (\vec{OA}; \vec{OC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \left| \frac{Z_C - Z_O}{Z_A - Z_O} \right| = 1 \\ \arg \frac{Z_C - Z_O}{Z_A - Z_O} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ ومنه : الأضلاع .

(4) تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^n$ حقيقي :

$$\arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^n = n \frac{\pi}{3} \quad \text{ومنه} \quad \arg\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{لدينا}$$

ومنه n حقيقي معناه $n \frac{\pi}{3} = k\pi$ ومنه $n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

(5) تعيين طبيعة التحويل الذي مركزه B ويحول A الى C :

$$\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - 2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - 2\sqrt{3}} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-3\sqrt{3} + i}{-3\sqrt{3} - i} = \frac{13}{14} - \frac{3\sqrt{3}}{14}i \quad \text{لدينا}$$

$$\left| \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = \left| \frac{13}{14} - \frac{3\sqrt{3}}{14}i \right| = 1 \quad \text{و} \quad \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \quad \text{إذن التحويل دوران}$$

(6) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $\frac{Z - Z_A}{Z}$ تخيليا صرفا :

$$\arg\left(\frac{Z - Z_A}{Z - Z_O}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{معناه} \quad \left(\vec{MO}; \vec{MA}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

مجموعة النقط M هي دائرة قطرها [OA] باستثناء المبدأ .

حل التمرين -16-

(1) تعيين Z لاحقة النقطة I منتصف [CD]:

$$\boxed{Z_I = -1}, Z_I = \frac{Z_C + Z_D}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{2} = -1$$

② كتابة العدد $\frac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}$ على الشكل الأسى و طبيعة المثلث ABI :

$$\arg\left(\frac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } \left|\frac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}\right| = |i| = 1, \frac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I} = \frac{i+1}{-i+1} = i$$

$$\text{و } IB = IA \text{ أي } \arg\left(\frac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و منه المثلث } ABI \text{ قائم في } I \text{ و متساوي الساقين.}$$

③ إيجاد العبارة المركبة للدوران R :

العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $Z' = aZ + b$ حيث a هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له ، و منه $a = i$.

$$\text{النقطة } I \text{ هي مركز } R : Z_I = \frac{b}{1-a} \text{ و منه } b = Z_I(1-a) = -1 \times (1-i) = -1+i$$

$$\boxed{Z' = iZ - 1 + i} : R \text{ إذن العبارة المركبة لـ}$$

④ طبيعة التحويل F :

التحويل الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D معناه : $\begin{cases} Z_C = aZ_A + b \dots (1) \\ Z_D = aZ_B + b \dots (2) \end{cases}$ بضرب المعادلة (2) في -1 ثم الجمع

$$a = \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3}}{i + i} = \frac{2i\sqrt{3}}{2i} = \sqrt{3} \text{ و } Z_C - Z_D = a(Z_A - Z_B) \text{ نجد}$$

$$a = \sqrt{3} \in \mathbb{R}^* - \{1\} \text{ . إذن التحويل } F \text{ تحاكي نسبته } \sqrt{3}.$$

إيجاد عبارته المركبة :

العبارة المركبة للتشابه المباشر من الشكل : $Z' = aZ + b$ حيث $a = \sqrt{3}$.

نعوض قيمة a في إحدى المعادلتين لإيجاد b :

$$\text{لدينا } b = Z_C - aZ_A = -1 + i\sqrt{3} - (\sqrt{3}) \times i = -1 \text{ و } Z_C = aZ_A + b \dots (1)$$

$$\text{و منه العبارة المركبة للتحاكي هي : } \boxed{Z' = \sqrt{3}Z - 1}$$

⑤ طبيعة التحويل FoR :

التحويل FoR هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

⑥ طبيعة التحويل S :

التحويل S من الشكل : $Z' = aZ + b$ حيث $a = 3i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $|a| = 3 \neq 1$.

إذن التحويل النقطي S هو تشابه مباشر .

العناصر المميزة للتحويل S :

$$\bullet \text{ نسبة التشابه المباشر هي } |a| = \frac{1}{2} \bullet \text{ زاويته } \arg(a) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{لاحقة المركز هي } Z_w = 2 + 2i = \frac{3+i}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{b}{1-a} \text{ . إذن مركز التشابه هو النقطة } w.$$

تعيين $Z_{B'}$ لاحقة النقطة B صورة النقطة B بالتحويل S :

$$\boxed{Z_{B'} = \frac{7}{2} + i} \text{ و } Z_{B'} = \frac{1}{2}iZ_B + 3 + i = \frac{1}{2}i(-i) + 3 + i$$

⑦ مجموعة النقط :

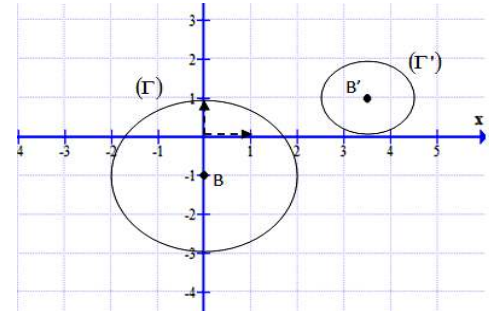
$$OB = 3 \text{ معناه } |z - z_B| = 2 \text{ و } z - z_B = 2e^{i\theta} \text{ و } z - (-i) = 2e^{i\theta} \text{ و } z = -i + 2e^{i\theta}$$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $r=2$.

تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S :

صورة (Γ) بالتحويل S هي دائرة مركزها B' و نصف قطرها $r'=2 \times \frac{1}{2} = 1$.

⑧ الانشاء:



حل التمرين -17-

I حل المعادلة :

المعادلة $(z-i)(Z^2-6Z+13)=0$ تعني إما $Z-i=0$ و منه $Z_0=i$ أو $Z^2-6Z+13=0$ مميزها $\Delta=-4$ و تقبل

حلين مركبين مترافقين هما $z_1 = \frac{4-2i}{2} = 2-i$ و $z_2 = 2+i$. إذن $S = \{i; 2-i; 2+i\}$

II كتابة $\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الأسى : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B} = \frac{2+i-i}{2+i-2+i} = \frac{2}{2i} = -i = e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\begin{cases} CB = CA \\ (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} |-i| = 1 \\ \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

اذن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

②-أ-مجموعة النقط التي تحقق $|f(Z)| = \frac{1}{2}$:

$$|f(z)| = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \left| \frac{iz-1-2i}{2z-4-2i} \right| = \frac{1}{2} \text{ ومنه } |iz-1-2i| = |2z-4-2i| \text{ ومنه } |iz-1-2i| = 2|z-2-i| \text{ ومنه } 2|iz-1-2i| = 2|z-2-i|$$

$$BM = CM \text{ معناه } |z-z_B| = |z-z_C| \text{ أي } |z-(2-i)| = |z-(2+i)| \text{ ومنه } \left| i\left(z - \frac{(1+2i)}{i}\right) \right| = |z-2-i|$$

اذن المجموعة $[E]$ هي محور القطعة $[CB]$

ب-تبين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب :

$$\begin{aligned} (f(i))^{1440} &= \left(\frac{i \times i - 1 - 2i}{2i - 4 - 2i} \right)^{1440} = \left(\frac{-2 - 2i}{-4} \right)^{1440} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{1440} \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{1440} = e^{\frac{1440\pi}{4}} = e^{i \times 360\pi} = 1 \end{aligned}$$

إذن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

(يمكن أن نكتفي بحساب عمدة العدد $[f(i)]^{1440} = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$)

③-أ-تعيين لاحقة D :

الصيغة المختصرة للدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$. من الشكل $Z_D - Z_C = a(Z_B - Z_C)$ حيث a هو العدد المركب

الذي طويلته 1 و عمدة له أي $a = i$. ومنه $Z_D - Z_C = i(Z_B - Z_C)$ ومنه

$$Z_D = i(2 - i - 2 - i) + 2 + i = i(-2i) + 2 + i = 4 + i$$

تبيين أن A ، C و D على استقامة :

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{4 + i - 2 - i}{i - 2 - i} = -1 \text{ ومنه } (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD}) = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } k \in \mathbb{Z}$$

اذن النقط D, A, C على استقامة واحدة .

ب-استنتاج أن صورة D صورة A بتحويل نقطي بسيط:

$$\text{وجدنا : } \frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = -1 \text{ ومنه } (Z_D - Z_C) = -(Z_A - Z_C)$$

إذن صورة D صورة A بتحاك مركزه C و نسبته -1 (تناظر مركزي).

حل التمرين -18-

$$Z_C = -2Z_A \quad Z_B = \overline{Z_A}, \quad Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

□ **ا-كتابة Z_A على الشكل الاسي :**

$$|Z_A| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\text{اذن : } |Z_A| = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ب-حساب العدد : } \left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2019} + \left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2019}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2019} + \left(\frac{Z_B}{2\sqrt{2}} \right)^{2019} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}} \right)^{2019} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{3})}}{2\sqrt{2}} \right)^{2019}$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{2019} + \left(e^{i(-\frac{\pi}{3})} \right)^{2019} = e^{\frac{2019\pi}{3}} + e^{i(-\frac{2019\pi}{3})}$$

$$= e^{i(673\pi)} + e^{i(-673\pi)} = e^{i(\pi)} + e^{i(-\pi)} = -1 - 1 = -2$$

□ **ا-تعين ZD لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T :**

الانسحاب T يحول A الى C معناه $Z_A - Z_C = Z_B - Z_D$

$$\text{ومنه } Z_D = Z_B - Z_A + Z_C \quad Z_D = \sqrt{2} - i\sqrt{6} - \sqrt{2} - i\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6} \quad \boxed{Z_D = -2\sqrt{2} - 4i\sqrt{6}}$$

(3) كتابة $Z_C - Z_A$ على الشكل الاسي :

$$Z_C - Z_A = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6} - \sqrt{2} - i\sqrt{6} = -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{6} = -3Z_A$$

$$|Z_C - Z_A| = 3|Z_A| = 6\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_C - Z_A) = \arg(Z_A) = \arg(-3) + \arg(Z_A) = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{اذن : } (Z_C - Z_A) = 6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\text{(4) ايجاد قيم } n \text{ حتى يكون } \left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C - Z_A} \right)^n \text{ عددا حقيقيا:}$$

$$n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = k\pi \text{ عددا حقيقيا: } \left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C - Z_A}\right)^n = \left(\frac{-6\sqrt{2}}{Z_C - Z_A}\right)^n = \left(\frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n = \left(-e^{i\left(\frac{-4\pi}{3}\right)}\right)^n$$

$$= \left(e^{i\left(\frac{-4\pi}{3} + \pi\right)}\right)^n = \left(e^{i \times n\left(\frac{-\pi}{3}\right)}\right)^n$$

و منه $n=3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

□ تعيين (E) مجموعة النقط:

$$\frac{Z_A - Z}{Z_C - Z} \text{ عدد حقيقي موجب تماما . معناه } \arg\left(\frac{Z_A - Z}{Z_C - Z}\right) = 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

المجموعة (E) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة [AC].

وفقكم الله في بكالوريا 2023

دعواتكم لموتى المسلمين بالرحمة و لمرضاهم بالشفاء