

$$B = \frac{\pi}{6}, A = \frac{5\pi}{4}$$

* التمرين رقم 04

بدون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من:

$$(1) \cos \frac{5\pi}{4} \quad (2) \sin \frac{201\pi}{4}$$

$$(2) \sin \left(-\frac{11\pi}{3}\right) \quad (4) \cos \left(-\frac{31\pi}{4}\right)$$

مبرهنة 1: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

معادلات مثلثية.

$$\cos a = \cos b \text{ معناه } a = b + 2k\pi \text{ أو } a = -b + 2k\pi$$

$$a = -b + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin a = \sin b \text{ معناه } a = b + 2k\pi \text{ أو } a = \pi - b + 2k\pi$$

$$a = \pi - b + 2k\pi$$

$$\sin x = a \text{ أو } \cos x = a \text{ المعادلات من الشكل}$$

$$\text{إذا كان } a < -1 \text{ أو } a > 1 \text{ المعادلة لا تقبل حلولاً.}$$

* التمرين رقم 05

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

$$(1) \sqrt{2} \cos x - 1 = 0 \quad (2) \sqrt{2} \cos x = -3$$

$$(3) \sin x = -\frac{1}{2} \quad (4) \sin(x) = 4$$

$$(5) \cos^2(x) - 2 \cos(x) = -1$$

* تمثل درجة الصعوبة

* التمرين رقم 01

لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن النقطتين A و B من الدائرة

$$(C) \text{ حيث } \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{12} \text{ و } \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4}$$

عين قيساً للزوايا الموجهة :

$$(1) \left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA}\right) \quad (2) \left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB}\right) \quad (3) \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$$

طريقة: إذا كان عدد حقيقي α قيساً لزاوية موجهة

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ فإنه يوجد عدد صحيح وحيد } k \text{ حيث :}$$

$$-\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi \text{ يكفي إيجاد } k$$

إنطلاقاً من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجهة $(\vec{u}, \vec{v})$

* التمرين رقم 02

أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ التي

قيسها α في كل حالة من الحالات الآتية :

$$(1) \alpha = 2021 \text{ rad}$$

$$(2) \alpha = -\frac{189\pi}{4}$$

$$(3) \alpha = \frac{65\pi}{8}$$

$$(4) \alpha = \frac{2022\pi}{8}$$

طريقة: إذا كان $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ نقول أن α' و α

قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتين متقايسيتين

* التمرين رقم 03

في كل حالة هل العدان A و B قيسان لزاوية

موجهة لشعاعين ؟

$$B = \frac{3\pi}{2}, A = -\frac{\pi}{2}$$

$$B = \frac{30\pi}{4}, A = \frac{3\pi}{4}$$

$$A = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = \tan(\pi - x) + \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot(3x)$$

دساتر التحويل المثلثية:

$$\cos(a + b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$$

التمرين رقم 09 **

عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ عن ما يلي:

$$3) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), 2) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), 1) \sqrt{2} \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$6) \cos\left(x + \frac{2\pi}{6}\right), 5) \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right), 4) \sqrt{3} \cos\left(\frac{2x + 5\pi}{10}\right)$$

التمرين رقم 10 ***

$$1-1) \text{ تحقق من أن: } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

$$2-1) \text{ احسب } \sin \frac{5\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$2) \text{ احسب } \sin \frac{7\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{7\pi}{12} \text{ بطريقتين مختلفتين}$$

$$1-3) \text{ تحقق من أن: } \frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$$

$$2-3) \text{ احسب } \sin \frac{11\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{11\pi}{12}$$

$$1-4) \text{ تحقق من أن } \frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}$$

$$2-4) \text{ تحقق من أن } \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24}$$

3-4) أثبت أن:

$$16 \times \sin \frac{\pi}{24} \times \sin \frac{5\pi}{24} \times \sin \frac{7\pi}{24} \times \sin \frac{11\pi}{24} = 1$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2 \cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) + 3 \sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

مبرهنة: في معلم مباشر متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

لتكن (C) الدائرة المثلثية. إذا كانت النقطة M غير منطبقة

على O و كانت إحداثياتها الديكارتية $(x; y)$ و إحداثياتها

القطبية (r, θ) فإن: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$

التمرين رقم 06 **

احسب الإحداثيات القطبية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها

الديكارتية:

$$A(-1; 1) \quad (1) \quad B(0; -3) \quad (2)$$

$$D(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) \quad (4) \quad C\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (3)$$

$$E(-1; \sqrt{3}) \quad (6) \quad E\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5)$$

التمرين رقم 07 *

احسب الإحداثيات الديكارتية للنقط التالية المعرفة

بإحداثياتها القطبية:

$$1) A(1; 0) \quad 2) B\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3) C\left(3; \frac{\pi}{6}\right) \quad 4) D\left(5; -\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5) E\left(2\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right) \quad 6) E\left(4; -\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$7) G\left(\frac{7}{4}; 345\pi\right) \quad 8) H\left(\frac{1}{4}; 20\pi\right)$$

نتائج: من أجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

التمرين رقم 08 **

بسط العبارة A في كل حالة مما يلي:

$$A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$$

$$A = \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + 2x)$$

$$\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = m \quad (4) \quad \text{ناقش تبعا لقيم}$$

(الوسيط الحقيقي m)

التمرين رقم 16 ***

حل في المجموعة $[0, 2\pi[$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .
في كل حالة من الحالات الآتية :

$$(1) \sin x < -\frac{1}{2} \quad (2) \sqrt{2} \sin 4x - 1 \leq 0$$

$$(3) 2 \sin 5x + \sqrt{3} \geq 0 \quad (4) \sqrt{2} \sin 4x \leq 1$$

$$(5) 2 \cos x < 1 \quad (6) \sqrt{2} \cos 3x + 2 \leq 0$$

$$(7) 2 \cos 2x - \sqrt{3} \geq 0 \quad (8) \cos 4x - \frac{1}{2} > 0$$

التمرين رقم 17 ****

لتكن العبارة $E(x)$ حيث :

$$E(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$$

(1) حل العبارة $E(x)$ إلى جداء .

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $E(x) = 0$

(3) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$$

• عين مجموعة تعريف الدالة f .

• بسط عبارة $f(x)$.

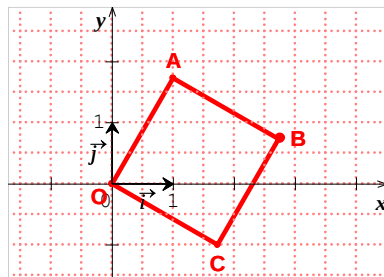
مسائل

المسألة رقم 01 ****

$(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس ومباشر

A النقطة ذات الإحداثيتين القطبيتين $(2; \frac{\pi}{3})$.

$OABC$ مربع حيث $(\vec{OA}, \vec{OC}) = -\frac{\pi}{2}$.



الهدف من التمرين حساب $\sin \frac{\pi}{12}$ ، $\cos \frac{\pi}{12}$

التمرين رقم 11 **

علما أن $\sin x = \frac{2}{3}$ و $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$

احسب $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ، $\cos(\pi - x)$ ، $\cos x$ ،

$\sin(17\pi + x)$ ، $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$

التمرين رقم 12 **

حل في المجال $[-\pi; \pi]$ المعادلة:

$$\cos 2x + 2 \sin x \cos x = 0$$

حل في المجال $[0; \pi]$ المعادلة:

$$\cos 7x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

التمرين رقم 13 ****

(1) احسب قيمة المجموع S_1 حيث

$$S_1 = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

(2) احسب قيمة المجموع S_2 حيث

$$S_2 = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

(3) x عدد حقيقي من المجال $[0; \frac{\pi}{2}]$ حيث

$$\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(أ) احسب $\cos 2x$.

(ب) استنتج قيمة x .

التمرين رقم 14 ****

عبر بدلالة $\sin x$ و $\cos x$ عن العبارات التالية:

$$A = \cos^4 x + \sin^2 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x \quad (1)$$

$$B = \cos^6 x + \sin^6 x + 3 \cos^2 x \sin^2 x \quad (2)$$

$$C = \cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x + \sin^3 x \quad (3)$$

التمرين رقم 15 ****

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x

في كل حالة من الحالات الآتية :

$$(1) \cos x + \sin x = 1$$

$$(2) \sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$$

$$(3) \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = -1$$

- (3) برهن أن المستقيم (OA) محور تناظر الخماسي ABCDE و أن مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، C ، D و E موجود على (OA).
- (4) أثبت أن المستقيم (OB) هو أيضا محور تناظر الخماسي ABCDE .
- ما هو موقع مركز ثقل الخماسي ABCDE ؟
- (5) استنتج مما سبق أن:

$$1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

(6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $4X^2 + 2X - 1 = 0$

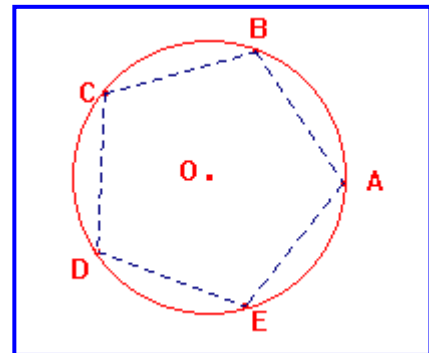
- تحقق من أن $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ هو حل لهذه المعادلة.
- استنتج قيمة العدد $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

- (1) باستعمال العلاقة : $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ ، أحسب قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$.
- (2) أحسب الإحداثيتين القطبيتين ثم الإحداثيتين الديكارتيتين للنقطة C .
- (3) أحسب الإحداثيتين الديكارتيتين للنقطة A .
- (4) باستعمال العلاقة $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. استنتج x_B و y_B الإحداثيتين الديكارتيتين للنقطة B .
- (5) أحسب OB وقيس الزاوية الموجهة $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$ استنتج الإحداثيتين القطبيتين للنقطة B .
- (6) استنتج القيمتين $\sin \frac{\pi}{12}$ ، $\cos \frac{\pi}{12}$.

المسألة رقم 02 *****

(C) دائرة مثلثية منسوبة إلى معلم للمستوي متعامد ومتجانس و $(O; \vec{i}; \vec{j})$. نضع $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

ABCDE خماسي منتظم .



- (1) عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ، $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ ، $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ ، $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$.
- (2) بين أن النقط M من (C) التي تحقق:
- $$5(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
- هي رؤوس الخماسي ABCDE .