

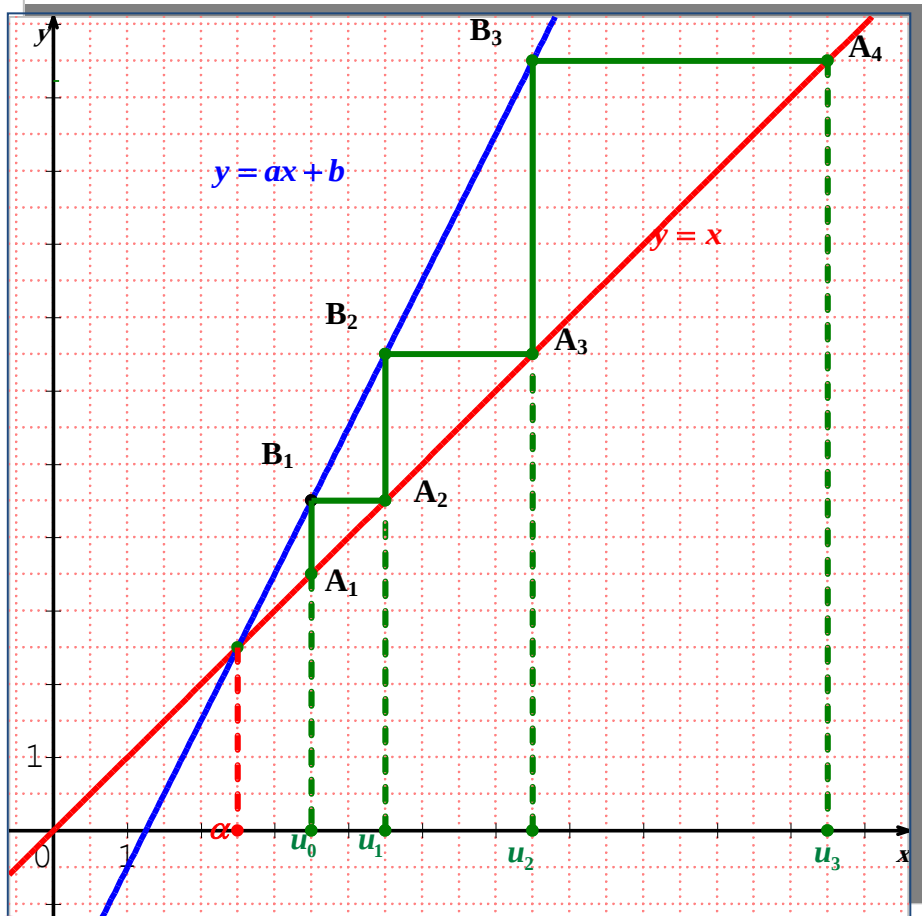


مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين المتتاليات في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook



مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين المتتاليات في البكالوريا
بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية+تقني رياضي+رياضيات
(1)المواضيع ، (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الثاني

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة+علوم دقيقة

الجزء الثالث

بكالوريات اجنبية

الجزء الرابع

تمارين مقترحة

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

الجزء الأول: تدريبات متنوعة

التمرين 01

- $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20} : n$ المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ فإن: $4 \leq u_n < 5$
- 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ فإن: $4 \leq u_n < 5$
 - 2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
 - 3- استنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة، ثم احسب نهايتها.

التمرين 02

- $2u_{n+1} = u_n + 3 : n$ المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n
- 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 3$
 - 2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 - 3- استنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة: ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - 4- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 2^{-n+2}$

التمرين 03

- $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 : n$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n
- 1) ادرس رتبة المتتالية (u_n)
 - 2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq n^2$ ، ثم جد نهاية المتتالية (u_n)
 - 3) أعط تخميناً لعبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم برهن صحة تخمينك.

التمرين 04

- نعتبر المتتالية (u_n) العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{4}{3}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+3)} u_n$
- 1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{8}{(n+2)(n+3)}$
 - 1) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $u_n = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$
 - 2) استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 05

- نعتبر المتتالية (u_n) العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $2u_{n+1} = (u_n^2 - 2u_n + 4)$ و $u_1 = 1$

- (1) احسب كلا من u_2 و u_3 ، ثم بيّن أن المتتالية (u_n) رتيبة .
- (2) بيّن أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ، ثم برهن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.
- (3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين 06

- (I) (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدّها الأول u_0 وأساسها r
 حيث : $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210$ و $u_1 + u_2 + u_3 = 24$
 (1) أحسب الحد u_2 ثم الأساس r والحدّ الأول u_0 .
 (2) عين الحد العام u_n بدلالة n ، ثم احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n
 (II) نعتبر المتتالية (v_n) والمعرفة كإيلي : $v_n = e^{-3n+14}$
 (1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين عناصرها المميزة .
 (2) احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و الجداء $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 07

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_0 = 5$ وأساسها 4

- (1) احسب u_n بدلالة n ثم احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n
 (2) إذا كان مجموع عشرة حدود متعاقبة من هذه المتتالية هو 2020 فما هو الحد الأول من هذه الحدود

التمرين 08

(v_n) متتالية معرفة بحدّها الأول : $v_0 = 2$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $v_{n+1} = \frac{5v_n - 1}{v_n + 3}$. نضع : $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$

- (أ) احسب كلا من v_1 و v_2 و u_0 و u_1 و u_2
 (ب) برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها
 (ج) احسب u_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .
 (د) عين بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم استنتج المجموع $T_n = v_0 \cdot u_0 + v_1 \cdot u_1 + \dots + v_n \cdot u_n$

التمرين 09

a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

- (1) بين أنه إذا كانت a ، b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :
 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$.
 (2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

التمرين 10

- x, y, z أعداد حقيقية موجبة تماما، تشكّل هذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية.
 (1) برهن أن الأعداد: $\ln x, \ln y, \ln z$ هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.
 (2) عيّن هذه الأعداد بحيث: $\ln(x \times y \times z) = 21$ و $\ln x \times \ln y \times \ln z = -105$

التمرين 11

- أ) حل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية
 ب) عين الأعداد الحقيقية x, y و z المتميزة مثنى مثنى والتي تحقق:
 y, x, z حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية و x, y, z حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية و $x+y+z$ عدد طبيعي أولي قاسم للعدد 1995.

التمرين 12

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n
 $u_{n+1} = \frac{(2a+1)}{3}u_n - \frac{(2a-4)}{3}$ حيث a وسيط حقيقي .
 (1) عيّن قيمة a والتي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
 (2) نفرض أن: $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية
 - أكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب مجموع n الحد الأولى لهذه المتتالية.
 (3) عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية .
 - احسب u_{50} ، ثم احسب مجموع 50 حدا الأولى لهذه المتتالية.
 (4) نفرض أن: $a = 4$. - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n = 3^n + 2$
 - بيّن أن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$

التمرين 13

- (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدودها موجبة حيث: $u_1 = 1$ و $u_5 + u_3 = 20$
 (1) جد الأساس q ثم حدد اتجاه تغيرها وتقاربها .
 (2) احسب المجاميع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $S'_n = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ و $T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$
 (3) من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n+1}$
 بيّن أن: $P_n = \left[u_1 \times q^{\frac{n}{2}} \right]^{n+1}$ ، ثم استنتج عبارة P_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين 14

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\ln u_3 - \ln u_2 = 1$ و $\ln u_3 + 2\ln \sqrt{u_6} = 11$
 (1) عيّن الاساس q والحد الاول u_0 للمتتالية (u_n).

(2) اكتب u_n بدلالة n ، ثم ادرس اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

(3) احسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n

(4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب) احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ بدلالة n

التمرين 15

(1) عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c التي تشكل هذا الترتيب متتالية

$$\begin{cases} a \times b \times c = 216 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 133 \end{cases} \quad \text{هندسية متزايدة حيث :}$$

(2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$ و $v_n = u_n + \alpha$ ، ($\alpha \in \mathbb{R}$)

أ) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون: $u_n = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$. جد ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) ماهي طبيعة المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln(v_n)$ ؟

(4) احسب الجداء P_n حيث : $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

الجزء الثاني: بكاوريات جزائرية

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 16: دورة 2019 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1-أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة

2) أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

3) اكتب v_n بدلالة n ، ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) بيّن انه : من أجل كل عدد طبيعي $n : (u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5}\right)^{n+1}$

التمرين 17: دورة 2019 الموضوع (2)

f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7[$ ب: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1-أ) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7[$.

ب) أستنتج أنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن: $f(x) \in [4; 7[$

2) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$: $f(x) = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$

ثم أستنتج أنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن: $f(x) - x > 0$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 4 \leq u_n < 7$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم بيّن أنها متقاربة.

4-أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$

ب) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 18: دورة 2018 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

1-أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج انها متقاربة .

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

اثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول

3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0.v_0 + u_1.v_1 + \dots + u_n.v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين 19 دورة 2018 الموضوع (2)

(u_n) متتالية عددية معرفة بمجدها الاول $u_0 = 0$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 2n+1$

أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) احسب المجموعتين: $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$

التمرين 20: دورة 2017 الموضوع (1)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي:

$u_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

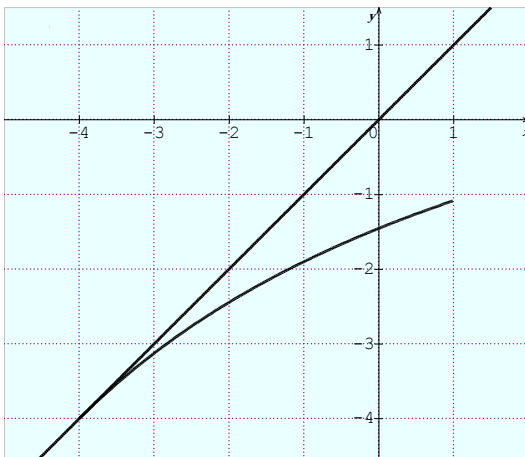
1- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ب- بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2- أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$

ب- أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج



إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

التمرين 21: دورة 2017 الموضوع (2)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $f: (0, \vec{i}, \vec{j})$ الدالة المعرفة على $[-4; 1]$ ب: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$

و (C_f) لمنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

I- تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[-4; 1]$ ثم بين أنه من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

II- (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) انقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (لا يطلب حساب الحدود)
ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 < u_n \leq 0$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3- لكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث:

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$$

التمرين 22: دورة 2017 الموضوع (1) الاستدراكي

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ ب: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$

1- احسب الحدين u_1 و v_1 .

2- أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3- نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = u_n - v_n$.

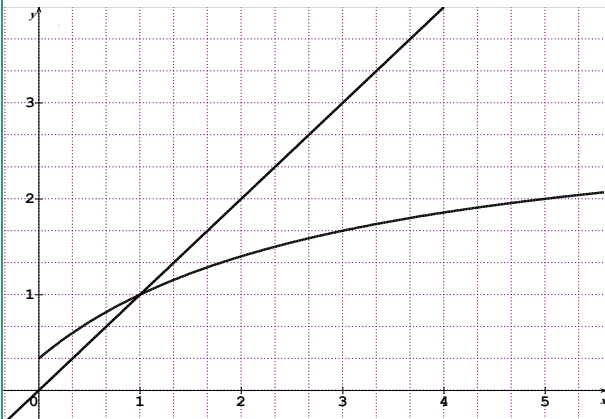
برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الاول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n .

4- بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين 23: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكي

دالة معرفة على $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f)

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$



إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول: u_0 حيث $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

I- عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة

II- نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$.

1-أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود)
ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقرّبها

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول

ب- عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$ ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n

حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

التمرين 24: دورة 2016 الموضوع (1)

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \sqrt{2x+8}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) عيّن احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له.

3) ارسم (C) و (Δ) .

II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) مثل في المعلم السابق على محور الفواصل u_0, u_1, u_2 (دون حسابها). موضحاً خطوط الإنشاء

2) ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقرّبها.

3-أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 25: دورة 2016 الموضوع (2)

I) الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$

II) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

1-أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة

2- (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين 26: دورة 2016 الاستدراكية الموضوع (1)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ كمايلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1-أ) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $f(x)$ ينتمي للمجال I .

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة.

3- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$.

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0 .

ب) اكتب v_n بدلالة n .

ج) أستنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 27: دورة 2016 الموضوع (2) الاستدراكي

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ب: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

والتكن المتتالية (v_n) المعرفة ومن أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .
2- أ) عبّر بدلالة n عن عبارة v_n .

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3- أ) احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

ب) تحقق أن: $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

ج) أستنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$.

التمرين 28: دورة 2015 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$.
1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(1 + u_n) > 0$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علّل.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج) بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين 29: دورة 2015 الموضوع (2)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي: $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1-أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها.
ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2-أ) اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث: $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.
ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3-أ) اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين 30: دورة 2014الموضوع (1)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$.
1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n .

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) احسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.

أ- بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

التمرين 31: دورة 2014الموضوع (2)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ و أساس اللوغاريتم النيري

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(II) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ، حيث $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيري

(1) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم أستنتج نوع المتتالية (v_n) .

(2-أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.

(ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

التمرين 32: دورة 2013 الموضوع (1)

(I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

(1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول . (2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

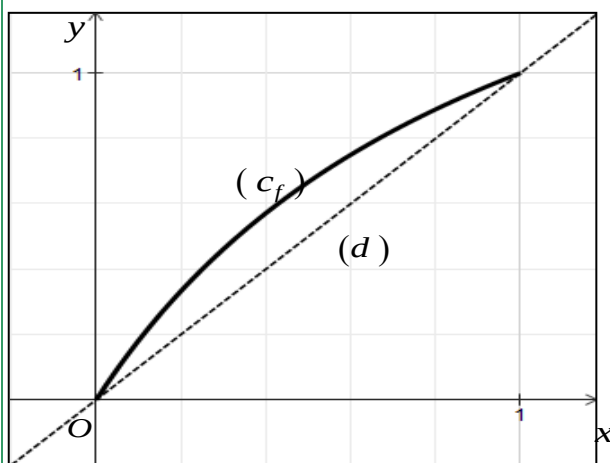
(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

(2) ادرس اتجاه تغيير المتتالية (u_n) .

(3) أبرهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

(ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq (6 - u_n) \leq v_n$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 33: دورة 2013 الموضوع (2)



في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f

المعرفة على المجال $[0; 1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة .

ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل .

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغيير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ) أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 1]$.

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

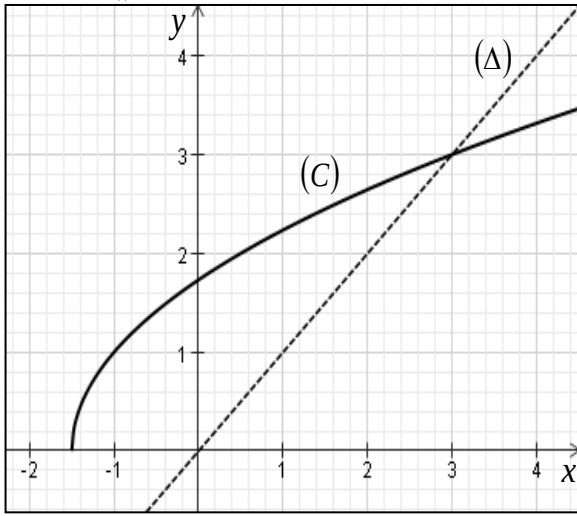
أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب) أحسب نهاية (u_n) .

التمرين 34: دورة 2012 الموضوع (1)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

(1) لتكن h الدالة المعرفة على $\left[-\frac{3}{2} + \infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و (C) تمثيلها البياني



و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي

المنسوب معلم متعامد ومتجانس (انظر الشكل المقابل)

أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل

u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساباً موضحاً خطوط الإنشاء)

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$

(3) أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 35: دورة 2012 الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بمحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

(2) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$ ، استنتج أن (u_n) متزايدة تماماً

(3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، احسب حدّها الأول

ب) اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين 36: دورة 2011 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ب: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات توجد إجابة واحدة منها فقط صحيحة، حددها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n): أ- حسابية ، ب- هندسية ، ج- لاحسابية ولاهندسية

2. نهاية المتتالية (u_n) هي: أ- $+\infty$ ، ب- $-\frac{1}{2}$ ، ج- $-\infty$

3. نضع من من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$

أ- $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ، ب- $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ ، ج- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين 37: دورة 2011 الموضوع (2)

1. عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ب: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1. أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α عبارة v_n واستنتج بدلالة n و α عبارة u_n

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها (u_n) متقاربة

2. نضع: $\alpha = \frac{3}{2}$. أحسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 38: دورة 2010 الموضوع (2)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا

المستقيمين (Δ): $y = x$ و (D): $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

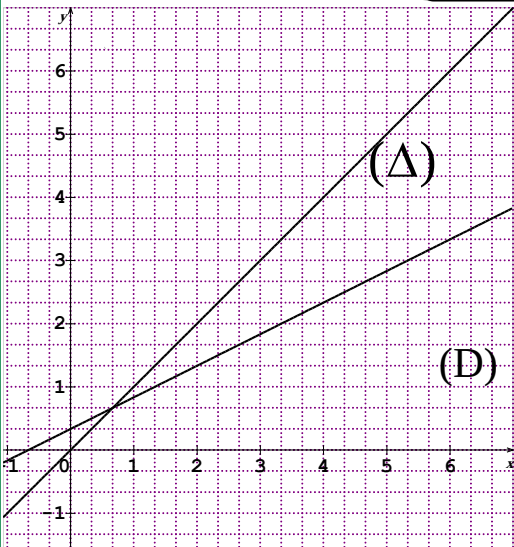
1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$ ، $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية

u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).



إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

(ج) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) -أ- باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n واستنتج u_n بدلالة n

ج- احسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

واستنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين 39: دورة 2009 الموضوع (1)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أ- احسب v_0 و v_1 . (2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3 أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

التمرين 40: دورة 2009 الموضوع (2)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً حدها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 216 \end{cases}$

1. أ- احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول

ب- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج- احسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n .

ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$.

2. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

أ- احسب v_2 و v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج- اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين 41: دورة 2008 الموضوع (1)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [1, 2]$ بـ: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماماً على I .

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

ب- عين النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 42: دورة 2008 الموضوع (2)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$.

1- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل

للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على محور الفواصل دون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 6$.

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة، هل (u_n) متقاربة؟ برر اجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 6$.

- اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

شعبة تقني رياضي

التمرين 43: دورة 2019 الموضوع 1

(u_n) و (v_n) المتتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كمايلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases}$ و $v_n = u_n - 3n + 1$

(1) اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4-أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 7^n على 9

(ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد: $1954^{1962} + 1962^{1954} + 1440^{2019}$ ؟

(ج) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0 [9]$

التمرين 44: دورة 2018 الموضوع 1

f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2x}{ex + 1}$ (أساس اللوغاريتم النيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول: $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1-أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n + 1}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرّر انما مقاربة.

2- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1}$

بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدّها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n .

3-أ) تحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1}$ واستنتج عبارة u_n ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

(ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

4-أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7.

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 45: دورة 2018 الموضوع 2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها العام $u_n = 2(3)^n$ و (v_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها الاول $v_0 = 4$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$

$$(1) \text{ نضع من أجل كل } n \in \mathbb{N} : w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

أثبت أن (w_n) متتالية عددية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول.

(2) أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ، ثم أستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

(3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8

(4) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد v_n على 8.

التمرين 46: دورة 2017 الموضوع (1)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

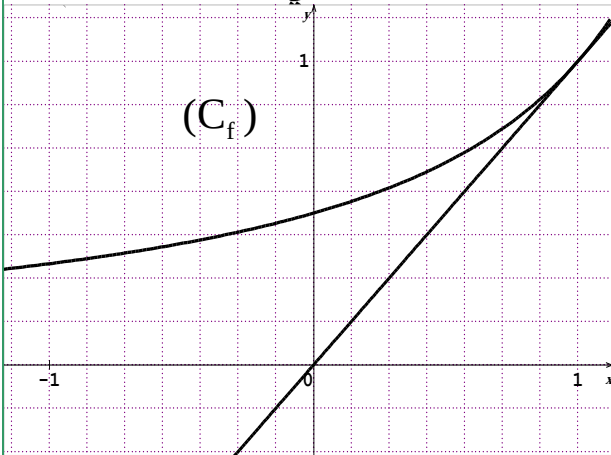
(u_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 مبرزاً خطوط التمثيل

ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- برهن بالتراجع انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ من : $u_n < 1$.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أستنتج أنها متقاربة.



4- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كماليلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2، ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- استنتج عبارة الحد العام u_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 47: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكي

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$

حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

1- أ- بيّن أن : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة.

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وعين حدّها الأول v_1 بدلالة α .

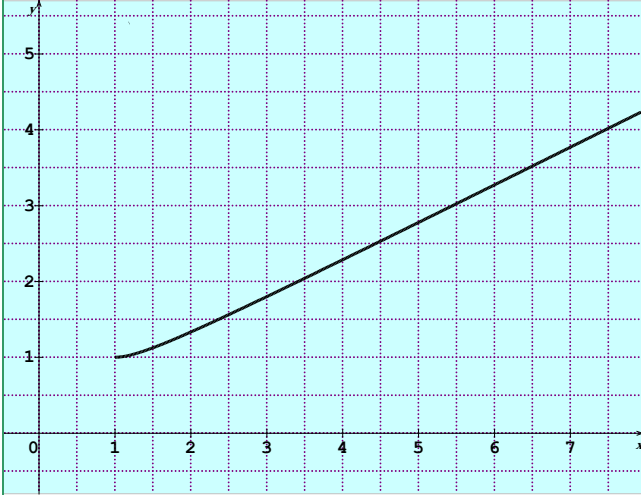
ب) جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3- احسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n$

عين قيمة α حيث: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

التمرين 48: دورة 2016 الموضوع (2)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب معلم



متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الشكل المقابل).

1) بين أن الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة

الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل

(دون حساباً) موضحاً خطوط الإنشاء.

ب- أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

د- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هـ- برّر تقارب المتتالية (u_n) .

3- نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدّها الأول.

ب- أكتب w_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n .

ج- بين أن $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n}$.

التمرين 49: دورة 2015 الموضوع (2)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

(1) الدالة المعرفة على $\left[-\frac{8}{3} + \infty\right]$ بما يلي: $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل)
(أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3
(دون حساباً موضحاً خطوط الإنشاء)

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغيير (u_n) وتقاربها.

(2) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n < 8$.

(ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$

(ج) استنتج اتجاه تغيير (u_n) .

(3) أ) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < 8 - u_n \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 50: دورة 2014 الموضوع (1)

n و p عددان طبيعيين.

(1) أدرس، حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n

(2) نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$.

(أ) بين أن إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $C_n = D_p$.

(ب) عيّن n من أجل $p = 6$.

(3) f هي دالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$.

ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(4) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$.

(ب) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: فإن u_n عدد طبيعي. (5) استنتج اتجاه تغيير المتتالية (u_n) .

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

التمرين 51: دورة 2014 الموضوع (2)

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1- حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$.

2- أ- عيّن اتجاه تغير f . ب- بين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن: $f(x) \in [2; e+1]$.

II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = e+1$ و من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2; e+1]$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

التمرين 52: دورة 2013 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$

1) بين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب وحدّها الأول

2) اكتب v_n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

4) جد بدلالة n الجداء $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

التمرين 53: دورة 2011 الموضوع (1)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1- أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ استنتج أن $u_n > 1$

2- أدرس اتجاه تغير (u_n) ، بين أنها متقاربة، وأحسب نهايتها

3- ليكن الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

4- (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $v_n = \ln(u_n)$

عبر بدلالة P_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ، ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$.

التمرين 54: دورة 2008 الموضوع (1)

I- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

و (C_f) منحنى f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الاطوال 2cm.

أ) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المستقيم $(D): y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) . ثم رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

د) بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

II- نعتبر المتتالية العددية (U_n) والمعرفة بـ: $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

أ) باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x$: مثل U_0, U_1, U_2 (دون حسابها) على محور الفواصل

ب) خمن اتجاه وتقارب المتتالية (U_n) .

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ وان المتتالية (U_n) متزايدة.

استنتج ان (U_n) متقاربة ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين 55: دورة 2008 الموضوع (2)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ و (C_f) تتمثلها البياني

1- أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$.

ب- أنشئ (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة 4cm

ج- برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$.

2- نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ- برر وجود المتتالية (u_n) . احسب u_1 و u_2 .

ب- مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل بالاستعانة بـ (C) والمستقيم $(D): y=x$

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3- أ- برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى المتتالية (u_n) ؟

ج- تحقق أن $(u_n - \sqrt{3}) \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

عين عددا حقيقيا k من المجال $]0; 1[$ بحيث: $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |u_n - \sqrt{3}|$ ثم بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$

$|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

شعبة الرياضيات

التمرين 56: دورة 2019 (1)

1) حل المعادلة (E) $505x - 673y = 1$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.
(لاحظ أن: $2019 = 3 \times 673$ و $2020 = 4 \times 505$)

2) بين أنه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.

3) نعتبر المتالتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$

- أكتب u_α بدلالة α ثم أكتب v_β بدلالة β حيث α و β عدنان طبيعيان.

4-أ) عيّن الحدود المشتركة للمتالتين (u_n) و (v_n) ، ثم بين أن هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$.

احسب بدلالة n الجداء $p = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots X_n$

التمرين 57: دورة 2019 (2)

(u_n) متتالية عددية حدودها معرفة بمحدّها الأول $u_1 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

1-أ) تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

ب) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n .

2) تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = n(n-2) + 1$

3) عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها: $(n-2)$ يقسم $(n-5)$

4-أ) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$: بين أن: $\text{PGCD}(n-2; u_n) = 1$

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

التمرين 58: دورة 2018

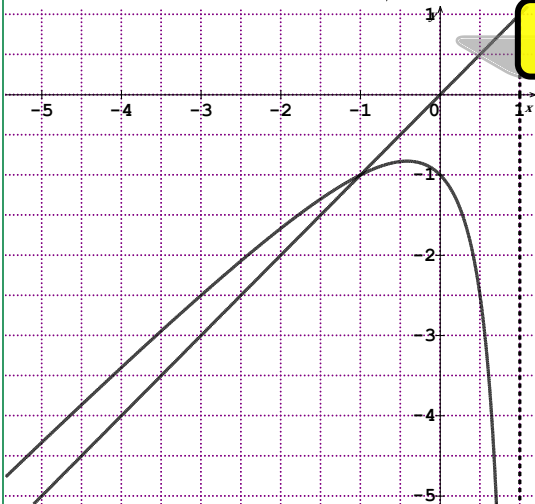
f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بمحدّها الأول $u_0 = -3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

واليك (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ واليك (Δ) المستقيم



ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل)

(1) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود

u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محاور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل ، أعط تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -3 \leq u_n \leq -1$.

(3-أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

(ب) أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ ثم $u_n + 1 \geq -2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) < 0 \leq 8 \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right]$

وأستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين 59: دورة 2017 الموضوع (2)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 7u_n + 8$.

1- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n : 3u_n = 7^{n+1} - 4$.

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ- احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n .

ب- أستنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي $n : 18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

3- (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلاً للقسمة على 5.

التمرين 60: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

1- (أ) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

(ب) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العدان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

- (ب) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$.
- 3- عين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعديدين $4^{n+1} - 1$ و $4^n - 1$.
- 4- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.
- (ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف بـ: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

التمرين 61: دورة 2016 الموضوع (1)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

(1) أحسب u_1 و u_2 ، ثم استنتج قيمة الأساس q

2- نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$

(أ) عبّر عن u_n بدلالة n ،

(ب) نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = n + 3$.

3- أ- بيّن أن: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

(ب) عيّن القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي بحيث: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

(4) ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

(5) نضع: $b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون:

$$\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

(6) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7

التمرين 62: دورة 2014 الموضوع (1)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة

f في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس (انظر الشكل).

(1) بين ان الدالة f متزايدة تماما.

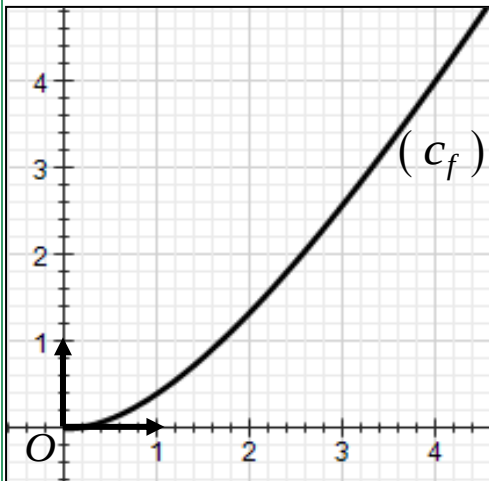
(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

(أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل

محور الفواصل، الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها.



ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقارهما.

3) أ) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq 3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. ج) استنتج أن (u_n) متقاربة.

4) أ) ادرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.

ب) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 63: دورة 2012 الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 16$ من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = 6u_n - 9$

1- أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7.

ب) خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$.

2- أ) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $n: u_{n+2} \equiv u_n[7]$.

ب) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $k, u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أن: $u_{2k+1} \equiv 3[7]$.

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n, v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب بدلالة n كلاً من u_n و S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 64: دورة 2011 الموضوع (1)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماً حدودها أعداد طبيعية تحقق: $\begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3; u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3; u_5) \end{cases}$ حيث $\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$

1- عين الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0 .

2- اكتب u_n بدلالة n ، ثم بين أن: 2010 حد من حدود (u_n) وعين رتبته.

3- عين الحد الذي إبتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080.

4- n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2n}$.

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1}$.

التمرين 65: دورة 2009 الموضوع (1)

1) نعرف الدالة f على المجال $[1, 5]$ ب: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$ و (C_f) هو التمثيل البياني لها الوحدة 3cm

أ) أدرس تغيرات الدالة f .

ب) إنشئ (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

(2) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n})$

أ) احسب u_1 و u_2 .

ب) استعمل (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل.

(3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- بين أن (u_n) تناقصية تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها

(4) أ- برهن أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$. ب- أستنتج أن $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$ ما هي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 66: دورة 2009 الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

1- عين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول.

2- احسب كلاً من u_n و v_n بدلالة n .

3- احسب المجموعين $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

4- أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقلدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها u_n مضاعف للعدد 5.

التمرين 67: دورة 2008 الموضوع (1)

لتكن f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ و f واليكن (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسياً.

- أدرس تغيرات الدالة f .

- باستعمال منحني دالة " الجذر التربيعي " أنشئ (C_f)

- أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$

(2) نعرّف (u_n) متتالية على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

ب- أستنتج أن (u_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 68: دورة 2008 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ و $u_0 = 2$
(1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة، استنتج عبارة u_n بدلالة n .

- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) (w_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ أحسب المجموع : $S = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

الجزء الثاني: بكالوريات النظام القديم

التمرين 69: دورة 1997 ع.ط

(1) (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث $\ln u_2 - \ln u_4 = 4$ و $\ln u_1 + \ln u_5 = -12$

* عين أساسها وحدها الأول u_0 ، ثم أكتب u_n بدلالة n

* نسمي S_n المجموع: $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ أحسب S_n بدلالة n ثم نهاية S_n لما n ؤول إلى $+\infty$

(2) (V_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: مهما يكن العدد الطبيعي n فإن: $V_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

* بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

نسمي S'_n المجموع: $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $S'_n = 2^{30}$

التمرين 70: دورة 2004 ت.ر

(1) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $U_n - 2U_{n+1} = 2n + 3$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، $U_n = 2^{-n} - 2n + 1$

(2) أثبت أنه يوجد عدد طبيعي m ، تكون من أجله المتتالية (V_n) والمعرفة ب:

$V_n = U_n + mn - 1$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب بدلالة n المجموع: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

(3) لتكن في المستوي النقط A, B, C و K التي تحقق: $2\vec{KA} + 3\vec{KB} + \lambda\vec{KC} = \vec{0}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

عين λ حتى تكون K مرجحا للجملة: $\{(A; S_0), (B; S_1), (C; S_2)\}$

التمرين 71: دورة 2007 ت.ر

(1) (U_n) متتالية عددية معرفة ب: $U_0 = \frac{1}{4}$ ، $U_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $4U_{n+2} = 7U_{n+1} - 3U_n$

(2) (V_n) المتتالية المعرفة بالعلاقة: $V_n = U_{n+1} - U_n$ $n \in \mathbb{N}$

(1) احسب U_2 و V_0 . (2) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

(3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

(4) عبّر عن U_n بدلالة S_n مستعينا بالعلاقة $V_n = U_{n+1} - U_n$ ثم استنتج عبارة الحد العام U_n بدلالة n .

احسب نهاية U_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 72: دورة 2006 ع.دقيقة

(1) (u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول u_0 وبالعلاقة التراجع التالية: $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

1- عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نفرض أن : $u_0 = 0$. أ- احسب u_1 ، u_2 .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 \leq u_n \leq 1$ ، ثم أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

ج- أحسب كلا من S_n و π_n حيث : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $\pi_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

التمرين 73: دورة 2004 ع.ط

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون العدد $(2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1})$ قابلا للقسمة على 7

3) من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

- أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

التمرين 74: دورة 1998 ع.ط

u_0 ، q عددان طبيعيان غير معدومين.

(u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 و أساسها q .

1. عيّن q و u_0 علما أنّ q أولي مع u_0 و $3u_0^2 = u_3 - u_1$

2. نفرض أنّ $q = 3$ ، $u_0 = 8$ ونضع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

أحسب S_n و P_n بدلالة n

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 3^n على 13 .

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n مضاعفا 13

التمرين 75: دورة 2005 ع.دقيقة

1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

جد - α و β حيث : $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha > \beta$.

2) (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 و أساسها q

حيث u_0 و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما $u_0 > q$.

أ- أوجد u_0 و q حتى يكون : $35u_0^2 + 19u_1 - u_3 = 0$.

ب- نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. أحسب بدلالة n المجموع S_n ،

ج- أوجد العدد الطبيعي n حتى يقبل S_n القسمة على 10 .

الجزء الثالث: بكالوريات اجنبية

التمرين 76: دورة 2016 - المغرب

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$

1-أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب) تحقق من أن : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة .

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

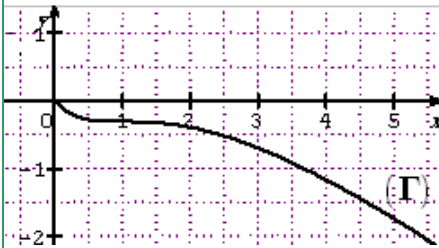
2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{16}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب) بيّن أن $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ثم حد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 77: دورة 2016 - تونس

(شعبة العلوم التقنيّة / الدورة الرئيسيّة - ترجمة الأستاذ: م. جبالى)



المنحنى (Γ) المقابل هو التمثيل البياني، في معلم متعامد ومتجانس

للدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$: $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Γ) يقطع محور الفواصل، فقط، عند المبدأ O .

1) بقراءة بيانيّة، برّر أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $\ln(1+x^2) \leq x$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1+u_n^2) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

ج) استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، وأعط نهايتها.

3) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(أ) بيّن أن المتتالية (S_n) متزايدة تماماً.

(ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

(ج) استنتج أن المتتالية (S_n) مقاربة.

التمرين 78: دورة 2016 - Côte d'Ivoire

(شعبة العلوم - ترجمة الأستاذ: محمد جبالي)

1- نعتبر الدالة h المعرفة على $[0;1]$ بـ : $h(x) = 2x - x^2$.

(أ) برهن أن h متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

(ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ ، فإن $h(x)$ ينتمي إلى $[0;1]$.

2- لتكن المتتالية u المعرفة بـ : $u_0 = \frac{3}{7}$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = h(u_n)$.

(أ) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

(ب) برهن أن المتتالية u متزايدة. (ج) برّر أن المتتالية u مقاربة.

3- نعتبر المتتالية v المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ : $v_n = \ln(1 - u_n)$.

(أ) برهن أن v متتالية هندسية أساسها 2.

(ب) عبّر عن v_n بدلالة n . (ج) احسب نهاية المتتالية v . (د) استنتج نهاية المتتالية u .

التمرين 79: دورة 2016 - المغرب

(شعبة العلوم / الدورة العادية/ بتصرف يسير من الأستاذ جبالي)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

(1) (أ) تحقق من أن $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

(ب) بيّن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n ، أن $u_n < 3$.

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

(ب) استنتج أنّ $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

(ج) بيّن أنّ $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$. ثم اكتب u_n بدلالة n .

(د) حدّد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 80: دورة 2015 - تونس

(شعبة العلوم التجريبية / دورة المراقبة - ترجمة الأستاذ: م. جبالي)

1/ لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدّها الأوّل $u_0 = \frac{1}{3}$ ، و أساسها $q = \frac{1}{3}$.

(أ) احسب u_1 . (ب) عيّن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. بيّن أنّ $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

2/ بدراسة تغيّرات الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = e^x - 1 - x$ ، بيّن أنّه مهما يكن $1 + x \leq e^x : x \in \mathbb{R}$.

3/ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = (1+u_0)(1+u_1) \times \dots \times (1+u_n)$.

(أ) احسب v_0 و v_1 .

(ب) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متزايدة.

(ج) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \leq e^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

(د) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متقاربة.

(هـ) لتكن l نهاية المتتالية (v_n) . بيّن أنّ $1 < l \leq \sqrt{e}$.

التمرين 81: دورة 2015 - فرنسا

(المراكز الأجنبية - شعبة العلوم / ترجمة الأستاذ: م. جبالي)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_0 = a$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

1. لتكن g الدالة المعرفة، من أجل كل عدد حقيقي x ب: $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

- (أ) احسب $g'(x)$ ، وتحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي $x: g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
- (ب) حدد تغيرات الدالة g ، وأعط قيمتها الحدية الصغرى.
- (ج) بملاحظة أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ، ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
2. في هذا السؤال، نفرض أن $a \leq 0$.

- (أ) برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n ، أن $u_n \leq 0$.
- (ب) استنتج، من الأسئلة السابقة، أن (u_n) متقاربة.
- (ج) أعط نهاية المتتالية (u_n) ، في حالة $a = 0$.
3. في هذا السؤال، نفرض أن $a > 0$.
- (أ) برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
- (ب) برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq a + n.g(a)$.
- (ج) عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 82: دورة 2014 - تونس

- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
- (1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -1$.
- ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.
- ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

- (2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.
- أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
- ب- عبّر عن v_n ثم u_n بدلالة n . ج- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 83: دورة 2014 - المغرب

- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = 13$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$.
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 14$.
- (2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 14$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ،

ج- حدّد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 13.99$.

التمرين 84: دورة 2014 Polynésie

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ ،
(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$. أ- جد v_n بدلالة n . ما طبيعة المتتالية (v_n) ؟

ب- نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = (n+1)(n+2)$ ،

ج- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = u_{n+1} - u_0$ ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 85: دورة 2009 تونس

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0 = 6$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $3U_{n+1} = U_n + 6$.

(1) ابرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $U_n > 3$.

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها مقاربة . (ج) عين نهاية المتتالية (U_n) .

(2) (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \ln(U_n - 3)$.

أ) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$.

ب) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n . ثم عين ثانية ، نهاية (U_n) .

التمرين 86: دورة 2004 الهند

1- (u_n) متتالية معرفة بمجدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

أ) احسب u_1 ، u_2 و u_3 عبر عن كل حد على شكل كسر غير قابل للإختزال .

ب) قارن بين الأربعة حدود الأولى للمتتالية (u_n) والأربعة حدود الأولى للمتتالية (w_n) .

والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{n}{n+1}$.

ج) ابرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = u_n$.

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

أ) برهن أن : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين 87: دورة 2010 - فرنسا

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

(1) احسب u_1 ، u_2 و u_3

(2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ، $u_n \geq 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ ، $u_n \geq n - 3$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(3) نعرف المتتالية (v_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

ج) ليكن المجموع S_n المعروف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. عين عبارة S_n بدلالة n .

التمرين 88: فرنسا 2010 Metropole

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1- أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ والمنحنى (C)

الممثل للدالة f والمعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$.

ب) باستعمال الرسم السابق، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حساب على محور الفواصل.

ج) ما تخمينك اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n > 1$.

3) من أجل كل عدد طبيعي نضع: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

أ) برهن على أن (v_n) حسابية وأكتب v_n بدلالة n .

ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 89: فرنسا 2012 A-Guyane

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

1- احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

- 2- أ- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن u_n موجب تماما
ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة، ثم احسب نهايتها l .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

- أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n = \frac{n}{2^n}$ ،

(4) نعتبر الدالة f والمعرفة على المجال $[1; +\infty[$ ب : $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

- أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. ب - استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 90: Pondichéry 2010

(u_n) متتالية عددية معرفة بمحدّها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$ ،

- (1) هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ب : $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

- أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- بين أنه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

ج- احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 91: Polynésie 2010

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

- (1) احسب u_1 و u_2 .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

- ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

- أ- بين أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$. ج- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 92: تونس 2010. تجريبية

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n .

$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ و $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

- 1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$.
 أ- احسب w_0 و w_1 . ثم بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = (2\alpha - 1)^n$.
 ب- استنتج نهاية المتتالية (w_n) .
 2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq v_n$.
 ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة .
 ج- استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l .
 د- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + v_n = 3$ ، وستنتج قيمة النهاية l .

التمرين 93: N Calédonie 2011

- I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.
 1) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة : $f(x) = x$.
 2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; 1]$. استنتج أنه إذا كان $x \in [0; 1]$ فإن $f(x) \in [0; 1]$.
 II- لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.
 1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.
 2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

الجزء الرابع: تمارين مقترحة

(مقترحة من طرف الأستاذ القدير بالقاسم عبد الرزاق)

التمرين 94

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases} \text{ : كما يلي : } \cdot$$

- (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > n^2$. ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .
- (2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_{n+1} - u_n$.
 أ) ما طبيعة المتتالية (w_n) .
 ب) أحسب المجموع : $S_{n-1} = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$.
 ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

التمرين 95

- (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = e^3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.
- (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e^2$.
- (2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل هي مقاربة ؟
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$.
 * بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل .
 * عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم u_n بدلالة n . ماهي نهاية كل من المتتاليتين (v_n) و (u_n) ؟
- (4) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.
- لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$.
 ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$.
- (1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
 * بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل v_0 .
- (2) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times u_n$.
- (3) بيّن إذن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- (4) إستنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة ، ثم حدد نهايتها .

التمرين 96

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

(1) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(أ) بيّن أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$. (ب) بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \frac{1}{2}$.

(ج) عيّن أصغر عدد طبيعي p ، بحيث : إذا كان : $n \geq p$ ، فإن : $v_n < \frac{3}{4}$.

(د) إستنتج أنه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

(2) نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$.

(ب) بيّن أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \times u_5$.

(ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$.

(3) بيّن أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 5}$ متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

التمرين 97

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب :

$u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، ومن أجل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

(1) لتكن المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

(أ) بيّن أن المتتالية (s_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

(ب) إستنتج عبارة s_n بدلالة n .

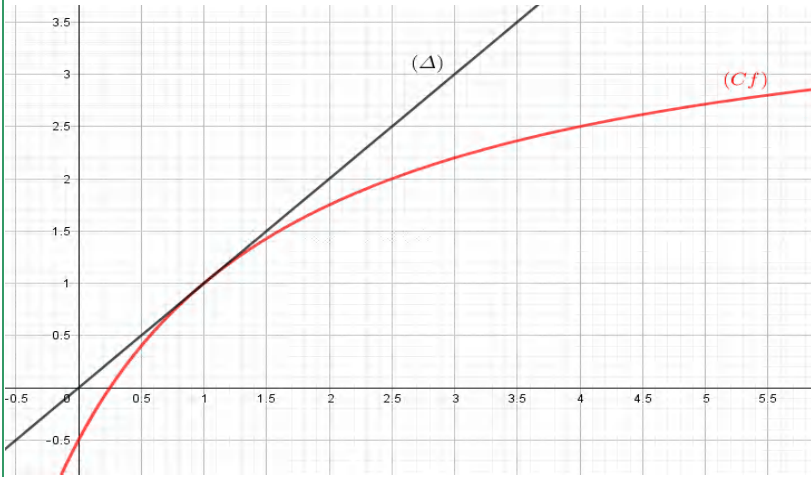
(2) نضع : $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $t_n = v_{n+1} - v_n$.

- عبّر عن t_n بدلالة s_n .

(3) عبّر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n . (يمكن حساب المجموع : $t_0 + \dots + t_{n-1}$ ، بطريقتين مختلفتين)

- عيّن عندئذ النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{8^n}\right)$.

التمرين 98



الف الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x-1}{x+2} \text{ ويعطى المنحني } (C_f)$$

والمستقيم (Δ) في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ متتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ :}$$

1- أ) باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) ، عيّن على محور الفواصل الحدود: u_3, u_2, u_1, u_0
 ب) أعط تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n - 1 > 0$.
 ب) برهن صحة التخمين المذكور في السؤال (1) - ب -

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية، أساسها هو: $\frac{1}{3}$.

ب) عبّر بدلالة n عن كل من u_n و v_n . ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 99

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

1) برهن أن جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة.

2) بيّن أنه إن كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تكون حلاً للمعادلة: $x^2 + x - 2 = 0$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) برّر أن المتتالية (v_n) متقاربة، ثم حدد نهايتها.

4) عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم حدد نهاية المتتالية (u_n) .