



عند بداية القرن التاسع عشر، انتشر اصطياد حيتان العنبر للحصول على دهونها التي تستعمل بشكل لافت في الإضاءة العمومية وكذا لأهل العنبر التي تفرزه أعضاؤها ليتم استخراجه في صناعة العطور. في التسعينيات قرّر عدد الأفراد الباقية من مستعمرات حوت العنبر حول العالم بوضع مئات الآلاف وهو ما يمثل انخفاضا يصل إلى 67٪ من عددها الإجمالي مقارنة بعددها قبل استغلالها من طرف البشر. منذ الخطر المقرر سنة 1982 على اصطياد الحيتان، برأت تجمعات الحيتان تتعافى ببطء.

تجدون في هذا الملف

1 الدرس

2 تطبيقات محلولة

3 طرائق هامة لحل التمارين

4 تمارين محلولة من ★ إلى ★★★★★

الأستاذ: عبد الحفيظي عادل

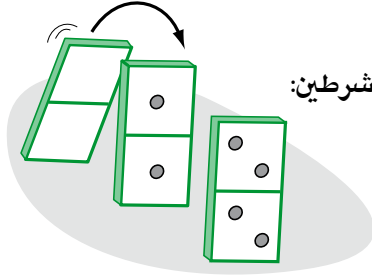
+ لمزيد من الأعمال...



- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوثيات شهادة البكالوريا مع الحل
- فروض واختبارات محلولة لكل المستويات

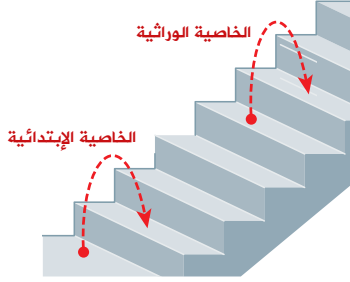
1 الاستدلال بالتراجع :

■ مبدأ الاستدلال بالتراجع: [2]



◀ تخيل أن لدينا عدداً من قطع الدومينو موضوعة الواحدة تلو الأخرى. لإسقاطهم، يجب استيفاء شرطين:

عليك إسقاط قطعة الدومينو الأولى، كما أن سقوط أي قطعة من الدومينو يجب أن يتسبب في سقوط الدومينو الموالي. عند استيفاء هذين الشرطين، نتقبل بديهياً أن كل قطع الدومينو الموضوعة بعد قطعة الدومينو الأولى ستسقط.



◀ تخيل أن لدينا سلم. إذا عرفنا كيف نصعد درجة من السلم وإذا عرفنا كيفية الانتقال من أي درجة إلى أخرى موائية، فإننا نتقبل بديهياً أنه يمكننا الوصول إلى أي درجة تقع بعد الدرجة الأولى التي صعدنا عليها. هذه هي الفكرة التي سنقوم بإضفاء الطابع الرسمي عليها.

[8]

[9]

مبرهنة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

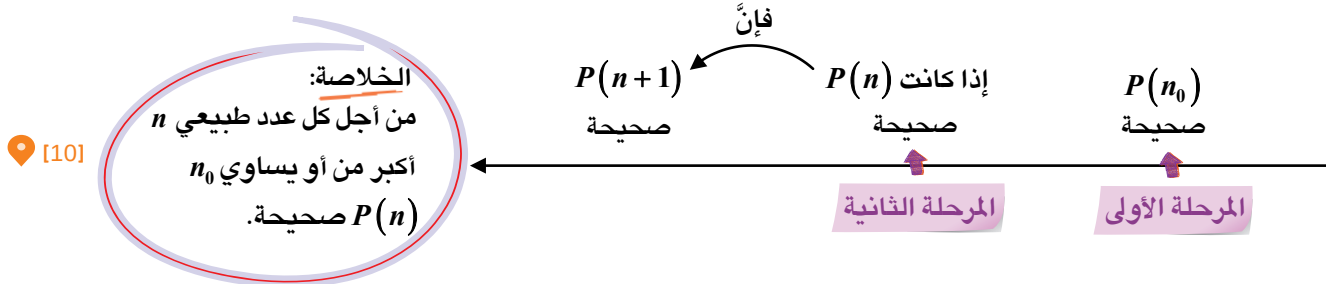
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي:

(1) نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

(2) نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

⚡ تنبيه: إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $n_0 = 0$ ، وإذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $n_0 = 1$ ، وهكذا ...

◀ يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية: البرهان على صحة مساواة، البرهان على صحة متباينة، البرهان على أن مقدار مضاعف لعدد ...



الانتقال
إلى الحل

تطبيق 01: برهن بالتراجع صحة القضايا التالية، من أجل كل عدد طبيعي n : [4] [5] [9]

$$(1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2) 2^n \geq n+1 \quad (3) 4^n + 2 \text{ مضاعفاً للعدد } 3$$

الحل:



Handwriting practice area with horizontal dotted lines.

2

 [11]

◀ u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

◀ رتبة حد u_b ($b \in \mathbb{N}$) من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

متتالية عددية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$: مثلاً من أجل كل عدد طبيعي n :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

تطبيق 02:

(2) استنتج عندئذ قيمة الحد الذي رتبته 100.

الحل:

3

تحریر:

◀ (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ يعني أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 0$

💡 **تنبيه:** إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماماً على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماماً على الترتيب) نقول أنّ المتتالية رتيبة (رتيبة تماماً على الترتيب)

طريقة:

③ دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ في حالة $u_n = f(n)$

 **تنبيه:** يمكن أن نستعمل الطرق الثلاث مع نفس المتتالية ، ان تحققت الشروط المطلوبة.

→ إلى الحل

 [5]

 [4]

 [12]

$$w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (3)$$

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3} \quad (2)$$

$$u_n = n^2 - 1 \text{ (1)}$$

الحل:

4

تعریف:

- [5]



طریقہ:

◀ إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$

→ الى الحل



تطبيق 04:

- (3)** (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$. ▶ أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$ ، أيًا يكن العدد الطبيعي n .

الحل:



Handwriting practice area with 25 horizontal dotted lines.

5 نهاية متتالية عددية :

نهایت متتالیت عددیت:

- ندرس دائماً نهاية متتالية عند $+\infty$ وغالباً ما يُطلب دراسة نهاية متتالية بدون تحديد عند $+\infty$.
- تبقى المبرهنات الأولية لحساب نهاية دالة عددية صحيحة لحساب نهاية متتالية عددية عند $+\infty$.
- q عدد حقيقي.

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \dots$	غير موجودة	0	1	$+\infty$

الانتقال الى الحل

ذهنياً. صل كل متتالية بنهايتها ، إن وجدت.

تطبيق 05:

المتتالية
7. $i_n = \frac{7-0,1^n}{2+0,99^n}$
8. $k_n = \frac{10^n}{(10,1)^n}$
9. $o_n = 16 \times \frac{1-1,1^n}{1-1,1}$
10. $p_n = 10 \times \frac{1-0,5^n}{0,5}$
11. $x_n = -\frac{5^n + 3^n}{4^n}$
12. $y_n = 4^n - 2^n$

النهاية
a. $-\infty$
b. 3,5
c. 0
d. 20
e. $+\infty$
f. 2
g. غير موجودة

المتتالية
1. $u_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$
2. $f_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$
3. $v_n = (-1)^n$
4. $w_n = 2^{-n}$
5. $t_n = 2$
6. $s_n = -3 \times (1,2)^n$

الانتقال الى الحل

ذهنياً. باستعمال العمليات على النهايات ، صل بما يناسب.

تطبيق 06:

المتتالية
7. $i_n = \cos\left(\frac{n\pi + 1}{2n + 1}\right)$
8. $k_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$
9. $o_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$
10. $p_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$
11. $w_n = \sqrt{n}(1 - 2n\sqrt{n})$
12. $y_n = \frac{3}{n} \times e^{-n}$

النهاية
a. $-\infty$
b. 1
c. 0
d. 4
e. $+\infty$
f. 2
g. 6

المتتالية
1. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
2. $f_n = \frac{3}{e^n} + 2$
3. $v_n = -2n^2 - n - 3$
4. $w_n = (1-2n)(n^2+3)$
5. $t_n = n^2 + (-1)^n$
6. $s_n = \frac{1}{n}(n^2+10)$

6

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.



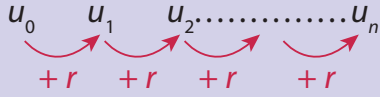
Handwriting practice area with 25 horizontal dotted lines.

7

تعریف:

 [11]

 [2]



طريقة:

 [10]

الانتقال
إلى الحل

 [10]

تطبيق 08: • أكدّ إذا كانت المتتالية (u_n) حسابية أم لا .

$$\cdot u_n = 3n - 1 \quad (1)$$

$$\cdot u_n = \frac{1}{2} - 3n \quad (2)$$

$$\cdot u_n = 2n^2 + 3n \quad (3)$$

$$\bullet \quad u_n = n^2 \quad (4)$$

$$\bullet \quad u_{n+2} = \frac{3-4n}{5} \quad (5)$$

$$\cdot u_n = n - \frac{1}{n} \quad (6)$$

$$\cdot \begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases} \quad (7)$$

$$\cdot \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -4u_n \end{cases} \quad (8)$$

الحل:



Handwriting practice area with 25 horizontal dotted lines.

- تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n

- ◀ إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_0 + nr$
- ◀ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_1 + (n-1)r$
- ◀ بصفة عامة: $u_n = u_p + (n-p)r$ حيث $p \in \mathbb{N}$ (تسمى العلاقة بين حدّين كيفيين).

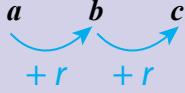
تطبيق 09: • (u_n) متتالية حسابية أساسها r .

• عين في كل حالة من الحالات الآتية قيمة العدد الطبيعي n

$$\cdot u_n = -114, \quad u_5 = -14, \quad u_{10} = -64 \quad (2) \qquad \cdot u_n = -82, \quad r = -3, \quad u_{15} = 32 \quad (1)$$
[illegible]

الوسط الحسابي:

 [2]



 [11]

- ▶ إذا كان r سالبا تماما ($r < 0$) فإن المتتالية متناقصة تماما .
- ▶ إذا كان r موجبا تماما ($r > 0$) فإن المتتالية متزايدة تماما .
- ▶ إذا كان r معدوما ($r = 0$) فإن المتتالية ثابتة .

→ إلى الحل

تطبيق 10:

• عيّن الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 ، u_2 لمتتالية حسابية حيث :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$$

الحل:

مجموع الحدود:

 [11]

◀ عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

أمثلة:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \quad \blacktriangleleft$$

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right) \quad \text{◀ بصفة عامة:}$$

➡ إلى الحل

 [10]

$$. S = 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 67 \quad (1)$$

$$.S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10 \quad (2)$$

$$. S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101 \text{ (3)}$$

$$\cdot S = 17 + 12 + 7 + 2 - 3 - 8 \dots - 53 \text{ (4)}$$

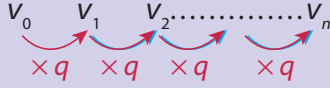
الحل:

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

8 المتتالية الهندسية :

تعريف:

- ◀ نقول أن (V_n) متتالية هندسية أساسها q ($q \in \mathbb{R}^*$) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1} = V_n \times q$
- ◀ إذن في متتالية هندسية تنتقل من حد إلى الحد الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي نفسه q



طريقة:

- للبرهان على أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يكفي إثبات أن النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت. هذا العدد هو q أساس المتتالية.

الانتقال
إلى الحل

[10]

تطبيق 12: • أكد إذا كانت المتتالية (u_n) هندسية أم لا .

• $u_n = 3^{2n-1}$ (4)

• $u_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$ (3)

• $u_n = \frac{1}{2^n - 1}$ (2)

• $u_n = -5 \times 3^n$ (1)

• $u_n = \sqrt{2^n}$ (8)

• $u_n = \sqrt{2n}$ (7)

• $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 3u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ (6)

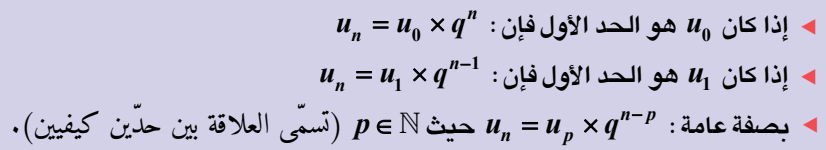
• $u_n = \frac{4^n}{6}$ (5)

الحل:



Handwriting practice area with 25 horizontal dotted lines.

 [2]



تطبيق 13:

الحَدّ العام
a. $u_n = (-3)^n \times 4$
b. $u_n = (-4)^n \times 3$
c. $u_n = -3 \times 4^n$
d. $u_n = (-4) \times 3^n$

(1) $u_5 = 88$ و $u_8 = 11$. أحسب q و u_{100} .

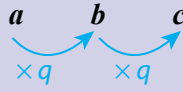
الحل:

الوسط الهندسي:

[8]

[2]

• إذا كانت a, b, c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن: $a \times c = b^2$



[2]

[11]

• اتجاه تغير متتالية هندسية يتعلق بإشارة u_0 و q لأن:

$$u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n(q - 1) = u_0 \times q^n(q - 1)$$

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) غير رتيبة	(u_n) غير رتيبة
$0 < q < 1$	(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما
$q = 1$	(u_n) ثابتة	(u_n) ثابتة
$q > 1$	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) متزايدة تماما

حالات خاصة: ◀ إذا كان $q=0$ فإنه إبتداء من u_1 كل الحدود معدومة.

◀ إذا كان $u_0=0$ فإن كل الحدود معدومة.

الانتقال

إلى الحل

[2]

تطبيق 14:

• لكل متتالية هندسية (u_n) أساسها q ، صل الكلمة المناسبة لرتابتها المحتملة، وذلك حسب قيمة الحد u_0 المرفق.

الأساس q لـ (u_n)
1. $q = 5$
2. $q = -5$
3. $q = 0,5$

الرتابة
غير رتيبة
متزايدة تماما
متناقصة تماما

(1) $u_0 = 4,21$

الأساس q لـ (u_n)
1. $q = 5$
2. $q = -5$
3. $q = 0,5$

الرتابة
غير رتيبة
متزايدة تماما
متناقصة تماما

(2) $u_0 = -4,21$

الانتقال

إلى الحل

[10]

تطبيق 15:

• لتكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها سالبة .

(1) ما يمكن القول عن أساسها .

(2) إذا علمنا أن: $u_1 \times u_3 = \frac{1}{4}$ و $u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{19}{12}$. أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

الحل:



Handwriting practice area with 20 horizontal dotted lines.

مجموع الحدود:

• مجموع حدود متتالية هندسية يعطى بالعلاقة التالية: $S_n = \text{الحد الأول} \times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} \right)$

◀ عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

مجاميع وجداءات مهمة وشهيرة:

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{\text{مرة } m} = ma$$

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{\text{مرة } m} = a^m$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a \times a^2 \times a^3 \times \dots \times a^n = a^{1+2+3+\dots+n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

أمثلة: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ ◀

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ◀

بصفة عامة: $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$ ◀

الانتقال

إلى الحل

[13]

تطبيق 16:

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_n = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$ (الأساس $q = \frac{1}{3}$ و الحد الأول $v_0 = 2$)

ولتكن المتتالية (w_n) حيث $v_n = w_n + a$ (مع عدد a حقيقي غير معدوم)

• احسب المجاميع والجداءات التالية:

(1) $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(2) $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{2n}$

(3) $S_3 = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

(4) $S_4 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

(5) $S_5 = v_0 + v_2 + \dots + v_{2n}$

(6) $P_1 = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

(7) $S_6 = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$ (بطريقتين)

الحل:



Handwriting practice area with 20 horizontal dotted lines.

الحد العام (بدلالة الحد الأول)

$$v_n = v_0 \times q^n$$

الحد العام (بدلالة حد كيني)

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

اتجاه التغير

$q < 0$: ليست رتيبة .

$q = 1$: ثابتة .

$0 < q < 1$: $v_0 > 0$: متناقصة تماما .

$v_0 < 0$: متزايدة تماما .

$q > 1$: $v_0 > 0$: متزايدة تماما .

$v_0 < 0$: متناقصة تماما .

مجموع حدود متتابعة

$$S = (\text{الحد الأول}) \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$$

الوسط الهندسي

a و b و c ثلاث حدود متتابعة

$$a \times c = b^2$$

عدد الحدود = دليل الحد ناقص دليل الحد الأول زائد 1
رتبة حد

المتتاليات العددية

الحسابية

$$u_{n+1} = u_n + r$$

الهندسية

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

اتجاه التغير

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

أصغر من 1

متناقصة تماما

أكبر من 1

متزايدة تماما

فقط في حالة $u_n > 0$

$$u_{n+1} - u_n$$

-

متناقصة تماما

0

ثابتة

+

متزايدة تماما

النهايات

$q \leq -1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \text{غير موجودة} \rightarrow v_n \text{ متباعدة}$

$-1 < q < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \rightarrow v_n \text{ متقاربة}$

$q = 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1 \rightarrow v_n \text{ متقاربة}$

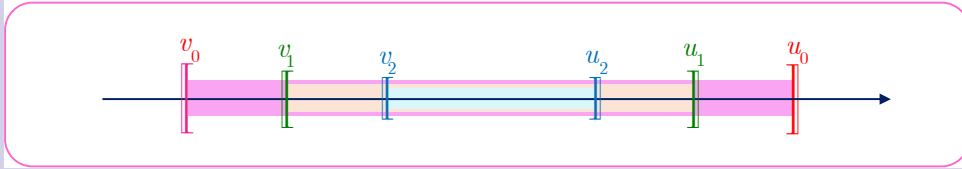
$q > 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \rightarrow v_n \text{ متباعدة}$

9

تعریف:

• تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت إحدهما متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

 [5]



مېرھنت:

 [10]

• إذا كانت (u_n) و (v_n) متاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

➡ إلى الحل

 [10]

تطبيق 17:

• لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

• $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$: n عدد طبيعي و $v_0 = 1$ ، $u_0 = 12$

• نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

(1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n . ما هي نهاية (w_n) ؟

(2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n) ؟

(3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

(4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

الحل:

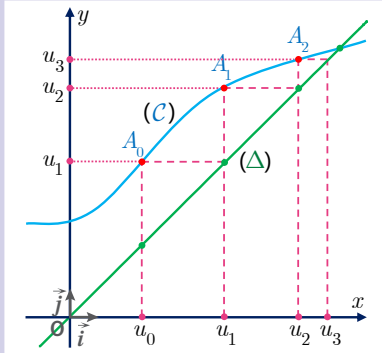


Handwriting practice area with 20 horizontal dotted lines.

التمثيل البياني لمتتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$:

طريقة:

[5]



• في الشكل المجاور، (C) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نعيّن العدد الحقيقي u_0 على محور الفواصل، ثمّ النقطة A_0

ذات الفاصلة u_0 على التمثيل البياني (C) ، نرمز إلى

ترتيب A_0 بالرمز u_1 فيكون $u_1 = f(u_0)$.

• نعيّن u_1 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم (Δ)

الذي معادلته $y = x$ ، u_1 هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ)

والمستقيم الذي معادلته $y = u_1$.

• نرمز إلى ترتيب النقطة A_1 من (C) ، التي فاصلتها u_1 بالرمز u_2 فيكون $u_2 = f(u_1)$. نعيّن

u_2 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم (Δ) كما في السابق. ونتابع بهذا لتعيين القيم المتوالية

للمتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$.

الانتقال

إلى المحل

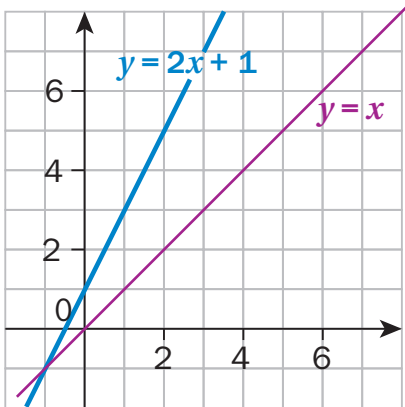
[2]

تطبيق 18:

• في كلّ حالة من الحالات التالية، مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأولى للمتتالية (u_n) ، ثمّ ضع تخميناً حول اتجاه تغيّرها ونهايتها.

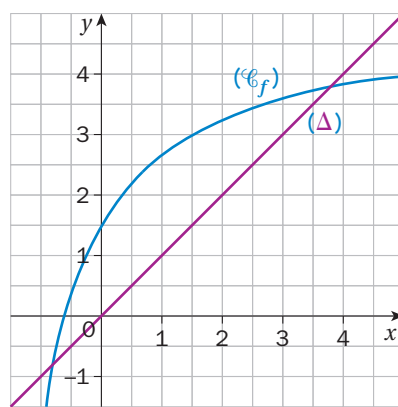
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

(3)



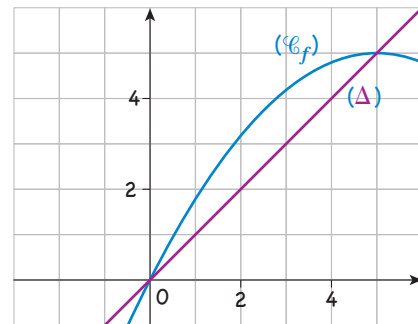
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(2)



$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = -0,2u_n(u_n - 10) \end{cases}$$

(1)



الحل:

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس : الانتقال الى المحل

16 يعطى الحدان $v_1 = \sqrt{2}$ ، $v_2 = 1$ من متتالية (v_n)

المعرفة على $\mathbb{N}$. المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

17 كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى .

18 كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0

فتكون نهايتها معدومة .

19 كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي محدودة .

20 المتتاليات (u_n) أدناه ، متتاليات هندسية ؟

- a. « $u_{n+1} = -3,14 u_n$ » ☐ b. « $u_{n+1} = 3,14 + u_n$ » ☐
c. « $u_{n+1} = \pi u_n$ » ☐ d. « $u_{n+1} = \pi^2 u_n$ » ☐
e. « $u_{n+1} = \pi - u_n$ » ☐ f. « $u_{n+1} = \frac{u_n}{3,14}$ » ☐

إتجاه تغيير متتالية عددية:

• اربط كل متتالية (u_n) معرفة أدناه برتابتها المحتملة ، علماً أن $u_0 = 2,5$.

العلاقة التراجعية
1. $u_{n+1} = u_n - 2n$; $n \in \mathbb{N}$
2. $u_{n+1} = u_n + 0,2n$; $n \in \mathbb{N}$
3. $u_{n+1} = -u_n$; $n \in \mathbb{N}$

الرتابة
a. غير رتيبة
b. متزايدة
c. متناقصة

• اربط كل متتالية أدناه ، نفرض أنها موجبة تماماً ، برتابتها .

العلاقة التراجعية
1. $u_{n+1} = (2 + n)u_n$; $n \in \mathbb{N}$
2. $u_{n+1} = 0,2u_n$; $n \in \mathbb{N}$
3. $u_{n+1} = u_n$; $n \in \mathbb{N}$

الرتابة
a. ثابتة
b. منزايدة
c. متناقصة

• اربط كل متتالية (u_n) معرفة أدناه برتابتها المحتملة .

عبارة الحد العام
1. $u_n = 7n + 0,3$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = -0,7n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = -1$ avec $n \in \mathbb{N}$
4. $u_n = n \times (-4)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

الرتابة
a. متزايدة
b. غير رتيبة
c. متناقصة
d. ثابتة

أجب ب "صح" أو "خطأ":

1 للبرهان على صحة خاصية $p(n)$ نفرض صحة

$p(n)$ و نبهرن صحة $p(n+1)$.

2 المتتالية (u_n) حيث : $u_n = 4n - 3$ هي متتالية

تراجعية .

3 المتتالية (v_n) المعرفة بالعبارة : $u_n = an + b$

هي متتالية حسابية أساسها a و حدها الأول b .

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1000} \right)^n = +\infty$

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{840} \right)^n = 0$

6 النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{10} \right)^n$ غير موجودة .

7 إذا كان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن المتتاليتين

(u_n) و (v_n) متجاورتان .

8 $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99} = \frac{1 - 4^{100}}{1 - 4}$

9 $3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = \frac{(2n+4)(n)}{2}$

10 كل متتالية حسابية غير ثابتة متباعدة .

11 كل متتالية هندسية متقاربة .

12 إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ، $\ell \neq 0$

فإن (u_n) متقاربة .

13 إذا كانت متتالية محدودة فهي متقاربة .

14 المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_{n+1} = u_n - 3$

هي متتالية متناقصة .

15 المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة

$u_n = (-1)^n$ ، تقبل نهايتين : -1 و 1 .

الانتقال
إلى الحل



في أقل من 40 ثانية !

• اربط كل متتالية (u_n) بمتتالية (v_n) يمكننا مقارنتها بها ،

ثم حدّد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

أجزاء مفقودة:

• وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مفروضة بسبب ملامسته للحبر . ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر .

النص

(w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$w_n = \sqrt{n+1} - \dots$$

أ. أثبت أنه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$.

ب. برّر أنه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \leq w_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

ج. استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \dots$.

الحل

أ. من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$$w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} .$$

ب. من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $w_n \geq 0$ ، و $w_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ، وأخيراً $w_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$w_n \geq 0 .$$

كما أن $n+1 \geq \sqrt{n}$ إذن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ وعليه

$$w_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ وأخيراً } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} .$$

ج. لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ إذن حسب مبر $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 .$$

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ ...
1. $u_n = 2n^2 + \cos(n)$
2. $u_n = 3n + (n+1)^{10}$
3. $u_n = -3n^2 + \sin(n)$
4. $u_n = -n - 1 - (-1)^n$

(v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ ...
a. $v_n = -n$
b. $v_n = 3n$
c. $v_n = 2n^2 - 1$
d. $v_n = -3n^2 + 1$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$



في أقل من 30 ثانية !

• اربط كل متتالية (u_n) بزوج من المتتاليتين (v_n) و (w_n) ، المعرفة

على $\mathbb{N}^*$ ، بحيث يمكننا حصرها بهما ، ثم حدّد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ ...
1. $u_n = \frac{2 + \cos(n)}{n}$
2. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \frac{\sin(n) + \cos(n)}{n}$

(v_n) و (w_n) معرّفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ ...
a. $v_n = -\frac{2}{n}$; $w_n = \frac{2}{n}$
b. $v_n = \frac{1}{n}$; $w_n = \frac{3}{n}$
c. $v_n = \frac{n-1}{n}$; $w_n = \frac{n+1}{n}$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

الانتقال
إلى الحل لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 لتكن القضية P_n : « $3^n \geq n + 2$ ». القضية P_{n+1} هي :	« $3^{n+1} \geq n + 2$ »	« $3 \times 3^n \geq (n + 1) + 2$ »	« $3^n + 1 \geq n + 3$ »	« $3^{n+1} \geq n + 3$ »
02 لتكن القضية P_n : « $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ». القضية P_{n+1} هي :	« $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$ »	« $2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ »	« $1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ »	« $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 1 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 1$ »
03 المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n = 2 + \frac{5}{n}$	الحد الأول هو v_0	الحد الأول هو v_1	الحد الذي يلي v_5 هو v_4	الحد الذي يسبق v_5 هو v_4
04 المتتالية (b_n) معرفة بـ $b_1 = 1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} = b_n - 5$	$b_0 = 6$	b_0 غير موجود	$b_3 = -9$	$b_3 = -11$
05 المتتالية (b_n) معرفة بـ $b_1 = 5$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} = b_n - 11$. هي	حسابية أساسها 5	حسابية أساسها -11	متزايدة	متناقصة
06 المتتالية (d_n) معرفة بـ $d_0 = -7$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $d_{n+1} = 1,5d_n$. هي	هندسية أساسها -7	هندسية أساسها 1,5	متزايدة	متناقصة
07 المتتالية (t_n) معرفة بـ $t_0 = -3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $t_{n+1} = 5t_n - 0,8$. هي	حسابية	هندسية	حسابية وهندسية	ليست حسابية ولا هندسية
08 المتتالية (u_n) تحقق : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.	(u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$	(u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$	$u_3 < u_4$.	لا نستطيع تحديد اتجاه تغير (u_n)
09 إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$ فإن :	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - d_n) = 0$.	لا نستطيع تحديد نهاية $(c_n - d_n)$ مباشرة	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{d_n} = 1$.	لا نستطيع تحديد نهاية $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$ مباشرة
10 المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \frac{2^n + 5}{3 \times 2^n}$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{5}{3}$.	(v_n) ليس لها نهاية
11 إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ ومن أجل n كبير بالقدر الكافي $y_n \leq x_n$ فإن :	$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$.	(y_n) متقاربة	(y_n) متباعدة	لا نستطيع تحديد نهاية y_n



تطبيق 01: [4] [5] [9]

1 - من أجل $n=0$ لدينا : $0=0$ و منه $p(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $p(n)$ و نبرهن صحة $p(n+1)$

$$p(n): 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ الفرضية:}$$

$$p(n+1): 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ المطلوب:}$$

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ لدينا:}$$

و منه: $p(n+1)$ صحيحة. إذن: $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2 نسمي p_n الخاصية " $2^n \geq n+1$ "
التحقق من صحة p_0 :

من أجل $n=0$ لدينا : $2^0 \geq 0+1$ أي : $1 \geq 1$ وهي محققة. إذن : p_0 صحيحة

نفرض صحة p_n أي : $2^n \geq n+1$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $2^{n+1} \geq n+2$

من فرضية التراجع لدينا : $2^n \geq n+1$ ومنه : $2^n + 2^n \geq (n+1) + 2^n$

أي : $2^{n+1} \geq (n+1) + 2^n$ ومنه : $2^{n+1} \geq (n+1) + 2^n$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ فإن $n \geq 0$ وبالتالي $2^n \geq 2^0$ أي $2^n \geq 1$

من العلاقة $2^{n+1} \geq (n+1) + 2^n$ والعلاقة $2^n \geq 1$ نستنتج أن

$2^{n+1} \geq (n+1) + 1$ أي : $2^{n+1} \geq n+2$ ومنه : p_{n+1} صحيحة

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $2^n \geq n+1$.

3 الخاصية $E(n)$ المطلوبة هي

$$E(n) \text{ « } 4^n + 2 \text{ مضاعف للعدد 3 »}$$

① الخاصية $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أن $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ مضاعف للعدد 3.

② نفترض أن $E(n)$ صحيحة، أي إن $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3. ثم نلاحظ أن

$$4^{n+1} + 2 = 4^n \times 4 + 2 = (4^n + 2) \times 4 - 8 + 2 = 4(4^n + 2) - 6$$

بحسب افتراضنا، $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3، إذن $4(4^n + 2)$ مضاعف للعدد 3، ومن ثم يكون

$4(4^n + 2) - 6$ مضاعفاً للعدد 3 لأنه مجموع مضاعفين للعدد 3. فالحقضية $E(n+1)$ صحيحة. إذن

$E(n)$ صحيحة مهما كان العدد الطبيعي n .



[5]

تطبيق 02:

$$u_n = \begin{cases} 3 & n \text{ زوجي} \\ 1 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	1	3	1	3	1

لدينا 1

ويمكن التعبير عن u_n بصيغة أخرى $u_n = 2 + (-1)^n$ ، التي يمكن إثبات صحتها بدلالة n .

2 بما ان المتتالية معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية فان الحد الذي رتبته 100 دليله 99 اذن $u_{99} = 2 + (-1)^{99} = 1$



[12]

[5]

[4]

تطبيق 03:

1 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

لمعرفة اتجاه تغير متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1 = n^2 + 2n$$

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) = 2n + 1 > 0$$

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

2 الحد العام للمتتالية من الشكل $u_n = f(n)$ ، حيث f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-1)(1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$$

من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، منه f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

3 لننأمل المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ وفق $w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. جميع حدودها w_n موجبة

تماماً، ولدينا $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2}{3}$ أيأ كان العدد الطبيعي n . إذن، أيأ كان العدد الطبيعي n ، كان

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1 \text{ أو } w_{n+1} < w_n. \text{ فالمتتالية } (w_n)_{n \geq 0} \text{ متناقصة تماماً.}$$



[5]

[4]

[10]

تطبيق 04:

$$u_n - 2 = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4} - 2 = \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 8}{n^2 + 4} = \frac{-7}{n^2 + 4}$$

$$\frac{-7}{n^2 + 4} < 0 \text{، فنجد من أجل كل عدد طبيعي } n: \frac{-7}{n^2 + 4} < 0$$

وبالتالي، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 < 0$. أي أن $u_n < 2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

تتبع

2 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ حيث: $f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x}$

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		7	

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :
 نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
 $u_n \geq 7$ ، و المتتالية u_n محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

3 لدينا : $u_n - 1 = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} - 1 = \frac{2n}{1 + n(n-1)} \geq 0$
 ومنه يكون $1 \leq u_n \leq 3$ ، أيًا كانت n .
 $3 - u_n = 3 - \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} = \frac{2(n-1)^2}{1 + n(n-1)} \geq 0$



[5] [2]

تطبيق 05 :

المتتالية
7. $i_n = \frac{7 - 0,1^n}{2 + 0,99^n}$
8. $k_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$
9. $o_n = 16 \times \frac{1 - 1,1^n}{1 - 1,1}$
10. $p_n = 10 \times \frac{1 - 0,5^n}{0,5}$
11. $x_n = -\frac{5^n + 3^n}{4^n}$
12. $y_n = 4^n - 2^n$

النهاية
a. $-\infty$
b. 3,5
c. 0
d. 20
e. $+\infty$
f. 2
g. غير موجودة

المتتالية
1. $u_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$
2. $f_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$
3. $v_n = (-1)^n$
4. $w_n = 2^{-n}$
5. $t_n = 2$
6. $s_n = -3 \times (1,2)^n$



[5] [2]

تطبيق 06 :

المتتالية
7. $i_n = \cos\left(\frac{n\pi + 1}{2n + 1}\right)$
8. $k_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$
9. $o_n = \sqrt{\frac{4n - 3}{n + 1}}$
10. $p_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$
11. $w_n = \sqrt{n}(1 - 2n\sqrt{n})$
12. $y_n = \frac{3}{n} \times e^{-n}$

النهاية
a. $-\infty$
b. 1
c. 0
d. 4
e. $+\infty$
f. 2
g. 6

المتتالية
1. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
2. $f_n = \frac{3}{e^n} + 2$
3. $v_n = -2n^2 - n - 3$
4. $w_n = (1 - 2n)(n^2 + 3)$
5. $t_n = n^2 + (-1)^n$
6. $s_n = \frac{1}{n}(n^2 + 10)$



[10]

تطبيق 07:

1 (u_n) معرفة بـ $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

لدينا $u_0 = 5$ ، $u_1 = \sqrt{7}$ و $2 \leq \sqrt{7} \leq 5$ إذن $2 \leq u_1 \leq u_0$.

نفترض $2 \leq u_{k+1} \leq u_k$ يعني $4 \leq 2+u_{k+1} \leq 2+u_k$ بما أن الدالة الجذر التربيعي متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$

فإن $2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ أي $\sqrt{4} \leq \sqrt{2+u_{k+1}} \leq \sqrt{2+u_k}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2 من السؤال السابق ينتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة ونهايتها $l \geq 2$.

3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+l}$

إذن $l = \sqrt{2+l}$

لدينا $l \geq 2$ و $l = \sqrt{2+l}$ إذن $l^2 = 2+l$ معناه $l^2 - l - 2 = 0$ ومعناه $(l+1)(l-2) = 0$ يكافئ

$l = 2$ أو $l = -1$. بما أن $l \geq 2$ فإن $l = 2$.



[10]

تطبيق 08:

1 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

2 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها -3.

3 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 4n+5$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية.

4 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2n+1$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية.

5 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+3} - u_{n+2} = -\frac{4}{5}$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{4}{5}$ وحدها الأول $u_2 = \frac{3}{5}$.

6 من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+1}$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية.

7 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2.

8 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -5u_n$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية.



[10]

تطبيق 09:

1 $u_{15} = u_0 + 15r$ ومنه $r = \frac{u_{15} - u_0}{15} = 4$ ؛ $u_{2007} = u_0 + 2007r = 8027$.

2 $u_0 = u_{17} + (0-17)r = 1$.

3 $u_n = u_{15} + (n-15)r$ ونجد $n = 53$.

4 $r = \frac{u_{10} - u_5}{10-5} = -10$ ؛ $n = \frac{u_n - u_5}{r} + 5 = 15$.



[6]

تطبيق 10 :

$$u_0 + u_1 + u_2 = 3 \Rightarrow 3u_1 = 3 \Rightarrow u_1 = 1$$

$$u_0 \times \underbrace{u_1}_{=1} \times u_2 = -24 \Rightarrow \underbrace{u_0}_{u_1-r} \times \underbrace{u_2}_{u_1+r} = -24 \Rightarrow (1-r)(1+r) = -24 \Rightarrow 1-r^2 = -24 \Rightarrow r^2 = 25$$

بما أن السؤال لم يحدد طبيعة المتتالية (u_n) ، فإن $r = -5$ أو $r = 5$

$$\bullet \quad r = -5 \Rightarrow u_0 = 1 - (-5) = 6 ; u_2 = 1 + (-5) = -4 \Rightarrow (u_0, u_1, u_2) = (6, 1, -4)$$

$$\bullet \quad r = 5 \Rightarrow u_0 = 1 - 5 = -4 ; u_2 = 1 + 5 = 6 \Rightarrow (u_0, u_1, u_2) = (-4, 1, 6)$$

التحقيق :

$$u_0 + u_1 + u_2 = 6 + 1 - 4 = 3 ; u_0 \times u_1 \times u_2 = 6 \times 1 \times (-4) = -24$$



[10]

تطبيق 11 :

$$1 \quad S = \frac{63}{2}(5 + 67) = 2268$$

$$2 \quad S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10$$

$$S = \frac{20}{2} \left(\frac{1}{2} + 10 \right) \text{ وبالتالى } n = 20 \text{ معناه } a_n = 10 \text{ إذن } a_n = a_1 + (n-1) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}n ; a_1 = \frac{1}{2}$$

أي $S = 105$

$$3 \quad S = \frac{51}{2}(1 + 101) = 2601 ; u_n = 2n + 1$$

$$4 \quad S = (17 + 7 - 3 - 13 - 23 - 33 - 43 - 53) + (12 + 2 - 8 - 18 - 28 - 38 - 48)$$

$$S = 4(17 - 53) + \frac{7}{2}(12 - 48) = -270$$



[10]

تطبيق 12 :

$$1 \quad (u_n) \text{ هندسية و } r = 3 ; 2 \quad (u_n) \text{ ليست هندسية } ; 3 \quad (u_n) \text{ هندسية و } r = \frac{4}{3}$$

$$4 \quad (u_n) \text{ هندسية و } r = 9 ; 5 \quad (u_n) \text{ هندسية و } r = 4 ; 6 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} ; (u_n) \text{ ليست هندسية } ; 7 \quad (u_n) \text{ ليست هندسية } ; 8 \quad (u_n) \text{ هندسية و } r = \sqrt{2}$$



[2]

[10]

تطبيق 13 :

$$\bullet \quad u_{100} = \frac{11}{2^{92}} ; q = \frac{1}{2} \text{ ومنه } q^3 = \frac{1}{8} \quad 1$$

$$2 \quad u_2 = -80 ; u_0 = -320$$

(u_n) معرفة بـ :
1. $q = 3$ et $u_0 = -4$
2. $q = -3$ et $u_0 = 4$
3. $q = 4$ et $u_0 = -3$
4. $q = -4$ et $u_0 = 3$

الحّد العام
a. $u_n = (-3)^n \times 4$
b. $u_n = (-4)^n \times 3$
c. $u_n = -3 \times 4^n$
d. $u_n = (-4) \times 3^n$



[2]

تطبيق 14 :

الأساس $q \perp (u_n)$
1. $q = 5$
2. $q = -5$
3. $q = 0,5$

الرتابة
غير رتيبة
متزايدة تماما
متناقصة تماما

(1) $u_0 = 4,21$

الأساس $q \perp (u_n)$
1. $q = 5$
2. $q = -5$
3. $q = 0,5$

الرتابة
غير رتيبة
متزايدة تماما
متناقصة تماما

(2) $u_0 = -4,21$



[10]

تطبيق 15 :

(1) $0 < r < 1$

(2) $u_2 = -\frac{1}{2}$ ثم نحل المعادلة $12x^2 + 13x + 3 = 0$ ، $\Delta = 25$ ، $x' = -\frac{3}{4}$ ، $x'' = -\frac{1}{3}$ وبما أن المتتالية

متزايدة فإن $u_1 = -\frac{3}{4}$ ، $u_2 = -\frac{1}{2}$ ، $u_3 = -\frac{1}{3}$.



[13]

تطبيق 16 :

(1) $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$ إذا $S_1 = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \right) = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$

(2) $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{2n}$

S_2 عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 ولكن الإختلاف مع S_1 يكمن في عدد الحدود فقط

إذا $S_2 = v_0 \left(\frac{1 - (q)^{2n+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{\frac{2}{3}} \right) = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \right)$

(3) $S_3 = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

المتتالية (w_n) لا حسابية ولا هندسية ولكنها مكتوبة بدلالة المتتالية الهندسية (v_n) لدينا $w_n = v_n - a$

نكتب كل حدود لمتتالية (w_n) بدلالة حدود المتتالية (v_n) فيصبح لدينا: $S_3 = v_0 - a + v_1 - a + \dots + v_n - a$

نجمع حدود المتتالية (v_n) لوحدهم والأعداد $-a$ لوحدهم أيضا إذا $S_3 = \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{S_2} - \underbrace{a - a - a - \dots - a}_{(n+1) \text{ مرة}}$

هناك $n+1$ حد من الأعداد $-a$ لأن كل حد من حدود المتتالية (v_n) يرافقه عدد $-a$ إذا $S_3 = S_1 - a(n+1)$ < ٣

$$S_4 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} \quad \text{4}$$

لدينا $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{2} \times 3^n$ إذا بعد البرهان نجد أن $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها 3 $\frac{1}{q}$

و حدها الأول $\frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}$ إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد $S_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-3^{n+1}}{-2} \right) = \frac{1}{4} (3^{n+1} - 1)$

$$S_5 = v_0 + v_2 + \dots + v_{2n} \quad \text{5}$$

نلاحظ أن $\frac{v_{2n}}{v_{2n-2}} = \dots = \frac{v_2}{v_0} = q^2$ (قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه) إذا المجموع S_5 هو مجموع متتالية

هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_0 نسميها $x_n = v_0 \cdot (q^2)^n$ إذا $S_5 = x_0 + x_1 + \dots + x_n = v_0 \left(\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2} \right)$

$$P_1 = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \quad \text{6}$$

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي باستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية $v_n = v_0 q^n$

إذا $P_1 = v_0 \times v_0 q \times v_0 q^2 \times \dots \times v_0 q^n = \underbrace{v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0}_{\text{مرّة } (n+1)} \times q^1 \times q^2 \times \dots \times q^n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$

نلاحظ أن $1+2+3+\dots+n$ هو مجموع متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 (لاحظ أن المجموع بدأ من 1

و الفرق بين حد و الحد الذي يليه هو 1) إذا بعد تطبيق قانون مجموع متتالية حسابية نجد $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ومنه $P_1 = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$S_6 = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n \quad \text{7}$$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي

بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية $v_n = v_0 q^n$ فنجد: $S_6 = \ln v_0 + \ln v_0 \cdot q + \ln v_0 \cdot q^2 + \dots + \ln v_0 \cdot q^n$

نطبق خاصية الدالة اللوغاريتمية $\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$ يصبح لدينا $S_6 = \ln v_0 + \ln v_0 + \ln q + \ln v_0 + \ln q^2 + \dots + \ln v_0 + \ln q^n$

بتطبيق خاصية الدالة اللوغاريتمية $\ln a^n = n \ln a$ و بجمع الحدود $\ln v_0$ لوحدهم و الحدود من الشكل $\ln q^n$

لوحدهم نجد $S_6 = \underbrace{\ln v_0 + \ln v_0 + \dots + \ln v_0}_{\text{مرّة } (n+1)} + \ln q + 2 \ln q + \dots + n \ln q$

$$S_6 = (n+1) \ln v_0 + (1+2+\dots+n) \ln q$$

$$= (n+1) \ln v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \ln q$$

إذا $S_6 = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \ln \frac{1}{3}$

طريقة 2: (شرط أن نكون قد وجدنا جداء المتتالية الهندسية) نستخدم العلاقة $\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$

$$S_6 = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n) = \ln P_1 \quad \text{نجد}$$

$$S_6 = \ln\left(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \ln v_0^{n+1} + \ln q^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{إذا}$$

$$= (n+1) \ln v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \ln q$$



[10]

تطبيق 17:

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \quad \text{لدينا} \quad \mathbf{1}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n \quad \text{أي} \quad w_{n+1} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \frac{u_n - v_n}{12}$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11 \left(\frac{1}{12}\right)^n$. بما أن $-1 < \frac{1}{12} < 1$ متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} \quad \mathbf{2}$$

أي $t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n$ و $t_{n+1} = t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - v_n)}{3} = -\frac{2}{3} w_n \quad \text{و} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} \quad \mathbf{3}$$

إذن: $u_{n+1} - u_n = -\frac{22}{3} \left(\frac{1}{12}\right)^n$ و $u_{n+1} - u_n < 0$: n عدد طبيعي و المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(u_n - v_n)}{4} = \frac{1}{4} w_n \quad \text{و} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} \quad \mathbf{4}$$

إذن: $v_{n+1} - v_n = \frac{11}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^n$ و $v_{n+1} - v_n > 0$: n عدد طبيعي و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• نعلم أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ و $w_n = u_n - v_n$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤل إلى 0. إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4 المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية.

نعلم أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n + 8v_n = 44$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$.

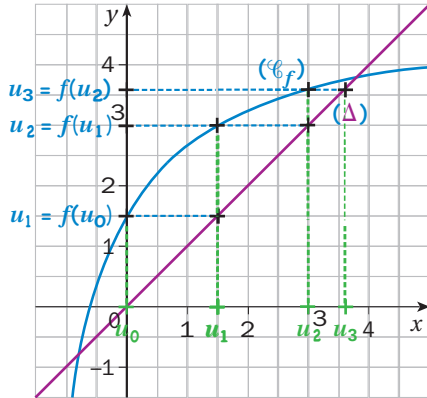
• نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$.



[2]

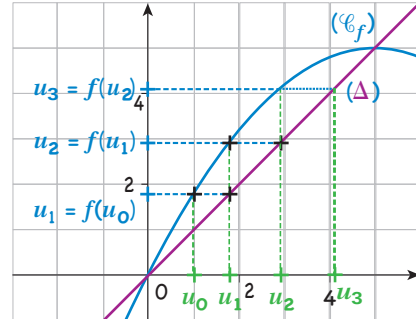
تطبيق 18:

2



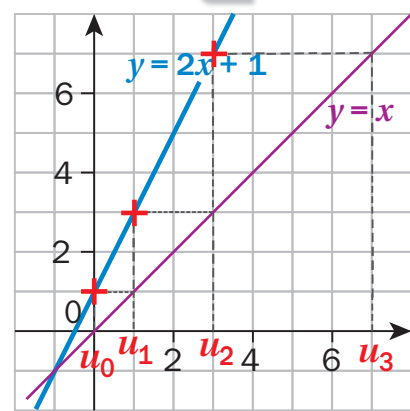
التخمين: (u_n) متزايدة تماماً ومتقاربة

1



التخمين: (u_n) متزايدة تماماً ومتقاربة نحو 5

3



التخمين: (u_n) متزايدة تماماً ومتباعدة نحو $+\infty$

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

16 خطأ لأنه لا يمكن الحكم على (v_n) أنها هندسية من الحدين v_1 و v_2 فقط .

17 صحيحة لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بعدها الأول .

18 كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، جملة خاطئة لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة

19 إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بعدها الأول؛ والجملة المعطاة صحيحة.

20 المتتاليات (u_n) أدناه ، متتاليات هندسية ؟

- a. « $u_{n+1} = -3,14 u_n$ » ☒ b. « $u_{n+1} = 3,14 + u_n$ » ☒
c. « $u_{n+1} = \pi u_n$ » ☒ d. « $u_{n+1} = \pi^2 u_n$ » ☒
e. « $u_{n+1} = \pi - u_n$ » ☒ f. « $u_{n+1} = \frac{u_n}{3,14}$ » ☒

إتجاه تغير متتالية عددية: [6] [4]

• اربط كل متتالية (u_n) معرفة أدناه برتابتها المحتملة ، علماً أن $u_0 = 2,5$.

العلاقة التراجعية	الرتابة
1. $u_{n+1} = u_n - 2n$; $n \in \mathbb{N}$	a. غير رتيبة
2. $u_{n+1} = u_n + 0,2n$; $n \in \mathbb{N}$	b. متزايدة
3. $u_{n+1} = -u_n$; $n \in \mathbb{N}$	c. متناقصة

• اربط كل متتالية أدناه ، نفرض أنها موجبة تماماً ، برتابتها .

العلاقة التراجعية	الرتابة
1. $u_{n+1} = (2 + n)u_n$; $n \in \mathbb{N}$	a. ثابتة
2. $u_{n+1} = 0,2u_n$; $n \in \mathbb{N}$	b. متزايدة
3. $u_{n+1} = u_n$; $n \in \mathbb{N}$	c. متناقصة

• اربط كل متتالية (u_n) معرفة أدناه برتابتها المحتملة .

عبارة الحد العام	الرتابة
1. $u_n = 7n + 0,3$ avec $n \in \mathbb{N}$	a. متزايدة
2. $u_n = -0,7n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$	b. غير رتيبة
3. $u_n = -1$ avec $n \in \mathbb{N}$	c. متناقصة
4. $u_n = n \times (-4)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	d. ثابتة

أجب ب "صح" أو "خطأ": [6] [4]

1 للبرهان على صحة خاصية $p(n)$ نفرض صحة $p(n)$ ونبرهن صحة $p(n+1)$. ☒

2 المتتالية (u_n) حيث : $u_n = 4n - 3$ هي متتالية تراجعية. ☒

3 المتتالية (v_n) المعرفة بالعبارة : $u_n = an + b$ هي متتالية حسابية أساسها a و حدها الأول b . ☒

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1000} \right)^n = +\infty$ ☒

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{840} \right)^n = 0$ ☒

6 النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{10} \right)^n$ غير موجودة. ☒

7 إذا كان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان. ☒

8 $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99} = \frac{1 - 4^{100}}{1 - 4}$ ☒

9 $3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = \frac{(2n+4)(n)}{2}$ ☒

10 كل متتالية حسابية غير ثابتة متباعدة. ☒

11 كل متتالية هندسية متقاربة . ☒

12 إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, $\ell \neq 0$ فإن (u_n) متقاربة. ☒

13 إذا كانت متتالية محدودة فهي متقاربة . ☒

14 المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_{n+1} = u_n - 3$ هي متتالية متناقصة . ☒

15 خطأ لأن إذا قبلت متتالية نهاية فإنها تكون وحيدة.



[6]

في أقل من 40 ثانية !

• اربط كل متتالية (u_n) بمتتالية (v_n) يمكننا مقارنتها بها ،

ثم حدّد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

أجزاء مفقودة:

- وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حلّه ، لكنه يتضمن أجزاء غير مفروضة بسبب ملامسته للحبر . ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر .

النص

(w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} .$$

أ. أثبت أنه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

ب. برّر أنه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \leq w_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

ج. استنتج أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$..

الحل

أ. من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} . \end{aligned}$$

ب. من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\sqrt{n+1} > 0$ و $\sqrt{n} > 0$ إذن

$$w_n \geq 0 .$$

كما أنّ $n+1 \geq \sqrt{n}$ إذن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ وعليه

$$w_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ وأخيراً } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}$$

ج. لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ إذن حسب مبرهنة الحصر

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 .$$

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ ...
1. $u_n = 2n^2 + \cos(n)$
2. $u_n = 3n + (n+1)^{10}$
3. $u_n = -3n^2 + \sin(n)$
4. $u_n = -n - 1 - (-1)^n$

(v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ ...
a. $v_n = -n$
b. $v_n = 3n$
c. $v_n = 2n^2 - 1$
d. $v_n = -3n^2 + 1$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



[6]

في أقل من 30 ثانية !

• اربط كل متتالية (u_n) بزوج من المتتاليات (v_n) و (w_n) ، المعرفة

على $\mathbb{N}^*$ ، بحيث يمكننا حصرها بهما ، ثم حدّد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ ...
1. $u_n = \frac{2 + \cos(n)}{n}$
2. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \frac{\sin(n) + \cos(n)}{n}$

(w_n) و (v_n) معرّفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ ...
a. $v_n = -\frac{2}{n}$; $w_n = \frac{2}{n}$
b. $v_n = \frac{1}{n}$; $w_n = \frac{3}{n}$
c. $v_n = \frac{n-1}{n}$; $w_n = \frac{n+1}{n}$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$



QUIZ

لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 لتكن القضية P_n : « $3^n \geq n + 2$ ». القضية P_{n+1} هي :	« $3^{n+1} \geq n + 2$ »	« $3 \times 3^n \geq (n+1) + 2$ »	« $3^n + 1 \geq n + 3$ »	« $3^{n+1} \geq n + 3$ »
02 لتكن القضية P_n : « $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ». القضية P_{n+1} هي :	« $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$ »	« $2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ »	« $1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ »	« $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 1 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 1$ »
03 المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ $v_n = 2 + \frac{5}{n}$ بـ	الحد الأول هو v_0	الحد الأول هو v_1	الحد الذي يلي v_5 هو v_4	الحد الذي يسبق v_5 هو v_4
04 المتتالية (b_n) معرفة بـ $b_1 = 1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} = b_n - 5$	$b_0 = 6$	b_0 غير موجود	$b_3 = -9$	$b_3 = -11$
05 المتتالية (b_n) معرفة بـ $b_1 = 5$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} = b_n - 11$. هي	حسابية أساسها 5	حسابية أساسها -11	متزايدة	متناقصة
06 المتتالية (d_n) معرفة بـ $d_0 = -7$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $d_{n+1} = 1,5d_n$. هي	هندسية أساسها -7	هندسية أساسها 1,5	متزايدة	متناقصة
07 المتتالية (t_n) معرفة بـ $t_0 = -3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $t_{n+1} = 5t_n - 0,8$. هي	حسابية	هندسية	حسابية وهندسية	ليست حسابية ولا هندسية
08 المتتالية (u_n) تحقق : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.	(u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$	(u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$	$u_3 < u_4$.	لا نستطيع تحديد اتجاه تغير (u_n)
09 إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$ فإن :	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - d_n) = 0$.	لا نستطيع تحديد نهاية $(c_n - d_n)$ مباشرة	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{d_n} = 1$.	لا نستطيع تحديد نهاية $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$ مباشرة
10 المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \frac{2^n + 5}{3 \times 2^n}$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{5}{3}$.	(v_n) ليس لها نهاية
11 إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ ومن أجل n كبير بالقدر الكافي $y_n \leq x_n$ فإن :	$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$.	(y_n) متقاربة	(y_n) متباعدة	لا نستطيع تحديد نهاية y_n



الانتقال
الى الحل

★ علوم تجريبية 2011 الموضوع الأول (07 نقاط) BAC

1

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل
1 المتتالية (v_n) :

(أ) حسابية (ب) هندسية (ج) لا حسابية ولا هندسية

2 نهاية المتتالية (u_n) هي :

(أ) $+\infty$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $-\infty$

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2}(1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3})$

(أ) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ (ب) $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ (ج) $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$



الانتقال
الى الحل

★ آداب وفلسفة + لغات أجنبية 2013 الموضوع الثاني (06 نقاط) BAC

2

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها 5 بحيث : $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = 34$

1 أحسب U_0 .

2 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = 5n + 1$.

3 عين العدد الطبيعي n بحيث : $U_{n+1} + U_n - 8n = 4033$.

4 أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{2013}$.

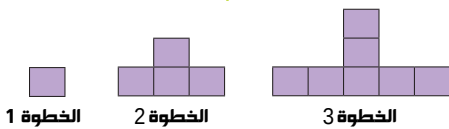
5 المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n = 2U_n + 1$

(أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n) .

(ب) احسب المجموع : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_{2013}$.

أجوبة

16



• كم عدد العرصات سيكون في الخطوة 100 ؟



الانتقال
الى الحل

★ تفسير واقتصاد 2014 الموضوع الأول (03 نقاط) BAC

3

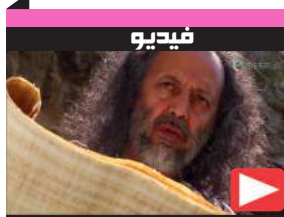
أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

• (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln u_n$

1 إذا كانت (u_n) متقاربة فإن (v_n) متقاربة.

2 إذا كانت (u_n) متناقصة فإن (v_n) متناقصة.

3 إذا كانت (u_n) هندسية فإن (v_n) حسابية.



فيديو
القصة الشقيقة لمبرهنة
فيثاغورس الشهيرة.

► fc.com/adel.maths17

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدّها الأول $u_1 = 7$ و $u_3 = 7$.

1 أ) احسب بدلالة r الجدائين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2 نضع $r = 3$.

أ) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

بين أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.

ج) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3 أ) اكتب الحد u_{n+5} بدلالة n .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.

ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً.



في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

• المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ب: $w_n = 4 \times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

S_n يساوي: (أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ (ب) $5^{n+1} - n^2$ (ج) $5^n - n^2$

• لنكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدّها الأول u_0 ، حيث: $u_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$

S_n يساوي: (أ) $\frac{n^2 - 1}{2}$ (ب) $\frac{n^2 + 1}{2}$ (ج) $\frac{n^2}{2}$

• لنكن (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$. عبارة P_n هي:

(أ) $e^{n(n+1)}$ (ب) $e^{(n+1)^2}$ (ج) $e^{-n(n+1)}$

• (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ هي:

(أ) $n = 31$ (ب) $n = 32$ (ج) $n = 33$

• المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n ب: $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المجموع $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ يساوي:

(أ) $-\ln(n+1)$ (ب) $\ln(n+2)$ (ج) $1 - \ln(n+1)$

• (w_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1

نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln w_n$. (v_n) هي متتالية :

(أ) هندسية. (ب) حسابية. (ج) لا حسابية و لا هندسية.

• نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$

(أ) (u_n) حسابية (ب) (u_n) هندسية (ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

• الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو :

(أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ (ب) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (ج) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$

• a عدد حقيقي، الأعداد a ، $a+2$ ، $a+6$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل :

(أ) $a = 2$ (ب) $a = -2$ (ج) $a = 4$

• β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^\beta + 1$ ، $e^\beta + 2$ ، $2e^\beta$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي :

(أ) $\ln(\sqrt{5} - 1)$ (ب) 0 (ج) $\ln(1 + \sqrt{5})$

• (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 3^{-2n}$. (v_n) متتالية هندسية أساسها :

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) 9 (ج) -9



الانتقال

الى الحل

★ علوم تجريبية 2014 الموضوع الثاني (04 نقاط) BAC

6

(I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري) .

1 بين أن (u_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2 احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

1 عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2 (أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.

(ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.



الانتقال

الى الحل

★ شعبة علوم الطبيعة والحياة (النظام القديم) BAC

7

1 بين أنه إذا كانت a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية حدودا متعاقبة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية فإن :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

2 جد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 و مجموع مربعاتها 3276 .



1 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماماً على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2 (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين المستوى الثاني



الانتقال

الى الحل

☆☆

BAC تسيير واقتصاد 2014 الموضوع الثاني (04.5 نقطة)

1

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1 أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2 لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$.

أ/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.

ب/ احسب الأساس q ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

الانتقال

الى الحل

☆☆

تمارين المراجعة النهائية (سعيد وزاني)

2

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + 3n + 4$.

و (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3n + 4$.

1 بين أن (v_n) متتالية حسابية. عين أساسها وحدها الأول.

2 نعتبر المجموع حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

3 بين أن $S_n = u_n - u_0$.

4 استنتج الحد العام u_n بدلالة n . ما رتبة الحد الذي قيمته 13 ؟

الانتقال

الى الحل

BAC بكالوريا الهند (أفريل 2004)

3

(I) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$.

1 احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

2 قارن بين الحدود الأربعة للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ والحدود الأربعة للمتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، حيث: $w_n = \frac{n}{n+1}$.

3 باستعمال البرهان بالتراجع، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n$.

(II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1 برهن أن: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = -\ln 5$.

2 اكتب بدلالة n المجموع S_n ، حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

3 احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

الانتقال

الى الحل

☆☆

BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الأول (04 نقاط)

4

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$.

1 بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب حدّها الأول .

2 أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3 أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4 أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

الانتقال

الى الحل



BAC تسيير واقتصاد 2020 الموضوع الثاني (04 نقاط)

5

المتتالية الهندسية (v_n) حدّها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و :

$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$$

1 بيّن أنّ : $v_5 = 32$ و $v_3 = 8$

2 أ . بيّن أنّ : $q = 2$ و $v_0 = 1$

ب . اكتب v_n بدلالة n .

ج . هل العدد 1024 حدّ من حدود المتتالية (v_n) ؟

3 المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ب : $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ . تحقّق أنّ : $w_n = u_n + v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_0 .

ب . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

الانتقال

الى الحل



BAC تسيير واقتصاد 2013 الموضوع الأول (05 نقاط)

6

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$$

1 عين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2 نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثم احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية .

3 عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها .

4 نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنّه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بيّن أنّ :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

الانتقال

الى الحل



BAC علوم تجريبية 2017 الاستثنائية الموضوع الأول (04 نقاط)

7

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1 احسب الحدين : u_1 و v_1 .

2 أ) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما .

تتو

- 3 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$.
 برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .
- 4 بيّن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

f الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{e \cdot x + 1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1 أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n + 1}$ ،

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برّر أنّها متقاربة .

2 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1}$

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n .

3 أ) تحقق أنّه من أجل كل n من : $v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

تمايز المستوى الثالث

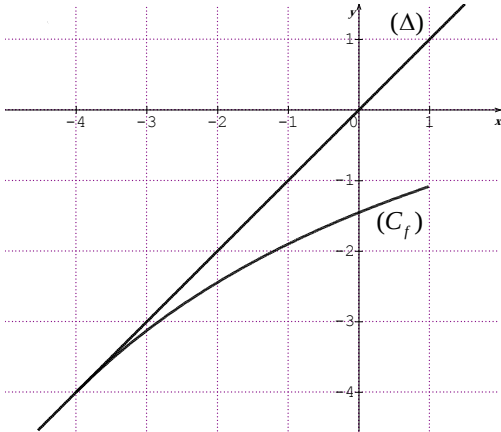


الانتقال

الى الحل

علوم تجريبية 2017 الموضوع الثاني (04 نقاط) ★★★

1



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$

ولكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

I تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثم بين أن:

من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

II (u_n) متتالية معرفة بهذا الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1 انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$

ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3 لنكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع S حيث

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$$

الانتقال

الى الحل

علوم تجريبية 2017 الاستثنائية الموضوع الثاني (04 نقاط) ★★★

2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بهذا الأول $u_0 = \alpha$ حيث

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

I عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

1 انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل

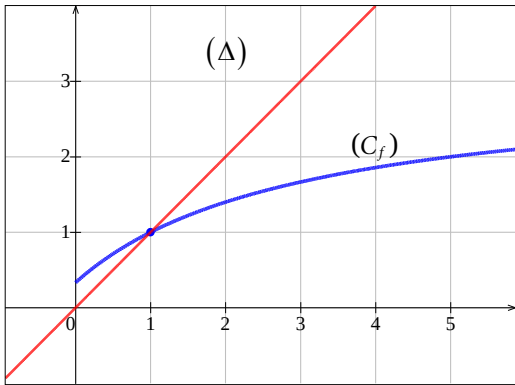
الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب عبّر بدلالة n عن u_n و v_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$



تتو

3 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + \frac{1}{u_{n+2}+1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$

الانتقال

الى الحل

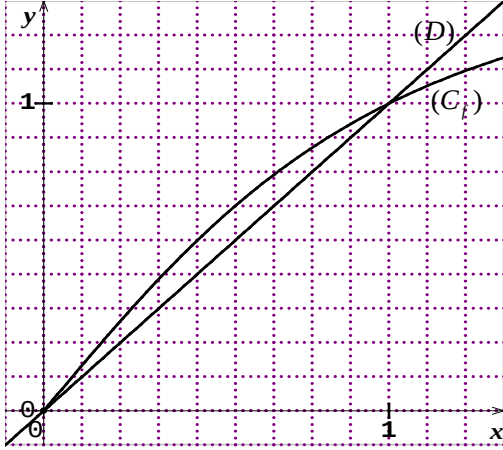
☆☆☆

BAC تقني رياضي 2020 الموضوع الأول (04 نقاط)

3

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$ تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1 أ. أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل

الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزاً خطوط الإنشاء.

ب. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2 أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً، ثم استنتج أنها مقاربة.

3 المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ يُطلب تعيين حددها الأول v_0 .

4 أ. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب. احسب نهاية المتتالية (u_n) .

الانتقال

الى الحل

☆☆☆

BAC رياضيات 2014 الموضوع الثاني (04.5 نقاط)

4

الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

1 بين أن الدالة f متزايدة تماماً.

2 (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 دون حسابها.

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

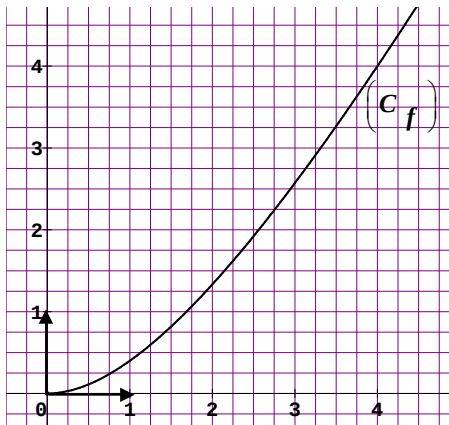
3 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة.

ج) استنتج أن (U_n) مقاربة.

4 أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ واستنتج أنه من أجل كل

عدد طبيعي n : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$



تتو

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$;
(ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما $n \rightarrow +\infty$

الانتقال
الى الحل

بكالوريا الهند (أفريل 2003) ★★★

5

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= a \text{ حيث } a \text{ عدد حقيقي من المجال }]0; 1[\\ u_{n+1} &= (2 - u_n) \cdot u_n \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \end{aligned} \right\}$$

1 نفرض في هذا السؤال أن : $a = \frac{1}{8}$.

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني (p) الممثل للدالة f المعرفة في المجال $[0; 2]$ بـ $f(x) = x(2 - x)$ ، والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x$ استخدم (p) و (d) لتمثيل النقط A_0, A_1, A_2 و A_3 التي فواصلها u_0, u_1, u_2, u_3 على الترتيب . (وحدة الطول 8 cm)

2 نفرض في هذا السؤال أن a عدد حقيقي كيفي من المجال $]0; 1[$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ج- ماذا تستنتج ؟

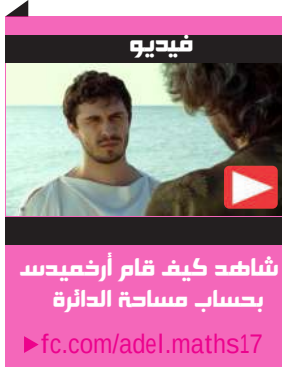
3 نضع $a = \frac{1}{8}$ ، ونعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = 1 - u_n$.

أ- احسب v_0 و v_1 .

ب- اكتب عبارة v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج v_n بدلالة n .

ج- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د- احسب نهاية المتتالية (v_n) ، ثم نهاية المتتالية (u_n) .



الانتقال
الى الحل

علوم تجريبية 2015 الموضوع الثاني (05 نقاط) ★★★

6

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I الف الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1 عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

2 ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$.

3 مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

II نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1 أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها .

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2 أ) أثبت أنه من أجل كل n من n : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث : $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3 أ) أثبت أنه من أجل كل n من n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل n من n : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ؛ ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

الانتقال
الى الحل

رياضيات 2008 الموضوع الأول (06 نقاط) ★★★★★

7

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$
($\mathcal{C}_f$) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)
(الوحدة على المحورين 2 cm)

1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ و فسّر النتيجة هندسيا

ب) ادرس تغيّرات الدالة f

ج) باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى ($\mathcal{C}_f$)

د) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

2 نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ) باستعمال (D) و ($\mathcal{C}_f$) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$



الانتقال

الى الحل

تقني رياضي 2008 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★★★

8

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1 أ) ادرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0; 2]$

ب) أنشئ ($\mathcal{C}_f$) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (الوحدة على المحورين 4 cm)

ج) برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$

2 نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ) برّر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدين u_1 و u_2

ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى ($\mathcal{C}_f$) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق

تتبع

3 (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

(ب) برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ $u_{n+1} > u_n$

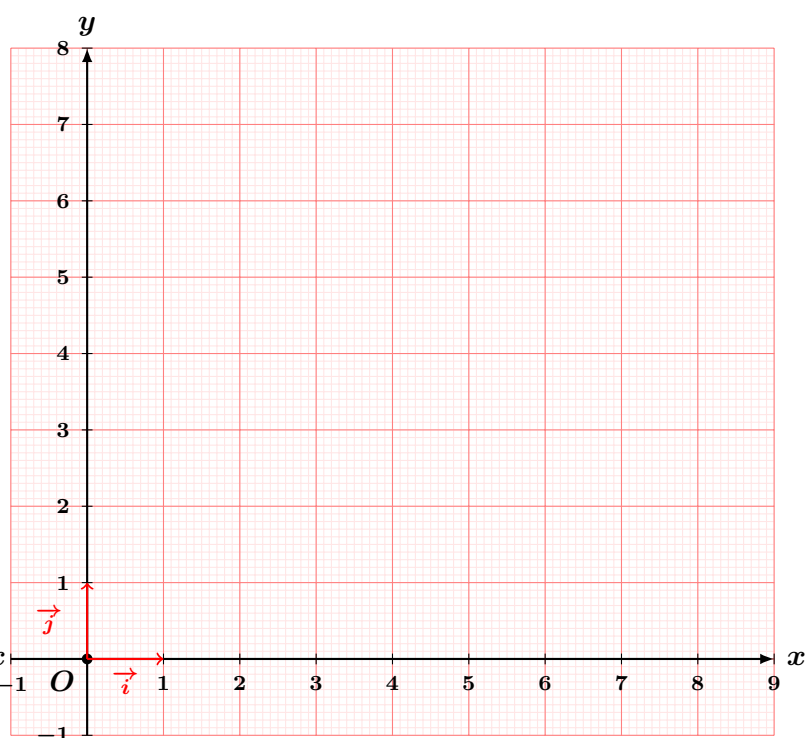
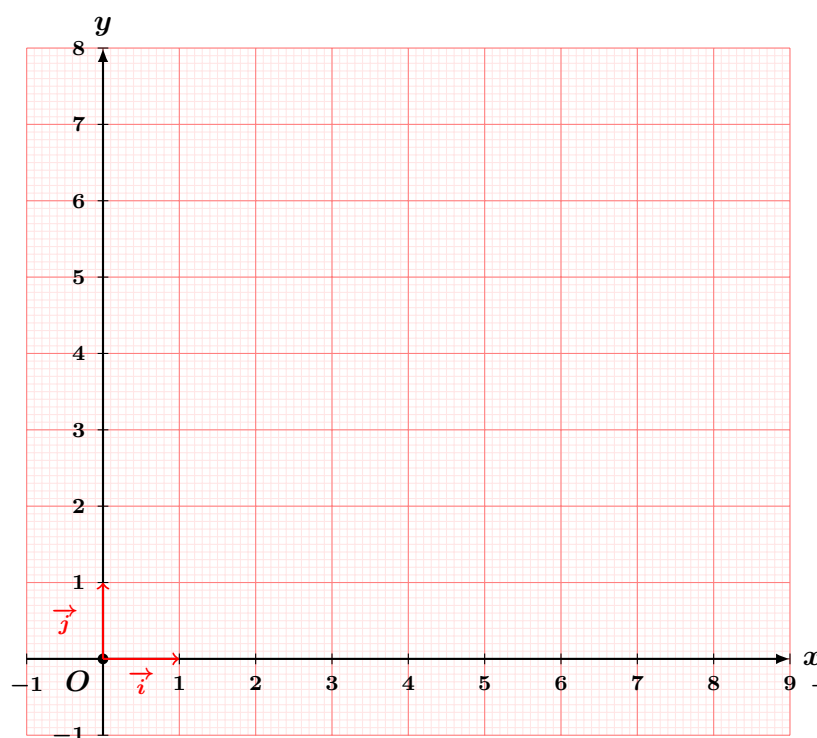
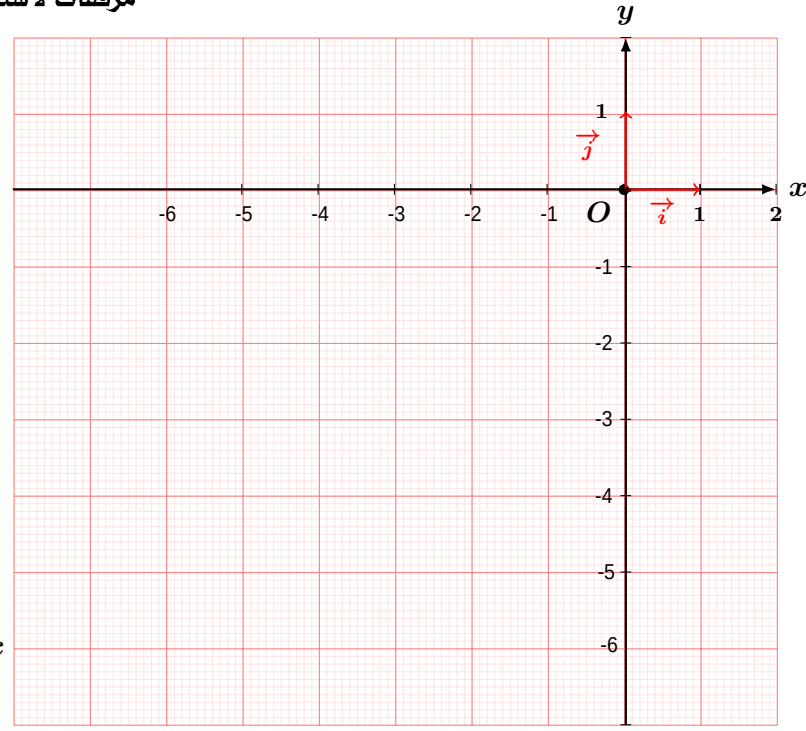
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟

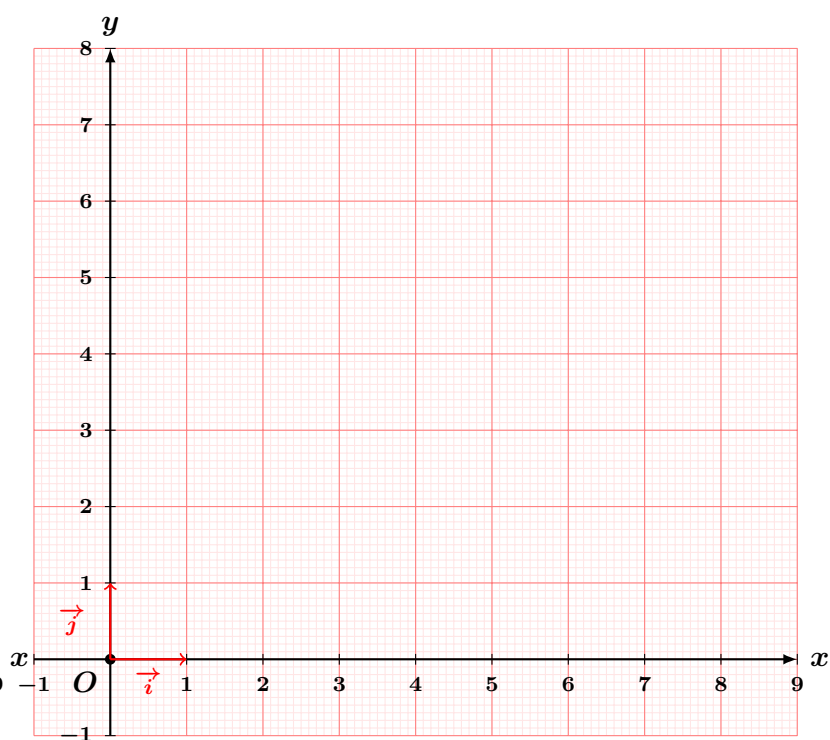
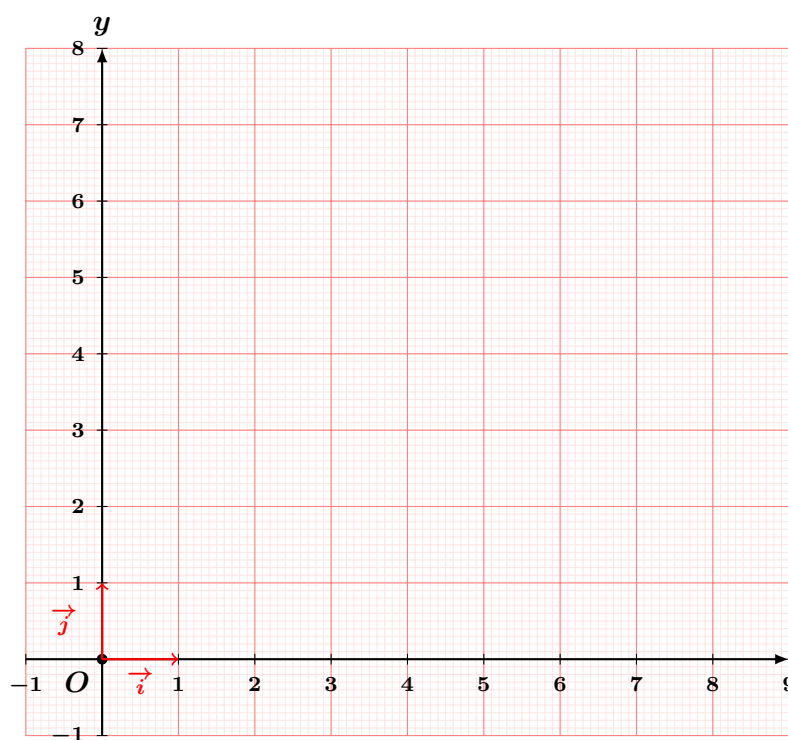
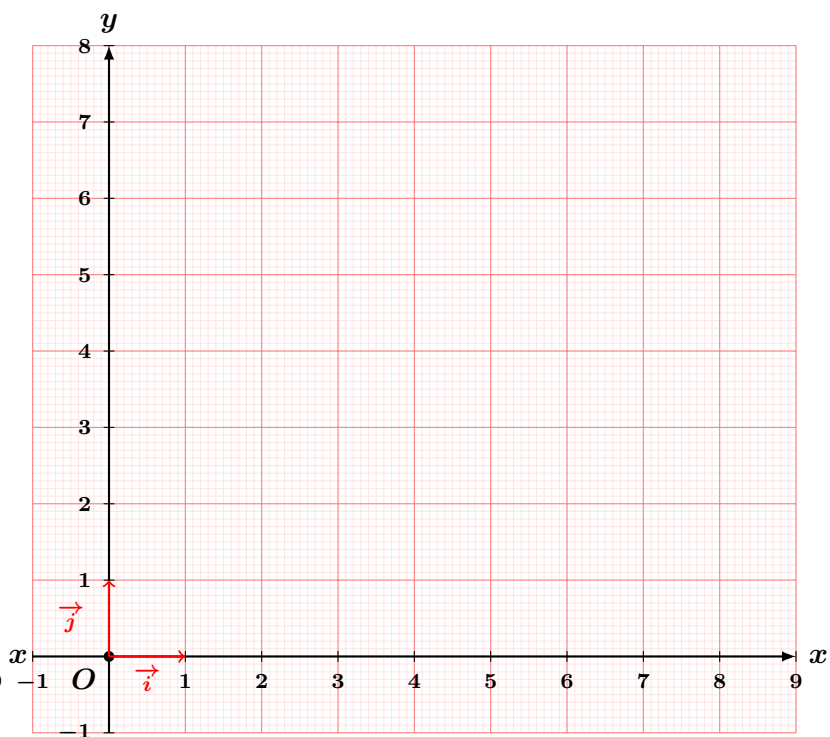
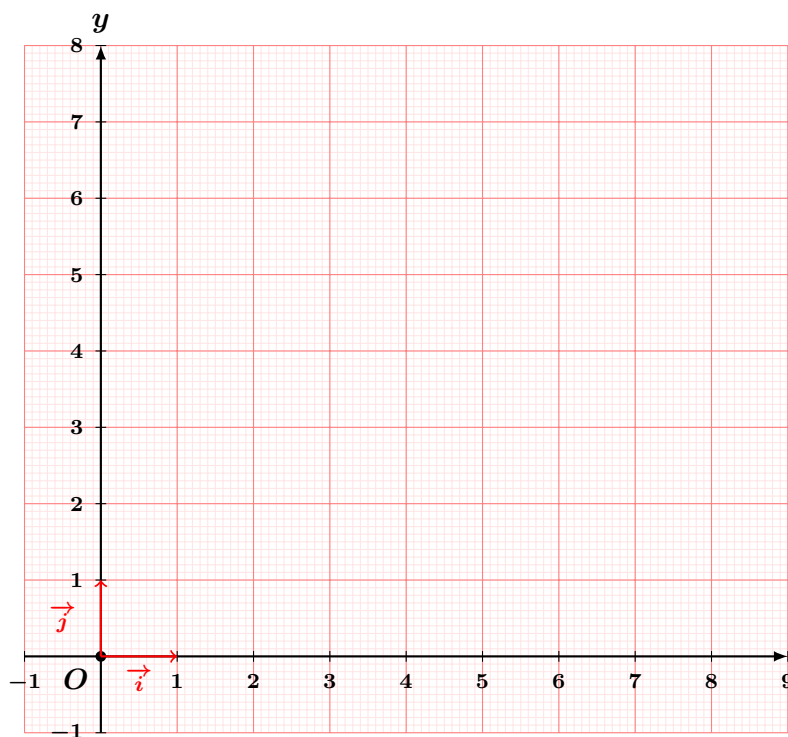
(ج) تحقق أنّ : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2} (u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عيّن عددا حقيقيا k من $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |u_n - \sqrt{3}|$

بيّن أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

مرفقات لاستعمالها في الحل





تمارين المستوى الرابع



1 BAC شعبة علوم الطبيعة والحياة 1978 (النظام القديم) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

• لتكن الأعداد الحقيقية الموجبة تماما a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية .

1 بين أن الأعداد $\ln a, \ln b, \ln c$ بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

$$\begin{cases} \ln abc = 21 \\ (\ln a)(\ln b)(\ln c) = -105 \end{cases}$$

2 أحسب الأعداد الحقيقية a, b, c علما أن:

2 مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة الرياضيات (04 نقاط) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

a و b عدنان حقيقيان حيث $0 < a < b$. (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = a, v_0 = b$ و من أجل كل طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1 أثبت من أجل كل طبيعي n أن $0 < u_n \leq v_n$.

2 (أ) بين من أجل كل طبيعي n أن $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. (يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 1$ حيث $x > 0$ و $y > 0$)

(ب) استنتج أن $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$ من أجل كل طبيعي n .

3 أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4 فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$

بواسطة آلة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين.

3 الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_0 = -1, u_1 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

1 أحسب u_2, u_3, u_4, u_5 أكتب النتائج على شكل كسر غير قابل للإختزال.

2 نعرف المتتاليتين (v_n) و (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{و} \quad w_n = 2^n u_n$$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عبر عن v_n بدلالة n .

ب) بين أن المتتالية (w_n) هي متتالية حسابية أساسها 3 ثم عبر عن w_n بدلالة n .
ت) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$.

ب) استنتج نهاية $\frac{n}{2^n}$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$



4 مدرسة أشبال الأمة 2019 شعبة علوم تجريبية (04 نقاط) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

تت



(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل . هل هي متقاربة ؟ برّر.

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - n$

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية بطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) أحسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

3 نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = \ln(v_n)$

(أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية بطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

(ب) أحسب المجموع : $S'_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$.

الانتقال

الى الحل

★★★★★

رياضيات 2020 الموضوع الثاني (05 نقاط)

5

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases}$$

(α عدد حقيقي)

المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$

1 أ. احسب w_0 ثم احسب w_1 بدلالة α .

ب. بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $(1-6\alpha)$.

ج. اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثم عيّن قيم α حتى تكون : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

نفرض في كل ما يلي : $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

2 أ. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أن (v_n) متناقصة تماما .

ب. استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .

3 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + v_n = 2$ ، واستنتج قيمة ℓ .

4 احسب بدلالة α المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$.



الانتقال

الى الحل

★★★★★

علوم تجريبية 2018 الموضوع الثاني (04 نقاط)

6

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1 احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 .

2 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3 (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n+1$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

(ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4 احسب المجموعين S_n و T حيث :

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}} \quad \text{و} \quad S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$



نعتبر المتتاليتين العدديتين المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}$$

1 نضع أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = u_n + v_n$ ،

(أ) برهن أن المتتالية (a_n) ثابتة.

(ب) عبر عن الحد العام a_n .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $b_n = u_n - 2v_n$.

(أ) برهن أن المتتالية (b_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) أحسب عبارة الحد العام b_n بدلالة n .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} b_i$.

(د) استنتج عبارتي كل من u_n و v_n بدلالة n .



نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1} \quad \text{حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي من المجموعة }]-1; 1[- \{0\}$$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

1 أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول بدلالة α .

2 هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟

3 أحسب بدلالة α و n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

4 عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

-استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.

5 في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$\text{أ/ بين أن : } \pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$



تمارين المستوى الخامس



الانتقال

الى الحل

1

مسابقة مفتش التعليم المتوسط 2019 (04 نقاط) ★★★★★



• $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية معرفة بحدّها العام $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

1 احسب U_1 ، U_2 و U_3 .

2 بيّن أنّ المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ليست حسابية.

3 هل المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية؟ برّر جوابك.

4 برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $0 < U_n < 1$.

5 أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة.

6 احسب المجموع S_{2019} حيث: $S_{2019} = U_1 + U_2 + \dots + U_{2019}$.

الانتقال

الى الحل

2

فقرة كل يوم سؤال بفكرة (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★



• نعتبر العدد A حيث: $A = 3,2434343.....$ (العدد 43 يتكرر لا نهاية من المرات).

• نضع: $u_0 = 3,2$ ، $u_1 = 3,243$ ، $u_2 = 3,24343$ ، $u_3 = 3,24343.....43$ ، $u_n = 3,24343.....43$.

1 تحقق أن: $u_n = \frac{1}{10} \left(32 + \frac{43}{100} + \frac{43}{100^2} + \dots + \frac{43}{100^n} \right)$.

2 أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{43}{100} + \frac{43}{100^2} + \dots + \frac{43}{100^n}$.

3 إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

4 أكتب العدد A على شكل كسر.

الانتقال

الى الحل

3

مواضيع مقترحة (جيوخ العربي) ★★★★★



نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع: $v_n = 8u_n^3 - 1$.

1 أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا: $0 < u_n < 1$.

ب- استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا: $-1 < v_n < 7$.

2 أ- أحسب v_0 .

ب- بيّن أنّ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محدّدا أساسها.

3 أ- أوجد عبارة v_n بدلالة n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب- أحسب بدلالة n ، المجموع: $S_n = \sum_{k=0}^{n+2020} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+2020}$.



نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1 نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(أ) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

(ب) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \frac{1}{2}$.

(ج) عيّن أصغر عدد طبيعي p ، بحيث : إذا كان : $n \geq p$ ، فإن : $v_n < \frac{3}{4}$.

(د) إستنتج أنه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

2 نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$.

(ب) بين أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \times u_5$.

(ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$.

3 بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 5}$ متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، ومن أجل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1 لتكن المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

(أ) بين أن المتتالية (s_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

(ب) إستنتج عبارة s_n بدلالة n .

2 نضع : $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $t_n = v_{n+1} - v_n$.

❖ عبّر عن t_n بدلالة s_n .

3 عبّر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n . (يمكن حساب المجموع : $t_0 + \dots + t_{n-1}$ ، بطريقتين مختلفتين) .

❖ عيّن عندئذ النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{8^n}\right)$.



نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ ، إذا وافقط إذا كان : } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$$

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

(أ) أدرس اتجاه تغيير الدالة f ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$.

(ب) بين أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $[1; +\infty[$ بحيث : $f(\alpha) = 1,9$.

(ج) عيّن العدد الطبيعي n_0 ، بحيث يكون : $n_0 - 1 < \alpha < n_0$.

(د) برهن أنه من أجل كل $n \geq 16$ ، يكون : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

3 أ) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ابتداءً من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟

4 أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \geq 16$ يكون : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$.

ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الانتقال

الى الحل

★★★★★

مواضيع مقترحة (جيوخ العربي)

7

لتكن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بالصيغة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 تحقّق أنّ : $\omega^2 = \omega + 1$ ، $\frac{1}{\omega} = \omega - 1$ ، حيث : $\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2 بين أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega^n - (1 - \omega)^n)$ ، واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

3 نعتبر المتتالية العددية $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بالعلاقة : $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

أ- أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا : $\omega^n (b_n - \omega) a_n = (-1)^n$.

ب- بين أنّ المتتالية $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة، ثمّ أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.



لما سمى جيب الزاوية sin و جيب تمام الزاوية cos بهذا الاسم...
fc.com/adel.maths17

الانتقال

الى الحل

★★★★★

مسألة شاملة في المتتاليات (أحمد عبد الرحمان قوادري)

8

(I) (d_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل d_0 وأساسها q' حيث :

$$(F) : \begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = -\frac{13}{27} \dots\dots\dots (1) \\ d_0 \times d_1 \times d_2 = -\frac{1}{729} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

1 احسب d_0 ، d_1 و d_2 ، ثمّ استنتج الأساس q' .

2 اكتب d_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$.

3 عيّن أكبر عدد طبيعي n حتّى يكون : $d_n < -\frac{3}{10^3}$.

(II) a وسيط حقيقي موجب تماما .

f_a الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; -a[\cup]-\frac{1}{a}; +\infty[$ كيلي : $f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$.

(III) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب :

$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} \end{cases}$$

1 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2 عيّن قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

(IV) نفرض أنّ $a \neq 1$. b عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن $\frac{1}{a}$.

(w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $w_n = \frac{v_n - b}{v_n + b}$.

1 أ- جد قيمة b حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية. يطلب تعيين كل من أساسها q ، وحدّها الأوّل w_0 بدلالة a .

ب- من أجل قيمة b السابقة اكتب عبارة w_n ، ثمّ استنتج عبارة v_n بدلالة كل من n و a .



لغز حدسية بوانكاريه...
قصة شقيقة لعالم رياضيات خارق...
fc.com/adel.maths17

ج - احسب كل من : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

2 نضع في كلّي ممالي $b = 1$ و $a = 3$.

أ - اكتب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

ب - اكتب بدلالة n المجموع s'_n حيث : $s'_n = \frac{1}{v_0 + 1} + \frac{1}{v_1 + 1} + \frac{1}{v_2 + 1} + \dots + \frac{1}{v_n + 1}$.
 • احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$ ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (s'_n) .

ج - اكتب بدلالة n المجموع s''_n حيث : $s''_n = \frac{1}{(v_0 + 1)^2} + \frac{1}{(v_1 + 1)^2} + \frac{1}{(v_2 + 1)^2} + \dots + \frac{1}{(v_n + 1)^2}$.

د - اكتب بدلالة كل من n و m المجموع h_n حيث : $h_n = w_0^m + w_1^m + w_2^m + \dots + w_n^m$ مع m عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 .

هـ - اكتب بدلالة n الجداء G_n حيث : $G_n = |w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n|$.

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n$ ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (G_n) .

و - اكتب بدلالة n الجداء E_n حيث : $E_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots \times e^{w_n}$.

• ماهي طبيعة المتتالية (E_n) ؟ برّر إجابتك .

ي - اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = w_0^{2020} \times w_1^{2020} \times w_2^{2020} \times \dots \times w_n^{2020}$.

• بين أنّ المتتالية (P_n) متقاربة .

3 أ - تحقق أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإنّ : $\frac{2}{1 + \alpha^{n+2}} - 1 = \frac{1 - \alpha^{n+2}}{1 + \alpha^{n+2}}$.

ب - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ، ثم احسب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(V) نعتبر f_3 الدالة العددية المعرفة على المجال $[1; 4]$ كالتالي : $f_3(x) = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) + x$.

ونسَمّي (C_{f_3}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى العلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1 ادرس تغيّرات الدالة f_3 على المجال $[1; 4]$.

2 بين أنّ $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right)$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على المجال $[1; 4]$.

3 مثل بيانياً المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1; 4]$.

3 هذا السؤال يتم حله فقط بعد التعرّف على الحساب التكاملي يُمكن تجنبه -

أ - بين أنّه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإنّ : $f'_3(x) \leq f'_3(4)$.

ب - احسب $f'_3(4)$.

ج - بين أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91}(u_n - 1)$. (إرشاد : استعمل المتباينة $\int_1^{u_n} f'_3(x) dx \leq \int_1^{u_n} f'_3(4) dx$) .

د - بين أنّه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 \leq u_n - 1 \leq 2\left(\frac{83}{91}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4 برهن أنّه إذا كان $x \in [1; 4]$ فإنّ : $f_3(x) \in [1; 4]$.

(VI) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f_3(u_n)$.

1 أ - برّر وجود المتتالية (u_n) .

ب - باستعمال المنحنى (C_{f_3}) والمستقيم (Δ) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل (دون حسابها ومبرزا خطوط الإنشاء) .

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربا .

2 أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < 4$.

ب - بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أوجد نهايتها .

4 احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ حيث :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{1+3u_k}{u_k+3} \right) = \ln \left(\frac{1+3u_0}{3+u_0} \right) + \ln \left(\frac{1+3u_1}{3+u_1} \right) + \ln \left(\frac{1+3u_2}{3+u_2} \right) + \dots + \ln \left(\frac{1+3u_{n-1}}{3+u_{n-1}} \right)$$

(VII) نضع في هذا الجزء : $a = 5$.

(L_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $L_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $L_{n+1} = 2L_n f_5(L_n) - L_n^2$

- نأخذ أن g الدالة المعرفة على $[0;1]$ بـ : $g(x) = 2x \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x^2$ ، وأن $g(x) - x = 0$ لـ $x = 1$.

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \leq L_n \leq 1$.

2 أ - بين أنه من أجل كل $x \in [0;1]$: $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$.

ب - أثبت أن المتتالية (L_n) متزايدة (تذكر أن حدود المتتالية (L_n) موجبة) .

ج - بين أن (L_n) متقاربة، ثم أوجد نهايتها .

3 بين أن المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان .

الانتقال
إلى المحل

مسألة شاملة في المتتاليات (توامي عمر) ★★★★★

9

الجزء الأول : لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad (\alpha \neq 1) \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1 برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 1$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2 - 7x + 6 = 0$

3 عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

الجزء الثاني : نفرض في كل ما يلي : $u_0 = 8$.

1 تحقق أن $u_n = 8 - \frac{14}{u_n + 1}$ ، ثم برهن بالتراجع أن $u_n \geq 6$

2 أثبت أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}$ ،
- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3 أثبت أن (u_n) متقاربة نحو العدد ℓ و يحقق : $\ell^2 - 7\ell + 6 = 0$

4 عين النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الجزء الثالث : نعتبر f دالة معرفة $[1;8]$ بـ : $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$

1 أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) تمثيلها البياني .

2 بين أنه إذا كان $x \in [4;8]$ ، فإن $f(x) \in [4;8]$.

3 برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $6 \leq u_n \leq 8$.

4 مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 .

5 أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

6 برهن بالتراجع على كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - \frac{5}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 1}$

ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الجزء الرابع : (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1 برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $4 \leq v_n \leq 6$.

2 أثبت أن (v_n) متتالية متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

3 مثل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 و v_2 .

4 ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (v_n) و تقاربها .

الجزء الخامس : نضع : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n)$

1 أثبت من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = \frac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$

2 برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n \geq 0$.

3 بين أن : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{14}{35}(u_n - v_n)$

4 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - v_n \leq 4 \left(\frac{14}{35}\right)^n$

- استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

الجزء السابع:

1 برهن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 6 = \frac{2(u_n - 6)}{u_n + 1}$.

2 عين عدداً حقيقياً k من المجال $]0; 1[$ بحيث:

$$|u_{n+1} - 6| \leq k |u_n - 6|$$

3 بين من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_n - 6| \leq 2 \left(\frac{2}{7}\right)^n$

4 استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، يطلب تعيين نهايتها.

الجزء السادس: (L_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $L_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

1 برهن أن (L_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

2 أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3 أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

4 أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n$.
- استنتج بدلالة n المجموع:

$$S'_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$$

5 أحسب الجداء: $P_n = L_0^{2018} \times L_1^{2018} \times \dots \times L_n^{2018}$.

تمارين المستوى الأول ★

التمرين 01



مجلة المتتاليات العددية (قويسم ابراهيم الخليل)

1 المتتالية (v_n) : ← ب/ هندسية

التعليل:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$

2 نهاية المتتالية (u_n) : ← ج/ $-\infty$

التعليل: لدينا: $v_n = v_0 q^n = -\frac{1}{2}(3)^n$ ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + \frac{1}{2} \Rightarrow u_n = v_n - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}(3)^n - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}(3^n + 1) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}(3^n + 1) \right) = -\infty \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{2}(1 + e^{\ln 3} + e^{2 \ln 3} + e^{3 \ln 3} + \dots + e^{n \ln 3}) \\ &= -\frac{1}{2}(e^{0 \ln 3} + e^{1 \ln 3} + e^{2 \ln 3} + \dots + e^{n \ln 3}) \\ &= -\frac{1}{2}(e^{\ln 3^0} + e^{\ln 3^1} + e^{\ln 3^2} + \dots + e^{\ln 3^n}) \\ &= -\frac{1}{2}(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) \\ &= -\frac{1}{-4}(1 - 3^{n+1}) \\ &= \frac{1 - 3^{n+1}}{4} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4} \text{ ج/} \quad \leftarrow \quad 3$$

التمرين 02



مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1 حساب u_0 :

نكتب الحدود u_1, u_2, u_3 بدلالة الحد الأول u_0

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 10 \text{ ومنه: } u_n = u_0 + nr \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 15 \end{cases}$$

$$u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34 \text{ تصبح: } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

$$\text{ومنه: } 4u_0 = 34 - 30 = 4 \text{ ويكون: } 4u_0 = 4 \text{ إذن: } u_0 = 1$$

تتو

★ تمارين المستوى الأول

2 تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$ ؛

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ، إذن: $u_n = 1 + 5n$.

3 نعين العدد الطبيعي n بحيث، $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ ؛

- لدينا: $u_n = 5n + 1$ ومنه: $u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 6$
- لدينا: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ معناه: $(5n + 6) + (5n + 1) - 8n = 4033$

ومنه: $7 + 2n = 4033$

وعليه: $2n = 4026$ إذن: $n = 2013$.

4 حساب المجموع، $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$ ؛

لدينا: $u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066$

ومنه: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2013} = (2013 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2013}}{2} \right) = \frac{2014}{2} (1 + 10066)$
وعليه: $S = 1007(10067) = 10137469$

5 لدينا: المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة، $v_n = 2u_n + 1$.

(أ) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؛

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$

لدينا: $v_n = 2u_n + 1$ ، ولدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$ لأن (u_n) حسابية أساسها 5.

نجد: $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 5) + 1 = 2u_n + 11$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = (2u_n + 11) - (2u_n + 1) = 10 > 0$

إذن: (v_n) متزايدة تماماً.

(ب) حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$ ؛

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013} = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \dots + (2u_{2013} + 1)$

ومنه: $S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}) + 1(2013 - 0 + 1) = 2S + 2014$

إذن: $S' = 20276951$

التمرين 03



مجلة المتتاليات العددية (ياحي رشيد)

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

• (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماماً و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$.

(1) خطأ التعليل نأخذ مثلاً (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ واضح أن حدود المتتالية (u_n)

موجبة تماماً و ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لكن، $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$ إذا (v_n) ليست متقاربة.

(2) صحيح التعليل (u_n) متناقصة تعني أن $u_{n+1} < u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n ومنه

$\ln(u_{n+1}) < \ln(u_n)$ أي $v_{n+1} < v_n$ وبالتالي (v_n) متناقصة.

★ تمارين المستوى الأول

(3) صحيح التعليل إذا كانت (u_n) هندسية فإنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ حيث q هو أساس المتتالية (u_n) وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(q)$$

وبالتالي (v_n) حسابية أساسها $r = \ln(q)$

التمرين 04



مجلة العبقرى في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1. حساب بدلالة r الجداءين $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$:

لدينا: $u_n = u_p + (n - p)r$

$$\begin{cases} u_1 = u_3 + (1 - 3)r = 7 - 2r \\ u_2 = u_3 + (2 - 3)r = 7 - r \\ u_4 = u_3 + (4 - 3)r = 7 + r \\ u_5 = u_3 + (5 - 3)r = 7 + 2r \end{cases}$$

وبالتالي: $T_1 = u_1 \times u_5 = (7 - 2r)(7 + 2r) = 7^2 - (2r)^2 = 49 - 4r^2$

و $T_2 = u_2 \times u_4 = (7 - r)(7 + r) = 7^2 - (r)^2 = 49 - r^2$

(ب) تعيين الأساس r بحيث، $T_2 - T_1 = 27$:

لدينا: $T_2 - T_1 = 27$ تكافئ: $(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27$

ومنه: $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$

وعليه: $r^2 = \frac{27}{3}$

أي: $r^2 = 9$

وبالتالي: $r = \sqrt{9} = 3$ أو $r = -\sqrt{9} = -3$

وبما أن (u_n) حسابية متزايدة (أساسها موجب)، فإن: $r = 3$

2. بوضع $r = 3$.

(أ) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها $r = 3$ ، حدها الأول $u_1 = 7 - 2(3) = 1$

فإن: $u_n = u_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1)(3)$ بالتعويض نجد: $u_n = 1 + (n - 1)(3)$ إذن: $u_n = 3n - 2$

(ب) $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

تبيان أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) = n \left(\frac{1 + (3n - 2)}{2} \right) = n \left(\frac{3n - 1}{2} \right)$

ومنه: $S_n = \frac{n(3n - 1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

★ تمارين المستوى الأول

ج) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$:

$$S_n = 145 \text{ معناه: } \frac{3n^2 - n}{2} = 145$$

$$\text{ومنه: } 3n^2 - n - 290 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0 \text{ مميزها}$$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N} \text{ و}$$

إذن: $n = 10$ ($S_{10} = 145$).

3. كتابة العدد u_{n+5} بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = 3n - 2$$

$$\text{ومنه: } u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 15 - 2 = 3n + 13 \text{ إذن: } u_{n+5} = 3n + 13$$

$$\text{ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم، } \frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

$$\text{لدينا: } \frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً:

$$\frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N} \text{ معناه: } 3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N} \text{ ومنه: } \frac{13}{n} \in \mathbb{N} \text{ وعليه: } n \in D_{13} \text{ أي: } n \in \{1; 13\}$$

(قيم n هي قواسم العدد 13)

إذن: $n = 1$ أو $n = 13$.

التمرين 05



جوابيل أحمد أسامة + ياحي رشيد + بوعزة مصطفى

• لدينا $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ و $w_n = 4 \times 5^n - 2n + 1$ نضع $v_n = -2n + 1$ و $u_n = 4 \times 5^n$ نلاحظ أن (v_n) متتالية

حسابية و (u_n) هندسية أساسها 5 و حدها الأول $u_0 = 4$ و منه $S_n = 4 \times \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} + \frac{n+1}{2} [1 - 2n + 1]$ أي أن

$$S_n = 5^{n+1} - 1 + \frac{n+1}{2} [2 - 2n] \text{ إذن } S_n = 5^{n+1} - 1 + (n+1)(1-n) \text{ و منه } S_n = 5^{n+1} - n^2 \text{ الإجابة الصحيحة هي ب).}$$

• لدينا المتتالية (u_n) هندسية عبارة حدها العام $u_n = e^{-\frac{1}{2} + n}$ و منه $\ln u_n = -\frac{1}{2} + n$ إذن $(\ln u_n)$ متتالية حسابية

$$\text{و } S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n) = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n) = \frac{n+1}{2} [\ln(u_0) + \ln(u_n)] \text{ أي أن}$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + n \right] = \frac{(n+1)(-1+n)}{2} \text{ إذن } S_n = \frac{n^2 - 1}{2} \text{ الإجابة الصحيحة هي أ).}$$

★ تمارين المستوى الأول

- المتتالية الحسابية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و أساسها $r = 2$ نضع $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$ حساب عبارة P_n : $P_n = e^{u_0 + u_1 + \dots + u_n} = e^{\frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)}$ و منه $P_n = e^{(n+1)^2}$ إذن $P_n = e^{\frac{n+1}{2}(1+2n+1)}$ و منه الإجابة الصحيحة هي ب)

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها 4؛ لدينا: $v_1 = v_0 + 4 = 1 + 4 = 5$ و منه: $v_n = v_0 + 4n = 1 + 4n$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(5 + 1 + 4n) = \frac{n}{2}(6 + 4n)$$

ومنه: $\frac{n}{2}(6 + 4n) = 2015$ أي $4n^2 + 6n - 3030 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية. مميزها $\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times (-4030) = 64516$ وبالتالي: المعادلة تقبل حلان هما:

$$\frac{-6 - \sqrt{64516}}{2(4)} = \frac{-6 - 254}{8} = -32,5$$

$$\frac{-6 + \sqrt{64516}}{2(4)} = \frac{-6 + 254}{8} = 31$$

الحل الثاني هو: $n = 31$ وبالتالي الإجابة الصحيحة هي: أ)

- المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ و

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + \dots + [\ln(n+2) - \ln(n+1)]$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = \ln(n+2) - \ln(1) = \ln(n+2)$$

- المتتالية الهندسية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماماً أساسها العدد الحقيقي q الموجب تماماً و الذي يختلف

$$v_n = \ln(w_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(w_{n+1}) = \ln(w_n \cdot q) = \ln(w_n) + \ln(q) = v_n + \ln(q)$$

$$v_{n+1} = v_n + \ln(q)$$

$$\ln(q)$$

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1} \times 3^{n-1+1}}{5 \times 2^n \times 3^{n-1}} = \frac{5 \times 2^{\cancel{n}} \times 2 \times 3^{\cancel{n}}}{5 \times 2^{\cancel{n}} \times 3^{\cancel{n}} \times 3^{-1}} = 2 \times 3 = 6$$

وبالتالي الإجابة الصحيحة هي: ب) (u_n) هندسية أساسها 6

- الحد العام للمتتالية العددية المعرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$ هو أ)

$$u_0 = -3 + 6 = 3 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6 = \frac{1}{2} \left[-3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] + 3 = \frac{1}{2}u_n + 3$$

- a عدد حقيقي: $a + 2$ و $a + 6$ حدود متتابعة من متتالية هندسية يعني أن $a(a+6) = (a+2)^2$ أي أن

$$a^2 + 6a = a^2 + 4a + 4 \quad \text{يكافئ أن} \quad 6a = 4a + 4 \quad \text{أي أن} \quad 2a = 4 \quad \text{و منه} \quad a = 2 \quad \text{الإجابة الصحيحة أ).}$$

- β عدد حقيقي تكون الأعداد $e^\beta + 1$ و $e^\beta + 2$ و $2e^\beta$ حدود متتابعة من متتالية هندسية يعني

$$(e^\beta + 1)2e^\beta = (e^\beta + 2)^2 \quad \text{يعني} \quad 2e^{2\beta} + 2e^\beta = e^{2\beta} + 4e^\beta + 4 \quad \text{يكافئ} \quad 2e^{2\beta} - 2e^\beta - 4 = 0 \quad \text{بوضع} \quad e^\beta = x \quad \text{تصبح}$$

$$المعادلة \quad x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \text{نحسب المميز} \quad \Delta = 20 \quad \text{منه} \quad x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} \quad \text{مقبول} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5} \quad \text{مرفوض}$$

$$e^\beta = 1 + \sqrt{5} \quad \text{و منه} \quad \beta = \ln(1 + \sqrt{5}) \quad \text{و منه الإجابة الصحيحة هي ج)}$$

تتو

★ تمارين المستوى الأول

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n} \times 3^{-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad \boxed{q = \frac{v_{n+1}}{v_n}} \text{ :متتالية هندسية أساسها}$$

التمرين 06



حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

(I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$
(1) تبيان أن (u_n) متتالية هندسية :

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e} u_n, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

$$\text{ومنه المتتالية } (u_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{e} \text{ وحدها الأول } u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

(2) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{e} \times \left(\frac{1}{e} \right)^n \right] = 0$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) حساب المجموع S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \sqrt{e} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}} \right] = \frac{e\sqrt{e}}{e-1} (1 - e^{-n-1})$$

(II) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$

(1) كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n \text{ ومنه } v_n = \ln(u_n), \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} - (n+1) - \left(\frac{1}{2} - n \right) = -1, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ حسابية أساسها } r = -1 \text{ وحدها الأول } v_0 = \ln(u_0) = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}.$$

(2) أ- حساب العدد P_n

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$\text{ومنه } P_n = \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n \right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$$

★ تمارين المستوى الأول

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$.
 $P_n + 4n > 0$ يكافئ $\frac{1-n^2}{2} + 4n > 0$ يكافئ $\frac{1+8n-n^2}{2} > 0$ يكافئ $-\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$
 ولدينا : $-\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$ يكافئ $n \in [0; 8]$ أي $n \in]4 - \sqrt{17}; 4 + \sqrt{17}[$
 ومنه مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$ هي : $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

التمرين 07



دليل الأستاذ للسنة الثالثة ثانوي

(1) $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2ca - b^2 + c^2$
 بما أن $b^2 = ac$ فإن $2b^2 = 2ac$ ، ومنه $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$
 (2) لدينا $\begin{cases} a+b+c = 78 \\ a^2+b^2+c^2 = 3276 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} a+b+c = 78 \\ (a+b+c)(a-b+c) = 3276 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a+b+c = 78 \\ a-b+c = 42 \end{cases}$
 إذن $2b = 78 - 42 = 36$ أي $b = 18$.

؛ a و c هما حلا المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2 - 60x + 324 = 0$. إذن
 $(a; b; c) = (54; 18; 6)$ أو $(a; b; c) = (6; 18; 54)$.

التمرين 08



حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

(1) $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$ ، $I = [1; 2]$
 أ- تبين أن الدالة f متزايدة على I .
 الدالة f قابلة للإشتقاق على I و $f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$.
 ومنه من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على I .
 ب- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .
 الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على I ومنه من أجل كل $x \in [1; 2]$ ، $f(x) \in [f(1); f(2)]$ ،
 ولدينا : $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ ، إذن من أجل كل $x \in I$ ، $f(x) \in I$.
 (2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .
 نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$ " .

★ تمارين المستوى الأول

- نتحقق من صحة $P(0)$.
من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.
- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1 \leq u_n \leq 2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
لدينا حسب الفرض $1 \leq u_n \leq 2$ ومنه حسب السؤال (أ) $1 \leq f(u_n) \leq 2$ أي: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$.

بـ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4}$$

ولدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$ فإن $u_n - 1 \geq 0$ و $u_n - 2 \leq 0$ و $-u_n + 4 > 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

• المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$(3) \text{ أـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$\text{نسمي } P(n) \text{ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

• نتحقق من صحة $P(0)$.

$$\text{من أجل } n = 0، لدينا } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } u_0 = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{• نفرض صحة } P(n) \text{ من أجل عدد طبيعي } n \text{ أي: } u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} \text{، و نبرهن صحة } P(n+1)$$

$$\text{أي } u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

$$\text{لدينا } u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} = -1 + \frac{6}{-u_n + 4} = -1 + \frac{6}{4 - u_n} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

$$\text{ومنّه } P(n+1) \text{ صحيحة. • الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي } n، u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

تمارين المستوى الأول ★

$$\text{بـ. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} \right) = 1 \text{ لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

تمارين المستوى الثاني ★★

التمرين 01



العقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي، $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$
1- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 3 > -3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > -3$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} > -3$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > -3$

ومنه: $\frac{2}{3}u_n > -2$

وعليه: $\frac{2}{3}u_n - 1 > -2 - 1$

أي: $u_{n+1} > -3$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$.

ب) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

• لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)u_n - 1 = -\frac{1}{3}u_n - 1$

• ولدينا من جهة أخرى: $u_n > -3$

ومنه: $-\frac{1}{3}u_n < 1$

وعليه: $-\frac{1}{3}u_n - 1 < 1 - 1$

أي: $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن: (u_n) متناقصة تماماً.

ج) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل ($u_n > -3$) فإنها متقاربة.

2- لدينا: (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث، $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$

أ) تبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] = \frac{v_0}{1-q}$

لأن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q ، فإن $-1 < q < 1$ وبالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$

ب) حساب الأساس q :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$ ومنه: $\frac{6}{1-q} = 18$ وعليه: $1 - q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ إذن: $q = \frac{2}{3}$

★★ تمارين المستوى الثاني

تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$

نستعمل البرهان بالتراجع، نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = v_0 - 3 = 6 - 3 = 3$

إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = v_n - 3$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$

البرهان: لدينا: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = \frac{2}{3}v_n - 3 = v_{n+1} - 3$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا $u_n = v_n - 3$ ومنه: $u_n = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$

التمرين 02



تمارين المراجعة النهائية (سعيد وزاني)

المعطيات: • (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + 3n + 4$

• (v_n) متتالية عددية معرفة بعدها العام: $v_n = 3n + 4$

1. تبين (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا: $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 4 - (3n + 4) = 3$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول: $v_0 = 3(0) + 4 = 4$

2. حساب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = v_n$ ، فيكون: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$

إذن: $S_n = u_n - u_0$ $= (\cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cancel{u_3} + \dots + \cancel{u_{n-1}} + u_n) - (u_0 + \cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \dots + \cancel{u_{n-1}})$

3. استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $S_n = u_n - u_0$ ، فيكون: $S_n = u_0 + u_n$

لكن: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}[4 + 3(n-1) + 4] = \frac{1}{2}n(3n + 5)$

فيكون: $u_n = u_0 + s_n = 2 + \frac{1}{2}n(3n + 5) = \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 4)$

تمارين المستوى الثاني ★★

4. تعيين رتبة الحد الذي قيمته 13 :

$$u_n = 13 \text{ تكافئ : } \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 4) = 13$$

$$3n^2 + 5n - 22 = 0 \Leftrightarrow$$

إذن : الحد الذي قيمته 13 هو الحد الثالث.

$$(3n + 11)(n - 2) = 0 \Leftrightarrow \text{ومنه : } n = 2.$$

التمرين 03

تمارين المراجعة النهائية (سعيد وزاني) 

المعطيات: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

1. حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2} : n = 0 \quad u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} : n = 1 \quad u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4} : n = 1$$

2.I حساب w_0 ، w_1 ، w_2 و w_3 حيث : $w_n = \frac{n}{n+1}$

$$w_0 = \frac{0}{1} = 0 ; w_1 = \frac{1}{2} ; w_2 = \frac{2}{3} ; w_3 = \frac{3}{4}$$

3.I البرهان باستعمال التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n$ ، فيكون :

$n = 0$: $u_0 = w_0 = 0$ ، إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $u_n = w_n$ ثم نبرهن على أنها صحيحة من أجل المرتبة $n+1$ كذلك، أي أن : $u_{n+1} = w_{n+1}$.

$$\text{لدينا : } u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - w_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+1) - n} = \frac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$$

النتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n$.

1.II تبين أن : $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = -\ln 5$ ، حيث $v_n = \ln \frac{n}{n+1}$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} = \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \right) = -\ln 5$$

2.II حساب المجموع :

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n}{n+1}$$

$$S_n = -\ln(n+1) : \text{إذن : } = \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \right) = \ln \frac{1}{n+1}$$

$$3.II \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = -(+\infty) = -\infty$$

التمرين 04

مجلة الرائد (بالعبيدي محمد العربي) 

1) تبين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم حساب وحدتها الأولى

$$(v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ معناه } v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

تمارين المستوى الثاني ★★

لدينا: $v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\ln \sqrt{\frac{u_n}{e}} + 1) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \ln \frac{u_n}{e} + 1) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \ln u_n - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} v_n$ ومنه $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$

الحد الأول هو $v_0 = \frac{1}{2} \ln u_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln e^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

(2) كتابة من v_n ، ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

(v_n) هندسية أساسها q معناه $v_n = v_0 \cdot q^n$ وعليه $v_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$ ومنه: $\ln u_n = 2v_n - 1$ وعليه $u_n = e^{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 3$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

(4) إيجاد بدلالة n الجداء $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

لدينا: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{2v_0 - 1} \times e^{2v_1 - 1} \times \dots \times e^{2v_n - 1} = e^{2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (n+1)} = e^{2S_n - (n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2S_n - (n+1)} = 0$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-(n+1)}) = 0$

التمرين 05



مجموعة المتميز (جوابيل أحمد أسامة)

لدينا $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$

1. إثبات أن $v_5 = 32$ و $v_3 = 8$: $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$ بالجمع نجد $2 \ln v_5 = 10 \ln 2$ ومنه $\ln v_5 = 5 \ln 2$ ومنه $\ln v_5 = \ln 2^5$ أي

أن $v_5 = 2^5$ إذن $v_5 = 32$

بالطرح نجد $2 \ln v_3 = 6 \ln 2$ يكافئ $\ln v_3 = 3 \ln 2$ أي أن $\ln v_3 = \ln(2^3)$ إذن $v_3 = 2^3$ أي أن $v_3 = 8$

2. أ- إثبات أن $q = 2$: $v_5 = v_3 \cdot q^2$: $v_0 = 1$; $q = 2$ أي $q^2 = 4$ إذن $q = 2$ لأن حدود المتتالية موجبة .

لدينا $v_3 = v_0 \cdot q^3$ يعني أن $v_3 = \frac{8}{2^3} = 1$ صحيحة .

ب- كتنا v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n$ أي $v_n = 2^n$

ج- العدد 1024 حد من حدود المتتالية يعني أن $v_n = 1024$ لها حل طبيعي أي $2^n = 1024$ يعني أن $\ln(2^n) = \ln(1024)$ أي أن

$n \cdot \ln(2) = \ln(1024)$ ومنه $n = \frac{\ln(1024)}{\ln 2}$ إذن $n = 10$ ومنه العدد 1024 حد من حدود هذه المتتالية .

تتبع

تمارين المستوى الثاني ★★

3. لدينا $w_n = 2n - 3 + 2^n$:

أ. التحقق : $w_n = 2n - 3 + 2^n$ أي أن $w_n = 2n - 3 + v_n$ نضع $u_n = 2n - 3$ و $w_n = u_n + v_n$ من $u_n = 2n - 3$ و $u_0 = -3$ (لأنها تكتب على الشكل $u_n = u_0 + nr$ المطابقة نجد الأساس و الحد الأول).

ب. لدينا $w_n = u_n + v_n$ و $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ يعني أن $S_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n)$ أي أن $S_n = [u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n] + [v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n]$ و منه $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) + v_0 \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]$ أي أن $S_n = \frac{n+1}{2}(2n - 6) + 2^{n+1} - 1$ إذن $S_n = \frac{n+1}{2}(-3 + 2n - 3) + \left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right]$ و منه $S_n = \frac{2(n+1)}{2}(n - 3) + 2^{n+1} - 1$ و هو المطلوب .

التمرين 06



العقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3} \end{cases}$ حيث a وسيط حقيقي.

1- تعيين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

$$u_0 = u_n = u_{n+1} = 3$$

$$3 = \left(\frac{2a+1}{3}\right)3 - \frac{2a+4}{3}$$

$$\frac{6a+3-2a-4}{3} = 3 \text{ وعليه}$$

$$4a - 1 = 9 \text{ وبالتالي: } 4a - 1 = 9 \text{ إذن: } a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

2- لدينا: $a \neq \frac{5}{2}$

تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية:

$$(u_n) \text{ حسابية معناه: } \frac{2a+1}{3} = 1 \text{ ومنه: } a = 1$$

$$\text{حساب } u_n: \text{ أساس المتتالية الحسابية } (u_n) \text{ هو: } r = -\frac{2(1)+4}{3} = -2$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ إذن: } u_n = 2n + 3$$

حساب مجموع n حدا الأولى من المتتالية:

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = ((n-1) - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right) = n \left(\frac{3 - 2(n-1) + 3}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \left(\frac{-2n+8}{2} \right) = n(4 - n)$$

★★ تمارين المستوى الثاني

3. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية:

(u_n) هندسية معناه: $-\frac{2a+4}{3} = 0$ ومنه: $a = -2$.

تعيين u_{50} : أساس المتتالية الهندسية (u_n) هو: $q = \frac{2(-2)+1}{3} = -1$.

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ وبالتالي: $u_n = 3(-1)^n$ إذن: $u_{50} = 3(-1)^{50} = 3$.

تعيين مجموع 50 حدا الأولى من المتتالية:

لدينا: $u_0 + u_1 + \dots + u_{49} = u_0 \left(\frac{1-q^{49-0+1}}{1-q} \right) = 3 \left(\frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)} \right) = 0$

مجموع 50 حدا الأولى

4. لدينا: $a = 4$ نجد: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $u_n = 3^n + 2$.

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 3^0 + 2 = 3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = 3^n + 2$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} = 3^{n+1} + 2$

البرهان: لدينا: $u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3(3^n + 2) - 4 = 3^1 \times 3^n + 6 - 4 = 3^{n+1} + 2$ وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3^n + 2$.

تبيان أن: $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$

لدينا: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (3^0 + 2) + (3^1 + 2) + \dots + (3^n + 2)$

ومنه: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) + 2(n - 0 + 1)$

وعليه: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) + 2(n + 1)$

ويكون: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(\frac{1-3^{n-0+1}}{1-3} \right) + 2(n + 1) = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 2n + 2$

وبالتالي: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1 + 4n + 4) = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$

التمرين 07



حلّول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

(1) حساب الحدين u_1 و v_1 :

$$v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}, \quad u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

تمارين المستوى الثاني ★★

(2) أكتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n), \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

بـ البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq u_n$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{7}{4}$ و منه $u_1 > u_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_{n+1} \geq u_n$ ، و نبهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) \text{ ولدينا مما سبق } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ و منه } u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$$

و منه $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ـ البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما :

لنثبت أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} \leq v_n$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $v_0 = 6$ و $v_1 = \frac{11}{2} = 5,5$ و منه $v_1 < v_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $v_{n+1} \leq v_n$ ، و نبهن صحة $P(n+1)$ أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n) \text{ ولدينا } v_{n+1} - v_n \leq 0 \text{ و منه } v_{n+2} - v_{n+1} \leq 0 \text{ و منه } v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \left(\frac{3}{4}v_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

و منه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$

• كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n :

$$w_n = -5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ و منه } w_n = w_0 \times q^n : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

تمارين المستوى الثاني ★★

4) تبين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

لدينا: المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) = 0 \text{ و } (v_n) \text{ و } (u_n) \text{ متجاورتان.}$$

التمرين 08



جوابيل أحمد أسامة (مجموعة المتميز في الرياضيات)

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > \frac{1}{e}$

لدينا $u_0 > \frac{1}{e}$ أي أن $\frac{5}{4e} > \frac{1}{e}$ محققة.

نفرض أن $u_n > \frac{1}{e}$ و لنبرهن أن $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

الدالة المرفقة f حيث $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$ مشتقاتها $f'(x) = \frac{2}{(ex+1)^2}$ و منه f متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{e}; +\infty \right]$ و

منه $f(u_n) > f\left(\frac{1}{e}\right)$ و $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ أي أن $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > \frac{1}{e}$.

$$\text{ب- إثبات أن } u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{e.u_n + 1} \text{ لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{e.u_n + 1} - u_n = \frac{u_n - e.u_n^2}{e.u_n + 1}$$

$$\text{و منه } u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{e.u_n + 1}$$

بما أن $u_n > \frac{1}{e}$ فإن إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ سالبة إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$

$$\text{إثبات أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية } v_{n+1} = \frac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1} - 1} \text{ و } v_{n+1} = \frac{2e.u_n}{2e.u_n - e.u_n - 1} = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1} = v_n \text{ و منه } v_{n+1} = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1} = v_n$$

$$v_0 = -5 \text{ و } v_0 = \frac{e.u_0}{e.u_0 - 1} = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4} \text{ و } v_{n+1} = \frac{2e.u_n}{e.u_n - 1} = 2v_n \text{ و } v_0 = -5 \text{ و } v_0 = \frac{5}{4}$$

تتبع

عبارة حدها العام هي $v_n = -5 \times 2^n$.

تمارين المستوى الثاني ★★

(3) أ-التحقق $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ بتوحيد المقامات نجد $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$ محققة .

و منه نجد $v_n - 1 = \frac{1}{e.u_n - 1}$ بتبديل الطرفين نجد $e.u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 1}$

بالتبسيط نجد $u_n = \frac{1}{e} \left[1 + \frac{1}{v_n - 1} \right] = \frac{1}{e} \left(\frac{v_n}{v_n - 1} \right)$ أي

أن $u_n = \frac{1}{e} \left(\frac{-5 \times 2^n}{-5 \times 2^n - 1} \right)$ و منه $u_n = \frac{1}{e} \left(\frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^n + 1} \right)$ وهي عبارة الحد العام المطلوبة .

و منه $\lim u_n = \lim \frac{1}{e} \left(\frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^n} \right) = \frac{1}{e}$.

ب-حساب المجموع : $S_n = -5 \left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right] = -5 (2^{n+1} - 1)$.

★★★ تمارين المستوى الثالث

التمرين 01



حلل تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$.
 (I) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$.

$$f'(x) = \frac{3(x + 11) - (3x - 16)}{(x + 11)^2} = \frac{49}{(x + 11)^2} \text{ و } [-4; 1] \text{ على المجال}$$

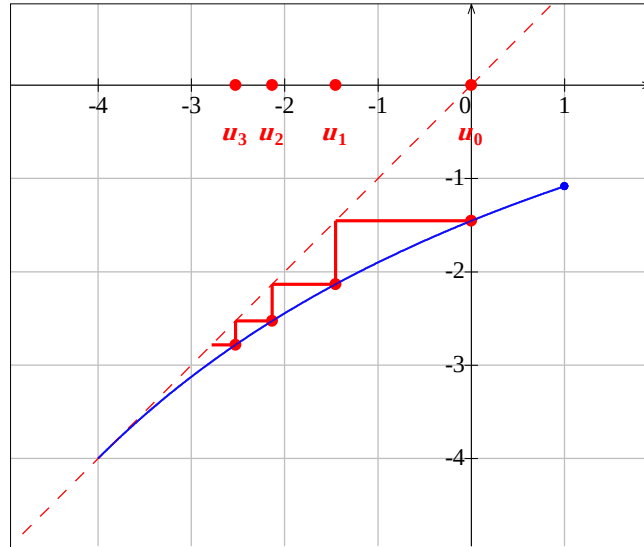
لدينا: من أجل كل $x \in [-4; 1]$ ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$.
 تبين أنه من أجل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$.

لدينا: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ وبالتالي من أجل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [f(-4); f(1)]$.

أي: $f(x) \in [-4; -\frac{13}{12}]$ و لدينا $[-4; -\frac{13}{12}] \subset [-4; 1]$ ومنه: من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$.

(II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أتمثيل الحدود:



التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد -4 .

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 \leq u_n \leq 0$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 \leq u_n \leq 0$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ ومنه $-4 \leq u_0 \leq 0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n : أي $-4 \leq u_n \leq 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-4 \leq u_{n+1} \leq 0$.

لدينا حسب الفرض $-4 \leq u_n \leq 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(-4) \leq f(u_n) \leq f(0)$

$$\text{أي } -4 \leq u_{n+1} \leq -\frac{16}{11} \leq 1 \text{ وبالتالي } P(n+1) \text{ صحيحة.}$$

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 \leq u_n \leq 0$.

★★★ تمارين المستوى الثالث

- تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{3u_n - 16 - u_n(u_n + 11)}{u_n + 11} = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \frac{-(u_n + 4)^2}{u_n + 11}$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ أي $v_n = \frac{1}{u_n + 4}$.

إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16 + 4(u_n + 11)}{u_n + 11}} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4 + 7}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{7} + v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 + 4} = \frac{1}{4}$.

• حساب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016} = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + \dots + (1 - 4v_{2016})$

ومنه : $S = 2017 \times 1 - 4(v_0 + v_1 + \dots + v_{2016}) = 2017 - 4 \left[\frac{2017}{2} (v_0 + v_{2016}) \right]$

$$S = 2017 - 4 \left[\frac{2017}{2} \left(\frac{1}{4} + 288 \right) \right] = -1161792 \text{ أي :}$$

التمرين 02



حلّول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x + 1}{x + 3}$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بعدها الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(1) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

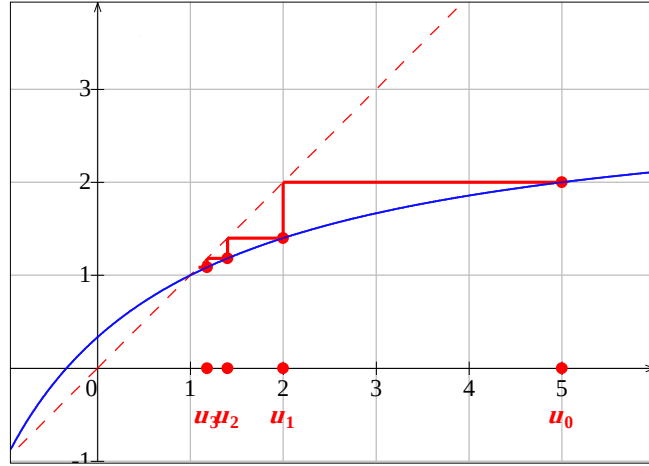
(u_n) متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1} = u_n = u_0$ ،

أي نحل المعادلة $f(\alpha) = \alpha$ وهذا يكافئ $\frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3} = \alpha$ يكافئ $\alpha^2 = 1$

وبما أن α عدد حقيقي موجب فإنه من أجل $\alpha = 1$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

تأمين المستوى الثالث ★★★

(2) أتمثيل الحدود :



بـ. التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو العدد 1.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أدبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{3u_n + 1 + (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 2}{4u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{4(u_n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

بـ. كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ أي } v_n = v_0 \times q^n : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} \text{ أي } v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \text{ ومنه } v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \text{ ومنه } v_n u_n - u_n = -v_n - 1$$

$$u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} = \frac{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1}{1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n} = \frac{3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} \text{ إذن}$$

تأمين المستوى الثالث

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} \right) = 1$$

(4) حساب المجموع: $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016} = v_n \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2017} \right)$$

استنتاج المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ومنه $v_n = \frac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1}$ أي $v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$

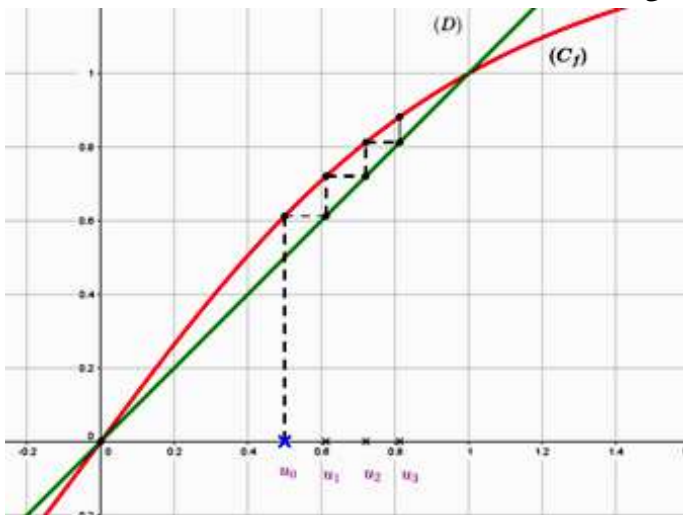
$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1} = \frac{1 - v_n}{2} + \frac{1 - v_{n+1}}{2} + \dots + \frac{1 - v_{n+2016}}{2} = \frac{1}{2} (2017) - \frac{1}{2} S_n$$

التمرين 03



جوابيل أحمد أسامة (مجموعة المتميز في الرياضيات)

1. أ- لدينا $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$ و f معرفة على $[0; +\infty[$



ب- التخمين المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة

2. أ- البرهان بالتراجع أنه $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

لدينا $\frac{1}{2} \leq u_0 < 1$ محققة .

نفرض أن $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ صحيحة و لنبرهن صحة

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$$

$\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ و f دالة متزايدة و منه $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ أي أن $\frac{3}{2\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < 1$ أي $\frac{\sqrt{6}}{4} \leq u_{n+1} < 1$ و $\frac{\sqrt{6}}{4} \leq \frac{1}{2}$

و منه $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$ صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي $n: \frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

تتبع

★★★ تملين المستوى الثالث

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2 + 5}} - u_n = u_n \cdot \frac{(3 - \sqrt{4u_n^2 + 5})}{\sqrt{4u_n^2 + 5}}$ بالضرب في مرافق البسط نجد :

$$u_{n+1} - u_n = u_n \cdot \frac{(4 - 4u_n^2)}{(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5})\sqrt{4u_n^2 + 5}} \text{ أي أن } u_{n+1} - u_n = u_n \cdot \frac{(9 - 4u_n^2 - 5)}{(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5})\sqrt{4u_n^2 + 5}}$$

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n \cdot \frac{(1 + u_n)(1 - u_n)}{(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5})\sqrt{4u_n^2 + 5}} \text{ بما أن } \frac{1}{2} \leq u_n < 1 \text{ فإن الفرق موجب إذن المتتالية متزايدة .}$$

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$3. \text{ ليكن } v_n = \frac{u_n^2}{1 - u_n^2} \text{ البرهان أن المتتالية هندسية } v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{1 - u_{n+1}^2} \text{ أي أن } v_{n+1} = \frac{9u_n^2}{4u_n^2 + 5 - 9u_n^2} = \frac{\left(\frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2 + 5}}\right)^2}{1 - \left(\frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2 + 5}}\right)^2}$$

$$\text{ومنه } v_{n+1} = \frac{9u_n^2}{5 - 5u_n^2} = \frac{9}{5} \left(\frac{u_n^2}{1 - u_n^2} \right) \text{ أي أن } v_{n+1} = \frac{9}{5} v_n \text{ إذن المتتالية هندسية أساسها } \frac{9}{5} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{u_0^2}{1 - u_0^2}$$

$$\text{أي } v_0 = \frac{1}{3} \text{ و منه } v_0 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$4. \text{ أ- كتابة عبارة الحد العام : } v_n = v_0 \left(\frac{9}{5} \right)^n \text{ أي } v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{5} \right)^n$$

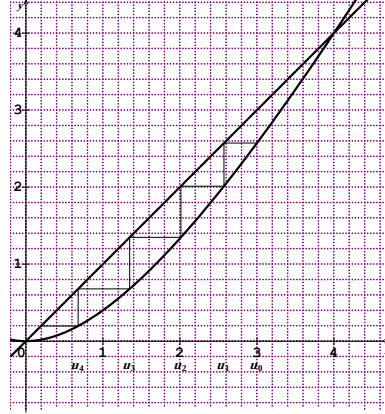
استنتاج عبارة u_n : $v_n = \frac{u_n^2}{1 - u_n^2}$ يعني أن $u_n^2 = v_n \cdot (1 - u_n^2)$ و منه $u_n^2 = \frac{v_n}{1 + v_n}$ بالتعويض نجد

$$u_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^n}} \text{ إذن } u_n^2 = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^n}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^n} \text{ (يمكن التبسيط أكثر } u_n = \sqrt{\frac{9^n}{3 \times 5^n + 9^n}} \text{)}$$

$$\text{ب- حساب النهاية } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^n}}{\sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^n}} = 1$$



مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)



(1) تبين ان الدالة f متزايدة تماما.

f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

f متزايدة تماما معناه من أجل كل

$x \in [0; +\infty[$ من أجل كل $f'(x) > 0$: $x \in [0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{4x(x+4) - 2x^2}{(x+4)^2} = \frac{2x(x+8)}{(x+4)^2}$$

$f'(x) > 0$ لأن $x \in [0; +\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما .

(2-أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 على حامل
(ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربا.

تخمين ان المتتالية متناقصة تماما ومقاربة نحو 0

(3 أ) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$.

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون: $0 \leq u_0 \leq 3$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \leq u_n \leq 3$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا: $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{18}{7}$

وعليه: $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ لأن $\frac{18}{7} < 3$ ومنه الخاصية $0 \leq u_n \leq 3$ صحيحة .

(ب) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) متناقصة معناه $u_{n+1} \leq u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{u_n+4} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n}{u_n+4}$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط $u_n^2 - 4u_n$ لأن المقام موجب

$u_n^2 - 4u_n = 0$ معناه $u_n = 4$ أو $u_n = 0$ وعليه إشارة $-u_n^2 + 2u_n + 8$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	4	$+\infty$
إشارة الفرق	-	0	+
اتجاه التغير	(u_n) متزايدة تماما		

بأن $0 \leq u_n \leq 3$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

(ج) استنتاج أن (u_n) مقاربة.

المتتالية (u_n) مقاربة لأنها متناقصة تماما من الجواب 3-ب، ومحدودة من الأسفل من الجواب 3-أ.

(4 أ) دراسة إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$.

$$7u_{n+1} - 6u_n = \frac{14u_n^2}{u_n+4} - 6u_n = \frac{8u_n(u_n-3)}{u_n+4}$$

إشارة $7u_{n+1} - 6u_n$ هي حسب إشارة البسط $u_n(u_n-3)$ لأن المقام موجب

$u_n(u_n-3) = 0$ معناه $u_n = 3$ أو $u_n = 0$ وعليه إشارة $7u_{n+1} - 6u_n$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	3	$+\infty$
إشارة $7u_{n+1} - 6u_n$	-	0	+

من الجدول نستنتج أن $7u_{n+1} - 6u_n < 0$ لأن $0 \leq u_n \leq 3$.

* ستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

★★★ تمارين المستوى الثالث

من الجواب السابق لدينا: $0 < 7u_{n+1} - 6u_n$ وتكافئ $u_{n+1} < \frac{6}{7}u_n$ (1) ولدينا: $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ (2)...

من المتباينتين (1) و (2) نستنتج أن: $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.

(ب) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

• التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^0 = 3$ محققة لأن $u_0 = 3$.

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا: $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ تكافئ $0 \leq \frac{6}{7}u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ وذلك بعد ضرب الطرفين في $\frac{6}{7}$ لكن $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$ ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$.

ومنه الخاصية $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا: $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ولدينا أيضا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

التمرين 05



العملاق في الرياضيات (بواب نورالدين)

1 أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1 = \frac{15}{64}$ و $u_2 = \frac{1695}{4096}$.

ب- رسم المنحني (p) و تمثيل النقط: انظر الشكل في نهاية الحل.

2 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$:
نسمي الخاصية " $0 < u_n < 1$ "

التحقق من صحة p_0 :

لدينا: $0 < u_0 < 1$ أي: $0 < \frac{1}{8} < 1$ وهي محققة. إذن: p_0 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة أي: $0 < u_n < 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي: $0 < u_{n+1} < 1$

من فرضية التراجع $0 < u_n < 1$ ، وبإضافة العدد -1 نجد $-1 < u_n - 1 < 0$

ومنه: $0 < (u_n - 1)^2 < 1$ ، وبالضرب بالعدد -1 نجد $-1 < -(u_n - 1)^2 < 0$

وبإضافة العدد $+1$ نجد $0 < -(u_n - 1)^2 + 1 < 1$ ، وبملاحظة أن:

$u_{n+1} = (2 - u_n)u_n = -(u_n - 1)^2 + 1$ نستنتج أن: $0 < u_{n+1} < 1$. ومنه: p_{n+1} صحيحة.

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$.

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = (2 - u_n)u_n - u_n = (1 - u_n)u_n$

ومن السؤال السابق وجدنا أن $0 < u_n < 1$ ومنه $u_n > 0$ و $1 - u_n > 0$

نستنتج أن الجداء موجب تماما أي $(1 - u_n)u_n > 0$ وبالتالي: $u_{n+1} - u_n > 0$

تأمين المستوى الثالث

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

ج- الاستنتاج : من السؤال 3 الفرع أ- نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومن السؤال 3 الفرع ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ ، وبالتالي نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3 أ- حساب v_0 و v_1 : $v_0 = \frac{7}{8}$ ، $v_1 = \frac{49}{64}$

ب- عبارة v_{n+1} بدلالة v_n :

لدينا : $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - (2 - u_n)u_n = (1 - u_n)^2$

إذن : $v_{n+1} = v_n^2$

استنتج v_n بدلالة n :

لدينا : $v_{n+1} = v_n^2$ ومنه : $v_1 = v_0^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}$

$v_2 = v_1^2 = (v_0^2)^2 = v_0^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^2}$

$v_3 = v_2^2 = (v_0^4)^2 = v_0^8 = \left(\frac{7}{8}\right)^8 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^3}$

$v_4 = v_3^2 = (v_0^8)^2 = v_0^{16} = \left(\frac{7}{8}\right)^{16} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^4}$

إذن : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

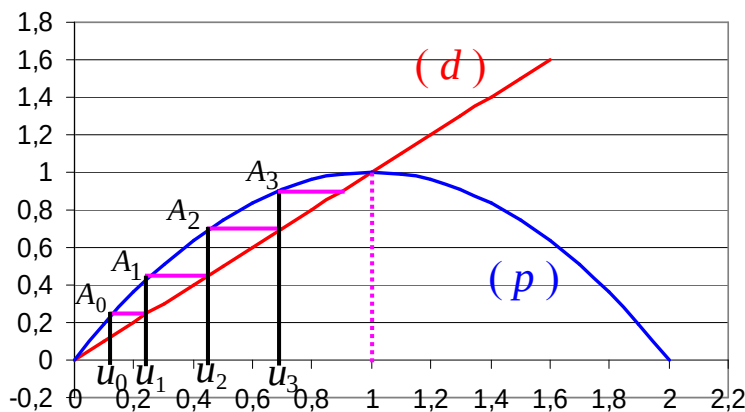
ج- استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = 1 - u_n$ إذن : $u_n = 1 - v_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

د- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$:

نعلم أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ و $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^p = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right) = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right) = 1$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$





سلسلة تمارين محلولة في المتتاليات (مصطفى عبد العزيز)

(1) تعيين اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - 4x - 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} \text{ لدينا } [0; +\infty[$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

(2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

ليكن x عدداً حقيقياً من المجال $[0; +\infty[$.

$$f(x) - x = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{4x+1-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\left(-x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $\frac{\left(x + \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1} > 0$ ومنه إشارة $f(x) - x$ مثل إشارة

$$\cdot \left(-x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$$

x	0	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) و (D) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$	(C_f) تحت (D)

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) إنشاء على محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$.

(ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

(2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$.

لدينا $2 \leq u_0 < \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $2 \leq u_n < \alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.

$2 \leq u_n < \alpha$ معناه $f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

بما أن $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(\alpha) = \alpha$ و $f(2) = 3$ إذن $3 \leq u_{n+1} < \alpha$ أي $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$.

★★★ تمارين المستوى الثالث

وكذلك لدينا $\alpha < v_0 \leq 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $\alpha < v_n \leq 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.
معناه $\alpha < v_n \leq 5$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.
بما أن $v_{n+1} = f(v_n)$ و $f(\alpha) = \alpha$ و $f(5) = \frac{7}{2}$ إذن $\alpha < u_{n+1} \leq \frac{7}{2}$ أي $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.
ومن هنا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$.

(ب) استنتاج اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; \alpha[$ ، $f(x) - x > 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
 $2 \leq u_n < \alpha$ فإن $f(u_n) - u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.
ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha; +\infty[$ لدينا $f(x) - x < 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
 $\alpha < v_n \leq 5$ فإن $f(v_n) - v_n < 0$ أي $v_{n+1} - v_n < 0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

(3) أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{4v_n u_n + 4v_n + u_n + 1 - 4v_n u_n - v_n - 4u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n - 3u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$ معناه $u_n + 1 \geq 3$ و $v_n \geq 2$ لأن $\alpha < v_n \leq 5$ معناه $v_n + 1 \geq 3$.
إذن $(v_n + 1)(u_n + 1) \geq 9$ يكافئ $\frac{3}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > u_n$

$$\text{فإن } \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n) \text{ أي } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا $v_0 - u_0 = 5 - 2 = 3$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ أي $v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1}$ أي نبرهن أن $v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ معناه $\frac{1}{3}(v_n - u_n) < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $\frac{1}{3}(v_n - u_n) < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ولدينا حسب السؤال السابق

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ ومنه $v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < \alpha$ و $v_n > \alpha$ ومنه $v_n > u_n$ أي $v_n - u_n > 0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

تأمين المستوى الثالث

(ج) استنتاج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

تحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ إذن المتتاليتان (v_n) و (u_n) متجاورتان

فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$ إذن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{وبالتالي} \quad \ell = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{وحسب ماسبق} \quad \ell = f(\ell)$$

التمرين 07



العلاق في الرياضيات (بواب نورالدين)

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

التفسير الهندسي لهذه النتيجة : المنحني (c) يقبل على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 نصف مماس يوازي محور الترتيب .

دراسة تغيرات الدالة f :

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

- من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ (الدالة f متزايدة تماما)

- جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	3	$+\infty$

إنشاء المنحني (c) :

تذكير : التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto g(x + \lambda) + \lambda'$

إذا كان C_g و C_f التمثيلين البيانيين في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ للدالتين g و f على

الترتيب فإن C_f هو صورة C_g بالانسحاب الذي شعاعه $-\lambda \vec{i} + \lambda' \vec{j}$.

(λ و λ' عدنان حقيقيان)

لدينا : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ ومنه : $f(x) = g(x-1) + 3$ حيث :

g هي الدالة " الجذر التربيعي "

نستنتج أن المنحني (c) هو صورة منحنى الدالة " الجذر التربيعي " بالانسحاب

الذي شعاعه $\vec{u}(1; 3)$.

★★★ تمارين المستوى الثالث

(2) أ- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل :
 ننطلق من الفاصلة $u_0 = 2$ ، ترتيب النقطة من المنحني (c) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D) . وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (c) ذات الفاصلة u_1 . نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D) ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :
 المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (c) و (D) ، هذه الفاصلة توافق الحل l للمعادلة $f(x) = x$ ومنه : $l = 5$
 (3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq 5$:
 نسمي p_n الخاصية " $2 \leq u_n \leq 5$ " التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $2 \leq u_0 \leq 5$ أي : $2 \leq 2 \leq 5$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة
 نفرض أن p_n صحيحة أي : $2 \leq u_n \leq 5$ ،
 ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $2 \leq u_{n+1} \leq 5$
 من فرضية التراجع : $2 \leq u_n \leq 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ نستنتج أن : $f(2) \leq f(u_n) \leq f(5)$ أي : $4 \leq u_{n+1} \leq 5$ ومنه : $2 \leq u_{n+1} \leq 5$ وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة
 طريقة أخرى : من فرضية التراجع : $2 \leq u_n \leq 5$ وبإضافة العدد -1 إلى الحدود الثلاثة نجد : $1 \leq u_n - 1 \leq 4$. وبما أن الدالة " الجذر التربيعي " متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ نستنتج أن : $1 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 2$ وبإضافة العدد 3 إلى الحدود الثلاثة نحصل على : $4 \leq 3 + \sqrt{u_n - 1} \leq 5$ أي : $4 \leq u_{n+1} \leq 5$ ومنه : $2 \leq u_{n+1} \leq 5$ وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة
 إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq 5$.

* البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$: نسمي p_n الخاصية " $u_{n+1} > u_n$ " التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_1 > u_0$ أي : $4 > 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة
 نفرض صحة p_n أي : $u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$
 من فرضية التراجع : $u_{n+1} > u_n$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ نستنتج أن : $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$ ومنه : p_{n+1} صحيحة .
 إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$.
 ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة :

لدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} > u_n$ نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما ولدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $2 \leq u_n \leq 5$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأعلى نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . (هذا ما يؤكد صحة المخمنة السابقة) .

تأمين المستوى الثالث

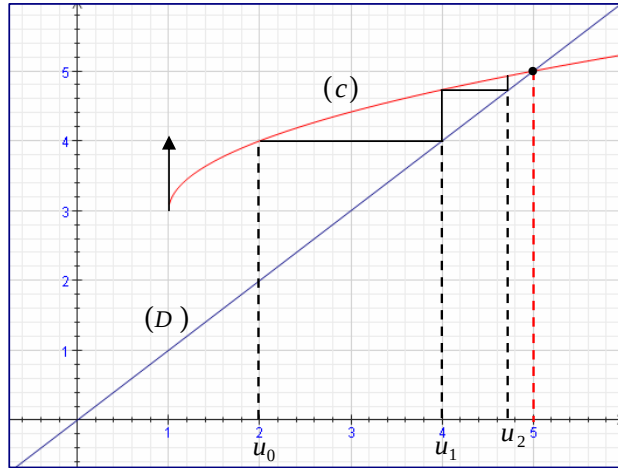
حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

نفرض أن (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

من العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج أن $l = 3 + \sqrt{l-1}$ وبحل هذه المعادلة

نجد : $l = 5$.

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$



التمرين 08



مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)

1-أ- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$.

اتجاه التغير: لدينا: $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ ومنه $f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على المجال $[0; 2]$ وعليه جدول تغيرات الدالة f كاملي:

x	0	2
f'(x)		+
f(x)		$\frac{7}{4}$
	$\frac{3}{2}$	

ب- إنشاء (C) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل (انظر الجواب 2-ب)

ج- البرهان أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ ان صورة المجال $[0; 2]$ هي المجال $[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$

ومنه $f(x) \in [0; 2]$ لأن المجال $[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$ محتو في المجال $[0; 2]$.

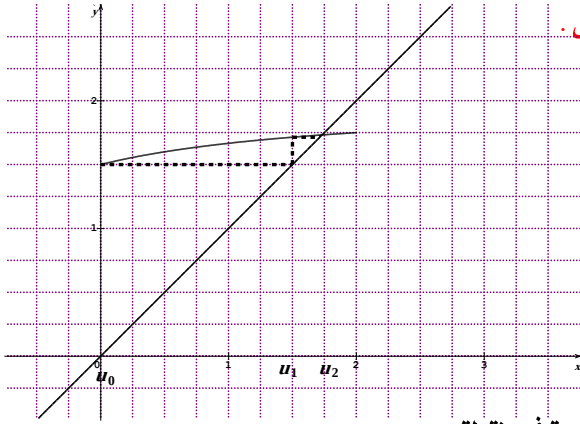
2-أ- تبرير وجود المتتالية (u_n) وحساب u_1 و u_2

المتتالية (u_n) موجودة لأنها معرفة بـ $u_0 = 0$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

وجميع حدودها تنتمي للمجال $[0; 2]$ وذلك حسب الجواب السابق 1-ج)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_2 = f(u_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{12}{7} \end{cases}$ نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

تأمين المستوى الثالث



ب- إنشاء المنحنى (C) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل .

ج- وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربا .

من خلال قيم الحدود u_0, u_1, u_2 أو تمثيلها نحمن أن المتتالية متزايدة ومقاربة نحو نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (D) $y = x$.

3- البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$ محققة لأن $u_0 = 0$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ صحيحة

ومنه: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$ لأن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[0; 2]$

ومنه: $\frac{3}{2} \leq f(u_n) \leq \sqrt{3}$ ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ لأن المجال $[\frac{3}{2}; \sqrt{3}]$ محتو في المجال $[0; \sqrt{3}]$.

ب- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} > u_n$ والاستنتاج بالنسبة إلى (u_n)

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} > u_n$ معناه $u_{n+1} - u_n > 0$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3}{u_n + 2} = \frac{-(u_n + \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2}$$

$0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ لأن $u_{n+1} - u_n > 0$ البسط موجب تماما والمقام موجب تماما من أجل

ج- التحقق أن $(u_n - \sqrt{3}) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} (u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(u_{n+1} - \sqrt{3}) = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2}$$

$$(u_{n+1} - \sqrt{3}) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} (u_n - \sqrt{3}) \text{ ومنه: } \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} < \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \text{ لأن } 0 < \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} < 1 \text{ لدينا:}$$

تعيين عددا حقيقيا k من المجال $[0; 1]$ بحيث: $|(u_{n+1} - \sqrt{3})| \leq k |(u_n - \sqrt{3})|$

من المتبينة $(u_{n+1} - \sqrt{3}) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} (u_n - \sqrt{3})$ نجد: $|(u_{n+1} - \sqrt{3})| \leq k |(u_n - \sqrt{3})|$ حيث: $k \leq \left| \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} \right|$

تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ $|(u_n - \sqrt{3})| \leq k^n |(u_0 - \sqrt{3})|$ ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

من المتبينة: $|(u_{n+1} - \sqrt{3})| \leq k |(u_n - \sqrt{3})|$

* لدينا: من أجل $n = 0$ نجد: $|(u_1 - \sqrt{3})| \leq k |(u_0 - \sqrt{3})|$ ومن أجل $n = 1$ نجد: $|(u_2 - \sqrt{3})| \leq k |(u_1 - \sqrt{3})|$

من أجل $n = 2$ نجد: $|(u_3 - \sqrt{3})| \leq k |(u_2 - \sqrt{3})|$ و... ومن أجل $n - 1$ نجد: $|(u_n - \sqrt{3})| \leq k |(u_{n-1} - \sqrt{3})|$

بضرب هذه المساويات طرف لطرف نجد وبعد التبسيط نجد: $|(u_n - \sqrt{3})| \leq k^n |(u_0 - \sqrt{3})|$

* لدينا مما سبق أن $|(u_n - \sqrt{3})| \leq k^n |(u_0 - \sqrt{3})|$

لدينا: k من المجال $[0; 1]$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(u_n - \sqrt{3})| = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

التمرين 01



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

لدينا: a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية حيث $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$.

1. لدينا إذن: $b^2 = a \times c$ ومنه $\ln(b^2) = \ln(a \times c)$ أي $2 \ln b = \ln a + \ln c$. وهذا يعني أن الأعداد: $\ln a, \ln b, \ln c$ هي حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

2. لدينا: $\ln(abc) = 21$ تعني $\ln a + \ln b + \ln c = 21$ ومنه $\ln b = 7$.

بالتعويض نجد $\ln a + \ln c = 14$. بوضع $\ln a = \alpha$ و $\ln c = \beta$ نجد $(\ln a)(\ln c) = -15$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 14 \\ \alpha \beta = -15 \end{cases}$$

ومنه α و β هما حلا المعادلة: $x^2 - 14x - 15 = 0$ ومنه:

$[\alpha = 15 \text{ و } \beta = -1]$ أي $a = e^{15}$ و $c = e^{-1}$ أو $[\alpha = -1 \text{ و } \beta = 15]$ أي $a = e^{-1}$ و $c = e^{15}$.

نستنتج هكذا أن:

$$(a; b; c) = \left(\frac{1}{e}; e^7; e^{15} \right) \quad \text{أو} \quad (a; b; c) = \left(e^{15}; e^7; \frac{1}{e} \right)$$

التمرين 02



مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة الرياضيات (04 نقاط)

1- لدينا $u_0 = a$ و $v_0 = b$ موجبان تماما لنفرض أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$ إذن $\sqrt{u_n v_n} > 0$ و $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$

يعني $u_{n+1} > 0$ و $v_{n+1} > 0$ ومنه نستخلص المطلوب لدينا $a < b$ يعني $u_0 < v_0$ لنفرض أن $u_n \leq v_n$ إذن

$$(v_{n+1})^2 - (u_{n+1})^2 = \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2 - (u_n v_n) = \frac{(u_n - v_n)^2}{2} > 0$$

و بما أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$ فإن $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ ومنه نستخلص المطلوب.

من أجل كل طبيعي n

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})} \times \frac{(u_n - v_n)}{2}$$

و منه حسب الارشاد

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \quad \text{يعني} \quad \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})} \times \frac{(u_n - v_n)}{2} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

$$v_0 - u_0 \leq \frac{1}{2^0}(b - a) \quad \text{ب-لدينا}$$

$$\text{نفرض أن } v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) \quad \text{حيث } (n \geq 0)$$

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

من السؤال السابق نجد $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

$$\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} (v_0 - u_0)$$

3- كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{u_n} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \geq 1$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \quad \text{من أجل كل طبيعي } n$$

و منه (v_n) متناقصة على N .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} (b-a) \right) = 0 \quad \text{و } 0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (b-a) \quad \text{أن } n \text{ كل طبيعي}$$

إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان

$$l \approx 3,328 \quad \text{إذن } u_3 = 3,3289968 - 4$$

التمرين 03



الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

$$u_5 = \frac{7}{16}, u_4 = \frac{11}{16}, u_3 = 1, u_2 = \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n \quad (2)$$

إذن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$$v_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{وبالتالي } v_0 = u_1 - \frac{u_0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$w_{n+1} - w_n = 2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = 2^{n+1} \left(u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right) = 2^{n+1}v_n$$

$$= \frac{2^{n+1} \times 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{2} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \times 3 = 3$$

إذن المتتالية (w_n) هي متتالية حسابية أساسها 3 ، حدها الأول $w_0 = -1$ و $w_n = 3n - 1$

$$u_n = \frac{w_n}{2^n} = \frac{3n-1}{2^n} \quad \text{نحصل على}$$

$$(3) \quad \left(\frac{3}{2} \right)^n \geq n, \quad n \geq 2 \quad \text{لتكن } P(n) \text{ الخاصية: من أجل كل}$$

$$\bullet \quad P(2) \text{ صحيحة لأن } \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \geq 2$$

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة. لدينا $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\frac{3}{2}\right) \geq n \times \left(\frac{3}{2}\right)$ ولكن $n \times \left(\frac{3}{2}\right) = n \left(1 + \frac{1}{2}\right) = n + \frac{n}{2} \geq n+1$ لأن $n \geq 2$. وبالتالي $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+1$ ومنه الخاصية $P(n) : \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$ صحيحة من أجل كل $n \geq 2$.

ب) نستطيع كتابة $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$ على الشكل $0 \leq n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ بالقسمة على 2^n ، نحصل

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ أي } 0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ و بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ فحسب النهايات وعلاقة الترتيب فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \times \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = 3 \times 0 - 0 = 0$$

التمرين 04



مدرسة أشبال الأمة 2019 شعبة علوم تجريبية (04 نقاط)

أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq n+3$
 نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ ، $u_0 \leq 0+3$ ، $u_0 = 2$ صحيحه لأن $u_0 = 2$
 نفرض صحة الخاصية من أجل n أي $u_n \leq n+3$
 نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي $u_{n+1} \leq n+4$
 لدينا $u_n \leq n+3$ (الفرضية) و عليه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n+2$ و منه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \leq n+3$
 أي $u_{n+1} \leq n+4$ ما يستلزم أن $u_{n+1} \leq n+4$ الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
 ب- اتجاه تغيّر (u_n) : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$
 $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 = -\frac{1}{3}(u_n - (n+3))$ بما أن $u_n \leq n+3$ فإن $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و عليه (u_n) متزايدة
 ج- (u_n) متزايدة و حدّها الأول $u_0 = 2$ إذن هي محدودة من الأسفل بـ 2.
 (u_n) غير متقاربة لأنها ليست محدودة من الأعلى
 2أ- إثبات أن (v_n) هندسية أساسها q ، معناه من أجل كل عدد طبيعي $n : v_{n+1} = v_n \times q$
 $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$ فعلا (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدّها الأول $v_0 = 2$
 ب- عبارة v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ و منه $u_n = v_n + n = \frac{2^{n+1}}{3^n} + n$
 ج- حساب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n + 12}{2} - \frac{2^{n+2}}{3^n}$

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

(3) أ- (t_n) متتالية حسابية أساسها r معناه من أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = t_n + r$

فعلا (t_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln \frac{2}{3}$ و حدّها $v_0 = \ln 2$

ب- حساب المجموع $S'_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$

$$S'_n = \frac{n+1}{2} \ln \frac{2^{n+2}}{3^n}$$

التمرين 05



جوابيل أحمد أسامة (مجموعة المتميز في الرياضيات)

$$w_n = v_n - u_n \text{ و } \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$1. \text{ أ. حساب } w_0 = v_0 - u_0 = 3 + 1 = 4$$

$$w_1 = v_1 - u_1 \text{ أي } w_1 = 3\alpha v_0 + (1-3\alpha)u_0 - 3\alpha u_0 - (1-3\alpha)v_0 \text{ إذن } w_1 = 9\alpha - (1-3\alpha) + 3\alpha - 3(1-3\alpha) \text{ إذن } w_1 = 24\alpha - 4$$

$$\text{ب. اثبات أن المتتالية } (w_n) \text{ هندسية : } w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n - 3\alpha u_n - (1-3\alpha)v_n \text{ أي أن } w_{n+1} = 3\alpha(v_n - u_n) + (1-3\alpha)(u_n - v_n) \text{ و منه } w_{n+1} = (6\alpha - 1)w_n \text{ إذن } w_{n+1} = (6\alpha - 1)w_n \text{ و منه المتتالية هندسية و أساسها } (6\alpha - 1).$$

$$\text{ج. كتابة عبارة الحد العام } w_n = w_0(6\alpha - 1)^n \text{ أي أن } w_n = 4(6\alpha - 1)^n$$

$$\text{تعيين قيم } \alpha \text{ حتى يكون } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ يكافئ أن } 1 < (6\alpha - 1) < -1 \text{ أي أن } 0 < 6\alpha < 2 \text{ يعني } 0 < \alpha < \frac{2}{6} \text{ أي } 0 < \alpha < \frac{1}{3}.$$

$$2. \text{ أ- إثبات أن المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة : } u_{n+1} - u_n = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n - u_n \text{ أي أن } u_{n+1} - u_n = (1-3\alpha)u_n + (1-3\alpha)v_n = (1-3\alpha)(v_n - u_n) \text{ موجب و منه المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة.}$$

$$\text{ب- إثبات أن المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة : } v_{n+1} - v_n = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n - v_n \text{ أي أن } v_{n+1} - v_n = (3\alpha - 1)v_n + (1-3\alpha)u_n = -(1-3\alpha)(v_n - u_n) \text{ الفرق سالب و منه المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة.}$$

$$\text{ب. لدينا } w_n = v_n - u_n \text{ و } \lim w_n = 0 \text{ و المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة و } (u_n) \text{ متزايدة و منه } \lim v_n = \lim u_n = l$$

$$\text{لدينا } v_{n+1} + u_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n + 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n = 3\alpha(v_n + u_n) + (1-3\alpha)(v_n + u_n) \text{ أي أن } v_{n+1} + u_{n+1} = 2(v_n + u_n) = v_0 + u_0 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{محققة } (v_n + u_n) = 2 \text{ أي أن } v_{n+1} + u_{n+1} = (v_n + u_n) = v_0 + u_0 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{و } \lim v_n = \lim u_n = l \text{ يعني أن } 2l = 2 \text{ إذن } l = 1$$

$$4. \text{ حساب المجموع } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020} \text{ و } \begin{cases} v_n + u_n = 2 \\ v_n - u_n = w_n \end{cases} \text{ بالطرح نجد } 2u_n = 2 - w_n \text{ و منه } u_n = 1 - \frac{1}{2}w_n \text{ إذن}$$

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

$$\text{إذن } S = (n+1) - \frac{1}{2} [w_0 + w_1 + \dots + w_{2020}] \text{ أي } S = \left(1 - \frac{1}{2} w_0\right) + \left(1 - \frac{1}{2} w_1\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2} w_{2020}\right)$$

$$S = (n+1) - \left[\frac{(6\alpha-1)^{2021} - 1}{3\alpha-1} \right] \text{ إذن } S = (n+1) - \frac{1}{2} \times 4 \left[\frac{(6\alpha-1)^{2021} - 1}{6\alpha-2} \right]$$

التمرين 06



كتابة الأستاذ (ب. لقمان + بلقاسم عبد الرزاق)

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \end{cases} \text{ لدينا : } (u_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ كما يلي :}$$

(1) حساب الحدود : u_3, u_2, u_1 :
 $u_3 = \ln(5) + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln(7)$ ، $u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln(3) + \ln(5) - \ln(3) = \ln(5)$ ، $u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln(3)$

(2) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :
 أي : $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 > 0$ ، لدينا : $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1}$ ، نعلم أن : $\frac{2}{2n+1} > 0$ ، ومنه : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.
 لدينا : $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، و $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، أي : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln(1)$ ، أي : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$ ،
 إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2n+1$:
 أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $e^{u_n} = v_n$:
 نضع الخاصية : $e^{u_n} = v_n$: $P(n)$.
 - نتحقق من صحة $P(0)$ ، أي : $e^{u_0} = v_0$ ، ومنه : $1 = 1$ ، إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
 - نفرض صحة $P(n)$ ، أي : $e^{u_n} = v_n$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

البرهان : لدينا فرضاً أن : $e^{u_n} = v_n$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times \frac{2n+3}{2n+1}$ ، ومنه : $e^{u_{n+1}} = v_n \times \frac{2n+3}{2n+1}$ ، ومنه : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

إذن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة يستلزم $P(n)$ صحيحة ، أي : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $e^{u_n} = v_n$.
 - عبارة u_n بدلالة n : لدينا $e^{u_n} = v_n$ ، أي : $u_n = \ln(v_n)$ ، ومنه : $u_n = \ln(2n+1)$.
 - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$.

(4) حساب المجموعين S_n و T :
 - حساب S_n : $S_n = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 - \ln v_1 + \dots + \ln v_n - \ln v_{n-1}$ ، أي : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$:
 أي : $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n$ ، أي : $S_n = \ln(2n+1)$ ، ومنه : $S_n = \ln(2n+1)$.

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

- حساب T : $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$ ، أي : $T = v_{1439} + v_{1440} + \dots + v_{2018}$ ، أي : $T = \frac{580}{2}(v_{1439} + v_{2018})$.
أي : $T = 290(2879 + 4037)$ ، و منه : $T = 2005640$.

التمرين 07

مواضيع مقترحة للأستاذ (ثابت ابراهيم) 

لدينا : $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$ و $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}$

(1) ولدينا أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = u_n + v_n$ ،

(1) البرهان أن المتتالية (a_n) ثابتة:

(a_n) ثابتة يعني $a_{n+1} - a_n = 0$

لدينا : $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} + v_{n+1} - (u_n + v_n)$

أي $a_{n+1} - a_n = -u_n + 4v_n + 2u_n - 3v_n - u_n - v_n = 2u_n - 2u_n + 4v_n - 4v_n = 0$

ومنه $a_{n+1} - a_n = 0$ أي (a_n) متتالية ثابتة

(ب) التعبير عن الحد العام a_n :

(a_n) متتالية ثابتة يعني $a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 5 - 2 = 3$

أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 3$ ،

(ج) حساب المجموع : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$

$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n = (n+1)a_0 = 3(n+1)$

(2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $b_n = u_n - 2v_n$.

(1) البرهان أن المتتالية (b_n) هندسية :

(b_n) هندسية يعني $b_{n+1} = q \times b_n$

لدينا : $b_{n+1} = u_{n+1} - 2v_{n+1} = -u_n + 4v_n - 2(2u_n - 3v_n)$

أي $b_{n+1} = -u_n + 4v_n - 4u_n + 6v_n = -5u_n + 10v_n = -5(u_n - 2v_n)$

أي : $b_{n+1} = -5b_n$ ومنه المتتالية (b_n) هندسية أساسها $q = -5$

وحدها الأول $b_0 = u_0 - 2v_0 = 5 - 2(-2) = 9$

(ب) حساب عبارة الحد العام b_n بدلالة n :

$b_n = b_0 \times q^n = 9 \times (-5)^n$

(ج) حساب المجموع : $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} b_i$

$S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 9 \times \frac{1 - (-5)^{n+1}}{1 - (-5)} = \frac{9}{6} \times (1 - (-5)^{n+1})$

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

(د) استنتاج عبارتي كل من u_n و v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = u_n - 2v_n \end{cases} \text{ ومنه } a_n - b_n = 3v_n$$

$$\text{أي } v_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) = \frac{1}{3}(3 - 9(-5)^n) = 1 - 3(-5)^n \text{ وبالتالي } v_n = 1 - 3(-5)^n$$

$$\text{ولدينا : } 2a_n + b_n = 3u_n$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}(6 + 9(-5)^n)$$

$$\text{وبالتالي : } u_n = 2 + 3(-5)^n$$

التمرين 08



مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة علوم تجريبية (04.5 نقاط)

1- من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1} = -\alpha(u_{n+1} - 3\alpha u_n) = -\alpha v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ وحدها الأول $v_0 = 2 - 3\alpha$

2- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = (2 - 3\alpha)(-\alpha)^n$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ لأن $-1 < \alpha < 1$ و $\alpha \neq 0$ ومنه (v_n) متقاربة

$$3- S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha} (1 - (-\alpha)^{n+1})$$

$$4- \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4} \text{ معناه } \frac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha} = \frac{3}{4} \text{ أي } \alpha = \frac{1}{3}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right]$$

$$\text{معناه } u_{n+1} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1} \text{ ومنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{7}{4} \text{ أي } (u_n) \text{ متقاربة}$$

$$5- \alpha = -\frac{1}{3} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 3 \times 3 \left(\frac{1}{3} \right) \times \dots \times 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n = 3^{n+1} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-(n+1)} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n^2 - n - 2}{2}}$$

$$\text{ب/ } \pi_n \leq 3^{-44} \text{ معناه } 3^{-\frac{n^2 - n - 2}{2}} \leq 3^{-44} \text{ معناه } (n-10)(n+9) \geq 0 \text{ و } n \text{ عدد طبيعي نجد } n \geq 10 \text{ ومنه أصغر عدد طبيعي هو } n = 10$$

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 01



مسابقة مفتش التعليم المتوسط 2019 (04 نقاط)

$$-1 \quad U_3 = \frac{1}{12}, U_2 = \frac{1}{6}, U_1 = \frac{1}{2}$$

$$-2 \quad U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2$$

$$-3 \quad \frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$$

-4 بالتراجع أو الدالة المرفقة.

-5 بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ فإن (U_n) متقاربة.

$$-6 \quad \text{بملاحظة أن } U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ فإن } S_{2019} = 1 - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}$$

التمرين 02



فقرة كل يوم سؤال بفكرة (بلقاسم عبد الرزاق)

أفكار المسئلة (هنا نتيج الحل)

1 كيفية التعبير عن الكتابة العشرية الدورية لعدد بمجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية .

2 حساب مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية .

3 تحويل الكتابة العشرية الدورية لعدد إلى الكتابة الكسرية له .

الحل

$$1 \quad \text{التحقق أن : } u_n = \frac{1}{10} \left(32 + \frac{43}{100} + \frac{43}{100^2} + \dots + \frac{43}{100^n} \right)$$

$$\text{لدينا : } u_n = 3, 2 \underbrace{4343 \dots 43}_n \text{ أي : } u_n = 3, 2 + \frac{43}{10^3} + \frac{43}{10^5} + \frac{43}{10^7} + \dots + \frac{43}{10^{2n+1}} \text{ أي يصبح :}$$

$$u_n = \frac{1}{10} \left[32 + \frac{43}{10^2} + \frac{43}{10^4} + \dots + \frac{43}{10^{2n}} \right] \text{ أي } u_n = \frac{32}{10} + \frac{43}{10^3} + \frac{43}{10^5} + \dots + \frac{43}{10^{2n+1}}$$

$$\text{و منه نحصل على : } u_n = \frac{1}{10} \left[32 + \frac{43}{100} + \frac{43}{100^2} + \dots + \frac{43}{100^n} \right] \text{ هو المطلوب .}$$

2 حساب المجموع S_n :

$$\text{لدينا : } S_n = \frac{43}{100} + \frac{43}{100^2} + \dots + \frac{43}{100^n} \text{ أي : } S_n = 43 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots + \frac{1}{100^n} \right) \text{ نجد :}$$

$$S_n = 43 \times \frac{1}{99} \left[1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] \text{ أي } S_n = 43 \left[\frac{1}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n}{1 - \frac{1}{100}} \right] \text{ أي } S_n = 43 \left[\frac{1}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n}{\frac{99}{100}} \right]$$

$$\text{و منه : } S_n = \frac{43}{99} \left[1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right]$$

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

3 إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

$$u_n = \frac{1}{10} \left[32 + \frac{43}{99} \left(1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right) \right] : \text{ لدينا } u_n = \frac{1}{10} (32 + S_n) \text{ أي } :$$

$$u_n = \frac{1}{10} \left[\frac{3211}{99} - \frac{43}{99} \times \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] : \text{ نجد أي } u_n = \frac{1}{10} \left[32 + \frac{43}{99} - \frac{43}{99} \times \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] \text{ أي } :$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3211}{990} : \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{43}{99} \times \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{10} \times \frac{3211}{99} \text{ ومنه يكون } :$$

$$\bullet A = \frac{3211}{990} : \text{ نلاحظ أن نهاية } u_n \text{ لما } n \text{ يؤول إلى } +\infty \text{ هي العدد } \frac{3211}{990} \text{ و عليه يكون } :$$

تعالق :

$$\bullet u_n = \frac{32}{10} + \frac{43}{10^3} + \frac{43}{10^5} + \frac{43}{10^7} + \dots + \frac{43}{10^{2n+1}} : \text{ في الخطوة } :$$

نلاحظ أن قوة العشرة هي أعداد فردية لهذا تكتب على الشكل : $2n+1$.

$$\bullet \text{ الجواب الثاني : } \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots + \frac{1}{100^n} \right) \text{ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية}$$

$$\bullet \text{ أساسها } \frac{1}{100} \text{ وحدها الأول } \frac{1}{100} .$$

$$\bullet \text{ الجواب الرابع : بما أن العدد } 43 \text{ يتكرر مالا نهاية من المرات إذن العدد } A \text{ يعتبر } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين 03



صفحة منارة جيوخ العربي للرياضيات

أ- برهان بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$:

$$\bullet \text{ من أجل } n = 0 \text{ لدينا } : u_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} , \text{ إذن } : 0 < u_0 < 1 .$$

$$\bullet \text{ لنفترض صحة : } 0 < u_n < 1 , \text{ ولنبين معا صحة العبارة : } 0 < u_{n+1} < 1 .$$

$$\bullet \text{ لدينا : } 0 < u_n < 1 , \text{ إذن } : -1 < -u_n^3 < 0 , \text{ بالتالي : } 0 < \frac{1 - u_n^3}{7} < \frac{1}{7} , \text{ إذن : } 0 < \sqrt[3]{\frac{1 - u_n^3}{7}} < \sqrt[3]{\frac{1}{7}} < 1 .$$

$$\bullet \text{ وأخيرا، نجد أن : } 0 < u_{n+1} < 1 .$$

$$\bullet \text{ فهذا نكون قد أثبتنا العبارة : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$$

$$\bullet \text{ ب- استنتاج أن } : \forall n \in \mathbb{N} : -1 < v_n < 7$$

$$\bullet \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} , \text{ لدينا : } 0 < u_n < 1 , \text{ وهذا يستلزم أن } 0 < u_n^3 < 1 , \text{ وعليه : } -1 < 8u_n^3 - 1 < 7 .$$

$$\bullet \text{ وهذا يعني أن : } \forall n \in \mathbb{N} : -1 < v_n < 7$$

$$\bullet \text{ أ.2 } v_0 = 8u_0^3 - 1 = 8 \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right)^3 - 1 = 1$$

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

ب- تبين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $v_{n+1} = 8u_{n+1}^3 - 1 = 8\left(\sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}}\right)^3 - 1 = 8\left(\frac{1-u_n^3}{7}\right) - 1 = -\frac{1}{7}v_n$ ،
ومنه $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية، وأساسها $q = -\frac{1}{7}$.

3.أ- من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$ ،

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $v_n = 8u_n^3 - 1$ ، وهذا يستلزم أن $u_n = \sqrt[3]{\frac{v_n+1}{8}}$ ، وأخيرا، نجد أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{2} \sqrt[3]{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^n}$$

ب-

$$S_n = \sum_{k=0}^{n+2020} v_k = v_0 \frac{1 - q^{n+2021}}{1 - q} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^{n+2021}}{1 + \frac{1}{7}} = \frac{7}{8} \left[1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^{n+2021}\right]$$

التمرين 04



سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ ، مع $n \in \mathbb{N}^*$.

1) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) لنبين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

$$: \text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} \right] = \frac{1}{2} \text{ أي } v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \text{ . وهو المطلوب .}$$

ب) لنبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \frac{1}{2}$. بما أن : $v_n = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}$ ونعلم أن : $\frac{(n+1)^2}{n^2} > 1$

أي : $\frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} > \frac{1}{2}$ ، ومنه : $v_n > \frac{1}{2}$.

ج) تعيين p ، بحيث يكون : $v_n < \frac{3}{4}$.

لدينا : $v_n < \frac{3}{4}$ ، أي : $\frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} < \frac{3}{4}$ ، وهذا يتحقق إذا كان : $\frac{(n+1)^2}{n^2} < \frac{3}{2}$ ، أي : $2(n+1)^2 < 3n^2$ ،

تتبع

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

أي: $2(n^2 + 2n + 1) < 3n^2$ ، أي: $-n^2 + 4n + 2 < 0$

(*) لندرس إشارة $-x^2 + 4x + 2 < 0$ على $\mathbb{R}$: بعد دراسة الإشارة نلاحظ أنه :

يكون : $-n^2 + 4n + 2 < 0$ إذا كان : $n > 2 + \sqrt{6}$ ، أي : $n > 4,44$ ، ومنه : $n \geq 5$.

إذن : أصغر قيمة لـ n كي يكون $v_n < \frac{3}{4}$ هي : 5 . أي أن : $p = 5$.

(د) إذا كان : $p \geq 5$ أي : $n \geq 5$ فإن : $v_n < \frac{3}{4}$ ، أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$ ، ومنه : $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

(2) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.

(أ) لنبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$

(*) لنتحقق من أجل $n = 5$ ، أي : $u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} \times u_5$ ، أي : $u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times u_5$ ، ومنه : $u_5 \leq u_5$ (محققة) .

(*) لنفرض أن : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$ ، ولنثبت أن : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \times u_5$.

لدينا : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$ ، أي : $\frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$ ، أي : $\frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \times u_5$ ، ونعلم أن : $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$

إذن : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \times u_5$ ، وهو المطلوب .

(*) وأخيرا من أجل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$

(ب) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$

$$S_n \leq \left[\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \right] \times u_5 \quad \text{بالمجموع نجد :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} \times u_5 \\ u_6 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} \times u_5 \\ u_7 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{7-5} \times u_5 \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5 \end{array} \right. \quad \text{، و حسب السؤال (أ) يصبح :}$$

ومنه : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \right] \times u_5$ ، وهو المطلوب .

(ج) أولا لنحسب المجموع : $\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \right]$ نلاحظ أن المجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول

٢٢٠

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

هو 1 ، و عدد حدودها هو : $n - 4$ ، أي :

$$\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \right] = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \right]$$

نعلم أنّ : $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} < 1$ أي : $4 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \right] < 4$ ، و منه : $4u_5 < 4 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \right] u_5$.

نعلم أنّ : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \right] \times u_5$ أي : $S_n \leq 4 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \right] \times u_5$ ،

إذن : $S_n \leq 4u_5$ ، وهو المطلوب .

(3) لنبين أنّ المتتالية (S_n) متزايدة :

$$S_{n+1} - S_n = (u_5 + u_6 + \dots + u_n) - (u_5 + u_6 + \dots + u_{n+1})$$

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

نلاحظ أنّ : $S_{n+1} - S_n > 0$ ، إذن : المتتالية (S_n) متزايدة من أجل كل $n \geq 5$.

(*) المتتالية (S_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $4u_5$ إذن : فستكون متقاربة .

التمرين 05



سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$

(1) لدينا : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

(أ) لنبين أنّ المتتالية (s_n) هندسية :

$$s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8(u_{n+1} + u_n)$$

و منه : $s_{n+1} = 8s_n$ ، إذن المتتالية (s_n) هندسية ،

أساسها 8 ، و حدها الأول : $s_0 = u_1 + u_0 = 1$.

(ب) عبارة s_n بدلالة n :

$$s_n = s_0 \times q^n$$

$$s_n = 8^n$$

(2) لدينا : $v_n = (-1)^n \times u_n$ و $t_n = v_{n+1} - v_n$

(*) التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$t_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} \times u_{n+1} - (-1)^n \times u_n = (-1)^n [-1 \times u_{n+1} - u_n]$$

$$= -(-1)^n \times s_n = -(-1)^n \times 8^n$$

$$t_n = -(-8)^n$$

و

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

(3) لنحسب المجموع : $t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى :

$$\begin{aligned} &= -(-8)^0 + (-(-8)^1) + \dots + (-(-8)^{n-1}) \\ &= -[1 + (-8) + (-8)^2 + \dots + (-8)^{n-1}] \end{aligned}$$

نلاحظ أن المجموع لمتتالية هندسية أساسها (-8) وحدها الأول هو : 1 ، وعدد حدودها هو : n حد .

$$t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} = \frac{(-8)^n - 1}{-8 - 1} = -\frac{(-8)^n - 1}{9} \quad \text{و منه : } t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} = \frac{(-8)^n - 1}{9}$$

الطريقة الثانية :

$$\begin{cases} t_0 = v_1 - v_0 \\ t_1 = v_2 - v_1 \\ t_2 = v_3 - v_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} = v_n - v_{n-1} \end{cases} \quad \text{لدينا : } t_n = v_{n+1} - v_n \text{ ، أي : } \text{بالجمع نجد : } t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} = v_n - v_0$$

$$v_0 = (-1)^0 \times u_0 = 0 \text{ ، فسيكون : } v_n = \frac{(-8)^n - 1}{9}$$

$$* \text{ كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : \quad u_n = \frac{v_n}{(-1)^n} = \frac{(-8)^n - 1}{9 \times (-1)^n} \quad \text{أي : } v_n = (-1)^n \times u_n \quad \text{و منه : } u_n = \frac{(-8)^n - 1}{9 \times (-1)^n}$$

(*) حساب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{8^n} \right)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{8^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-8)^n - 1}{9 \times (-1)^n \times 8^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-8)^n - 1}{9 \times (-8)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{9 \times (-8)^n} \right]$$

$$\text{و منه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{8^n} \right) = \frac{1}{9} \text{ ، لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{9 \times (-8)^n} \right] = 0$$

التمرين 06



سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق)

$$\text{لدينا : } u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$$

(1) البرهان : لدينا $u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ معناه أن : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0,95$ لأن : $(u_n > 0)$ و $(u_{n+1} > 0)$ ،

$$\text{أي : } \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{10}} \leq 0,95 \text{ أي : } \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{10}} \leq 0,95 \text{ ، ومنه : } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$$

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

x	1	$+\infty$
$f(x)$	1024	1

(2) الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{10}$

أ) اتجاه التغير: $f'(x) = 10 \times (1 + \frac{1}{x})^9 \times (-\frac{1}{x^2})$ ،

نلاحظ أن: $f'(x) < 0$ على $[1; +\infty[$ ، ومنه الدالة f متناقصة .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

ب) الدالة f مستمرة ورتيبة على $[1; +\infty[$ ، وصورة المجال $[1; +\infty[$ هي $]1; 1024]$ ،

و $1,9 \in]1; 1024]$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha) = 1,9$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث: $\alpha \in [1; +\infty[$.

ج) بالحاسبة نجد: $15 < \alpha < 16$ ، أي: $(n_0 = 16)$.

د) البرهان: من أجل $n \geq 16$ يكون: $f(n) \leq f(16)$ (لأن الدالة f متناقصة) ، أي: $(1 + \frac{1}{n})^{10} \leq f(16)$

ولدينا: $f(16) < 1,9$ ، ومنه: $(1 + \frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

(3) أ) من أجل $n \geq 16$ لدينا: $(1 + \frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$ معناه أن: $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0,95 < 1$ ،

ومنه فإن المتتالية (u_n) متناقصة .

ب) بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 0 لأن: $(u_n > 0)$ ، ومنه فإنها متقاربة .

(4) إثبات أن: $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ، من أجل $n \geq 16$: (نستعمل البرهان بالتراجع) .

✓ نتحقق من أجل $n = 16$: $0 \leq u_{16} \leq (0,95)^{16-16} \times u_{16}$ ، ومنه: $0 \leq u_{16} \leq u_{16}$ ، محققة .

✓ نفرض صحة: $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$.

✓ ونثبت صحة: $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n+1-16} \times u_{16}$ أي: $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$.

البرهان: لدينا فرضا: $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ، أي: $0 \leq 0,95 \times u_n \leq 0,95 \times (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ،

أي: $0 \leq 0,95u_n \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$ ، ولدينا: $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ ، ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$.

إذن من أجل كل $n \geq 16$: $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$

❖ إستنتاج نهاية (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$ ، لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,95)^{n-16} = 0$ (حسب خاصية النهايات بالحصص) .

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 07

📍 صفحة منارة جيوخ العربي للرياضيات

1. التحقق أنّ : $\omega^2 = \omega + 1$ و $\frac{1}{\omega} = \omega - 1$:

$$\omega^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} = \omega + 1 \quad \text{لدينا وضوحاً أنّ :}$$

$$\omega^2 = \omega + 1 \implies \omega(\omega - 1) = 1$$

$$\implies \frac{1}{\omega} = \omega - 1, \quad \omega \neq 0$$

2. تبين أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega^n - (1 - \omega)^n)$:
■ تخمين :

فإذا استفدنا من السؤال السابق، نجد :

$$\omega^2 = \omega + 1$$

$$\omega^3 = \omega^2 \omega = (\omega + 1) \omega = \omega^2 + \omega = \omega + 1 + \omega = 2\omega + 1$$

$$\omega^4 = \omega^3 \omega = (2\omega + 1) \omega = 2\omega^2 + \omega = 2(\omega + 1) + \omega = 3\omega + 2$$

$$\omega^5 = \omega^4 \omega = (3\omega + 2) \omega = 3\omega^2 + 2\omega = 3(\omega + 1) + 2\omega = 5\omega + 3$$

⋮

وهكذا ... نواصل بنفس الفكرة السابقة، فنحصل على :

$$\omega^n = a_n \omega + a_{n-1} \quad (\mathcal{R})$$

حيث $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية :

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \end{cases}$$

■ نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات العلاقة $(\mathcal{R})$:

$$\omega^2 = a_2 \omega + a_1 = \left(\underbrace{a_1 + a_0}_{=1} \right) \omega + a_1 = \omega + 1 \quad \text{لدينا : } n = 2 \text{ من أجل } \omega^2 : \text{ لنختبر العبارة } (\mathcal{R}), \text{ من أجل } n = 2 \text{ لدينا :}$$

ومنه العلاقة $(\mathcal{R})$ محققة من أجل $n = 2$. لنفترض أنّ العلاقة $(\mathcal{R})$ صحيحة من أجل n ، ولنبرهن صحتها من أجل $n + 1$.

أولاً، لدينا من فرضية التراجع $(\mathcal{R})$.

ثانياً، لنضرب العلاقة $(\mathcal{R})$ في ω ، فنحصل على :

$$\omega^{n+1} = a_n \omega^2 + a_{n-1} \omega = a_n (\omega + 1) + a_{n-1} \omega = \left(\underbrace{a_n + a_{n-1}}_{=a_{n+1}} \right) \omega + a_n = a_{n+1} \omega + a_n$$

⋮

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

وهذا يكافئ بدوره العبارة : $\omega^{n+1} = a_{n+1}\omega + a_n$

وأخيرا، يكتمل البرهان.

■ تخمين :

$$\begin{aligned} \omega^{-1} &= \frac{1}{\omega} = \omega - 1 & \text{فإذا استفدنا من السؤال الأول، نجد :} \\ \omega^{-2} &= \omega^{-1}\omega^{-1} = (\omega - 1)(\omega - 1) = -\omega + 2 \\ \omega^{-3} &= \omega^{-2}\omega^{-1} = (-\omega + 2)\omega^{-1} = 2\omega - 3 \\ \omega^{-4} &= \omega^{-3}\omega^{-1} = (2\omega - 3)\omega^{-1} = -3\omega + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

وهكذا ... نواصل بنفس الفكرة السابقة، فنحصل على :

$$\omega^{-n} = (-1)^n (a_{n+1} - a_n\omega) \quad (\mathcal{Z})$$

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \end{cases} \quad \text{حيث } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية :}$$

■ يمكن إثبات العلاقة $(\mathcal{Z})$ بنفس إثبات العلاقة $(\mathcal{R})$ ، لهذا الغرض يُترك الإثبات للطالب.

. نضرب العلاقة $(\mathcal{Z})$ في $(-1)^n$ ، فنجد : $(-1)^n \omega^{-n} = a_{n+1} - a_n\omega \quad (\mathcal{Q})$

بطرح المعادلة $(\mathcal{Q})$ من $(\mathcal{R})$ ، فنجد : $\omega^n - (-1)^n \omega^{-n} = a_n\omega + a_{n-1} - (a_{n+1} - a_n\omega)$

$$= 2a_n\omega + a_{n-1} - a_{n+1}$$

$$= 2a_n\omega + a_{n-1} - (a_n + a_{n-1})$$

$$= (2\omega - 1)a_n$$

$$= \sqrt{5}a_n$$

$$\text{ومنه، نستنتج أن : } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\omega^n - (-1)^n \omega^{-n})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\omega^n - (-1)^n \omega^{-n}) = +\infty \quad \text{نجد :}$$

3. إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا : $\omega^n (b_n - \omega) a_n = (-1)^n$

أولا، نستفيد من العلاقة $(\mathcal{Z})$.

ثانيا، لما كان n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا : $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ، استنتجنا أن : $\omega^{-n} = (-1)^n (a_n b_n - a_n\omega) = (-1)^n a_n (b_n - \omega)$

وعليه، بعد ضرب فهذه الأخيرة في $(-1)^n \omega^n$ ، نجد : $(-1)^n = \omega^n (b_n - \omega) a_n$

تتو

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ، بقسمة الطرفين على a_{n+1} ، فنحصل : $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$.
 وهذا يعني أنّ : $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ (لأنّ : $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$) .
 بادخال النهاية على الطرفين هذه الأخيرة ، فنجد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$.
 نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$ ، ومنه : $l = 1 + \frac{1}{l}$ ، بعبارة أخرى : $l^2 = l + 1$.
 وهي معادلة من الدرجة الثانية مجهولها l ، وبما أنّ : $\omega > 0$ ، فإنّ : $l = \omega$.



الجزء الأول

1 حساب d_0 ، d_1 و d_2 ثم استنتاج الأساس q'

لدينا بما أن المتتالية (d_n) هندسية فإن: $d_1^2 = d_0 \times d_2$ بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $d_1^2 = -\frac{1}{729}$ إذن $d_1 = -\frac{1}{9}$.
الجملة (F) تصبح تكافئ: $\begin{cases} d_0 + d_2 = -\frac{10}{27} \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} d_0 = -\frac{10}{27} - d_2 \dots (3) \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \dots (4) \end{cases}$ بتعويض المعادلة (3) في (4) نجد:
 $\left(-\frac{10}{27} - d_2\right) d_2 = \frac{1}{81}$ يكافئ: $-d_2^2 - \frac{10}{27}d_2 - \frac{1}{81} = 0$ ، بحل هذه الأخيرة نجد حلولها هي: $d_2 = -\frac{1}{3}$ و $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبما أن المتتالية (d_n) متزايدة فإن $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبالتعويض في المعادلة (3) نتحصل على $d_0 = -\frac{1}{3}$.
أساس المتتالية (d_n) هو: $q' = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{3}$.

2 كتابة d_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$

المتتالية (d_n) هندسية ومنه: $d_n = d_0(q')^n$ إذن: $d_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 0$ لأن: $1 > \frac{1}{3} > -1$.

3 تعيين أكبر عدد طبيعي n حتى يكون: $d_n < -\frac{3}{10^3}$

لدينا: $d_n < -\frac{3}{10^3}$ يكافئ: $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < -\frac{3}{10^3}$ يكافئ: $\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{9}{10^3}$ أي $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n > \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$ معناه $n \ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$ ومنه $n < \frac{\ln\left(\frac{9}{10^3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ أي $n < 4.2877$ من هنا نجد أن أكبر عدد طبيعي n يحقق $d_n < -\frac{3}{10^3}$ هو: $n = 4$.

الجزء الثاني

1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

الجزء الثالث

$$v_{n+1} = \frac{a + v_n}{1 + av_n} \text{ ومنه } v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right) + v_n - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right)} \text{ لدينا:}$$

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n \neq 0$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $v_0 = a$ ونعلم أن $a \neq 0$ ومنه $v_0 \neq 0$ إذن الخاصية " $v_n \neq 0$ " محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن $v_n \neq 0$ ونبرهن أن $v_{n+1} \neq 0$.
- لدينا من الفرض: $v_n \neq 0$ يكافئ $v_n + a \neq 0$ و $a \neq 0$ إذن $(*)$ $v_n + a \neq 0$ ومن جهة أخرى لدينا: $av_n \neq 0$ أي $av_n + 1 \neq 1$ يكافئ $(**)$ $\frac{1}{1+av_n} \neq 1$ بضرب $(*)$ في $(**)$ طرف بطرف نجد أن $v_{n+1} \neq 0$.
- إذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة

المتتالية (v_n) ثابتة معناه $v_{n+1} = v_n = v_0 = a$ وعليه بالتعويض نجد : $a = \frac{a+a}{1+a \cdot a}$ يكافئ $a(1+a^2) = 2a$ أي $a^3 - a = 0$ معناه : $a(a^2 - 1) = 0$ حلول هذه المعادلة الأخيرة هي : $s = \{-1; 0; 1\}$ وبما أن $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإن قيمة a حتى تكون المتتالية (v_n) هي : $a = 1$.

الجزء الرابع

1. إيجاد قيمة b حتى تكون المتتالية (w_n) هندسية مع تعيين كل من أساسها q وحدها الأول w_0 بدلالة a

بما أن $1 - ba \neq 0$ فإنه لدينا :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - b}{v_{n+1} + b} = \frac{\frac{a+v_n}{1+av_n} - b}{\frac{a+v_n}{1+av_n} + b} = \frac{\frac{a+v_n - b - bavn}{1+av_n}}{\frac{a+v_n + b + bavn}{1+av_n}} = \frac{(1-ba)v_n + (a-b)}{(1+ba)v_n + (a+b)} = \frac{1-ba}{1+ba} \cdot \frac{v_n + \frac{a-b}{1-ba}}{v_n + \frac{a+b}{1+ba}}$$

ومنه حتى تكون المتتالية (w_n) هندسية يجب أن يكون : $\begin{cases} \frac{a-b}{1-ba} = -b \\ \frac{a+b}{1+ba} = b \end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases} a-b = -b + b^2a \\ a+b = b + b^2a \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} a(b^2-1) = 0 \\ a(b^2-1) = 0 \end{cases}$ بما أن $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $b^2 - 1 = 0$ حلولها هي : $b = -1$ و $b = 1$ وبما أن b عدد حقيقي موجب تماماً فإن $b = 1$.

$$\text{إذن من أجل } b = 1 \text{ نجد : } w_{n+1} = \frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{v_n + \frac{a-1}{1-a}}{v_n + \frac{a+1}{1+a}} = \frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{v_n - 1}{v_n + 1} = \frac{1-a}{1+a} \cdot w_n$$

وعليه من أجل $b = 1$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1-a}{1+a}$ وحدها الأول $w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 + 1} = \frac{a-1}{a+1}$.

من أجل قيمة b السابقة كتابة عبارة w_n ثم استنتاج عبارة v_n بدلالة كل من a و n

• (w_n) هندسية معناه : $w_n = w_0 \times q^n$ وعليه : $w_n = \frac{a-1}{a+1} \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^n = - \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1}$ ومنه $w_n = - \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1}$

• لدينا : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$ يكافئ : $w_n(v_n + 1) = v_n - 1$ أي $w_n \cdot v_n + w_n = v_n - 1$ معناه : $w_n + 1 = v_n(1 - w_n)$ ومنه :

$$v_n = \frac{1 + w_n}{1 - w_n} \quad \text{بتعويض عبارة } w_n \text{ في المعادلة الأخيرة نجد : } v_n = \frac{1 + \left(- \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1} \right)}{1 - \left(- \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1} \right)} \quad \text{و.م.م.}$$

حساب كل من : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

لدينا : $1 - a < 1 + a < - (1 + a) < -1$ وعليه : $1 < \frac{1-a}{1+a} < -1$ (واضح أن $1+a$ عدد حقيقي موجب تماماً) ، ومنه :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(- \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1} \right) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1} = 0 \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1} \right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1} \right)} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{n+1}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

2. - نضع في كلِّ ممَّا يلي $b = 1$ و $a = 3$.

من أجل $a = 3$ لدينا : $w_0 = \frac{1}{2}$ و $q = -\frac{1}{2}$ كتابة بدلالة n المجموع s_n

$$s_n = w_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{3}$ لأن : $-1 < -\frac{1}{2} < 1$.

كتابة بدلالة n المجموع s'_n

لدينا : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$ يكفي : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1} = 1 - \frac{2}{v_n + 1}$:
وبالتالي : $\frac{2}{v_n + 1} = 1 - w_n$: $\frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_n)$

$$\begin{aligned} s'_n &= \frac{1}{v_0 + 1} + \frac{1}{v_1 + 1} + \frac{1}{v_2 + 1} + \dots + \frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_0) + \frac{1}{2}(1 - w_1) + \frac{1}{2}(1 - w_2) + \dots + \frac{1}{2}(1 - w_n) \\ &= \frac{1}{2}((1 - w_0) + (1 - w_1) + (1 - w_2) + \dots + (1 - w_n)) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + \dots + 1 - (w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n)) \\ &= \frac{1}{2}((n + 1) - s_n) = \frac{1}{2}\left((n + 1) - \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ومنه : $s'_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$ ، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (s'_n)

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = +\infty$
ومنه المتتالية (s'_n) متباعدة .

كتابة بدلالة n المجموع s''_n

وجدنا في السؤال السابق : $\frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_n)$ وبترتيب الطرفين نجد : $\left(\frac{1}{v_n + 1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - w_n)\right)^2$ إذن :
إذن : $\frac{1}{(v_n + 1)^2} = \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2)$ ومنه : $\frac{1}{(v_n + 1)^2} = \frac{1}{4}(1 - w_n)^2$

$$\begin{aligned} s''_n &= \frac{1}{(v_0 + 1)^2} + \frac{1}{(v_1 + 1)^2} + \frac{1}{(v_2 + 1)^2} + \dots + \frac{1}{(v_n + 1)^2} \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_1 + w_1^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_2 + w_2^2) + \dots + \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2) \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2 + 1 - 2w_1 + w_1^2 + 1 - 2w_2 + w_2^2 + \dots + 1 - 2w_n + w_n^2) \\ &= \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + \dots + 1 - 2(w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n) + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2)) \\ &= \frac{1}{4}((n + 1) - 2s_n + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2)) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + ((w_0 q^0)^2 + (w_0 q^1)^2 + (w_0 q^2)^2 + \dots + (w_0 q^n)^2)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2(q^0)^2 + w_0^2(q^1)^2 + w_0^2(q^2)^2 + \dots + w_0^2(q^n)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2(q^0 + q^{2(1)} + q^{2(2)} + \dots + q^{2(n)})\right) = \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2\left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2\left(\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

ومنه : $s''_n = \frac{n}{4} - \frac{1}{12}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{6}$

كتابة بدلالة كل من n و m المجموع h_n

لدينا : $w_n^m = (w_0 q^n)^m = w_0^m (q^n)^m = w_0^m \cdot q^{n(m)} = w_0^m \cdot (q^m)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^n$

ومنه المتتالية (w_n^m) هندسية أساسها هو : $q^m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m$ وحدها الأول هو : $w_0^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m$ وعليه :

$$h_n = w_0^m \left(\frac{1 - (q^m)^{n+1}}{1 - q^m} \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m} \right) = \frac{1^m}{2^m} \left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1 - \frac{(-1)^m}{2^m}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{\frac{2^m - (-1)^m}{2^m}} \right) = \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m - (-1)^m} \right)$$

ومنه $h_n = \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m - (-1)^m} \right)$ حيث m عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 . (لاحظ أنه لما $m = 1$ يصبح $h_n = s_n$) .

كتابة بدلالة n الجداء G_n

لدينا : $\ln G_n = \ln |w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n| = \ln |w_0| + \ln |w_1| + \ln |w_2| + \dots + \ln |w_n|$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا : $\ln |w_n| = \ln |w_0 \cdot q^n| = \ln |w_0| + \ln |q^n| = \ln |w_0| + n \ln |q|$ حسابية أساسها هو :

إذن : $\ln |w_0| = \ln \left| \frac{1}{2} \right| = -\ln 2$ وحدها الأول هو : $r = \ln |q| = \ln \left| -\frac{1}{2} \right| = \ln \left| \frac{1}{2} \right| = -\ln 2$

$$\ln G_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) (\ln |w_0| + \ln |w_n|) = \left(\frac{n+1}{2} \right) (\ln |w_0| + \ln |w_0| + n \ln |q|) = \left(\frac{n+1}{2} \right) (2 \ln |w_0| + n \ln |q|)$$

$$= (n+1) \left(\ln |w_0| + \frac{n}{2} \ln |q| \right) = (n+1) \left(-\ln(2) - \frac{n \ln(2)}{2} \right) = -(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right)$$

وعليه : $G_n = e^{-(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right)}$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n$ ، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (G_n)

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right)} = 0$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right) = -\infty$ ومنه المتتالية (G_n) متقاربة .

كتابة بدلالة n الجداء E_n

$$E_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots \times e^{w_n} = e^{w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n} = e^{s_n} = e^{\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)}$$

• طبيعة المتتالية (E_n) مع تبرير الإجابة

إن المتتالية (E_n) متقاربة ، التبرير : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} = e^{\frac{1}{3}}$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

كتابة بدلالة n الجداء P_n

$$P_n = w_0^{2020} \times w_1^{2020} \times w_2^{2020} \times \dots \times w_n^{2020} = (w_0 q^0)^{2020} \times (w_0 q^1)^{2020} \times (w_0 q^2)^{2020} \times \dots \times (w_0 q^n)^{2020}$$

$$= w_0^{2020} \cdot (q^0)^{2020} \times w_0^{2020} \cdot (q^1)^{2020} \times w_0^{2020} \cdot (q^2)^{2020} \times \dots \times w_0^{2020} \cdot (q^n)^{2020}$$

$$= w_0^{2020} \cdot w_0^{2020} \cdot w_0^{2020} \cdot \dots \cdot w_0^{2020} \times q^{2020(0)} \cdot q^{2020(1)} \cdot q^{2020(2)} \cdot \dots \cdot q^{2020(n)}$$

$$= (w_0^{2020})^{n+1} \times q^{2020(0+1+2+\dots+n)} = w_0^{2020(n+1)} \times q^{2020 \left(\frac{n+1}{2} \right) (0+n)} = w_0^{2020(n+1)} \times q^{1010n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1) + 1010n(n+1)}$$

ومنه : $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)}$

•  تبين أن المتتالية (P_n) متقاربة

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)} = 0$ وبالتالي المتتالية (P_n) متقاربة .

3  التحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإن $\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$

$$\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - \left(\frac{1+\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}\right) = \frac{2-1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}} = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$$

 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ثم حساب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

• من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0+1}} - 1 = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 4 - 1 = 3 = v_0$ ومنه الخاصية " $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ محققة

من أجل $n = 0$.

• نفرض أن : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ونبرهن أن : $v_{n+1} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{3+v_n}{1+3v_n} = \frac{3+\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)}{1+3\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)} = \frac{2+\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{-2+\frac{6}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}} = \frac{2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+2}{-2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+6} \\ &= \frac{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{4\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{4\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1 \end{aligned}$$

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$

ولدينا : $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right) = 1$

الجزء الخامس

1  دراسة تغيرات الدالة f_3 على المجال $[1;4]$

المشتقة

الدالة f_3 معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3'(x) = \frac{1+3x-3(3+x)}{\frac{(1+3x)^2}{3+x} + 1} = \frac{-8}{(3+x)(1+3x)} + 1 = \frac{-8+3+9x+x+3x^2}{(3+x)(1+3x)} = \frac{3x^2+10x-5}{(3+x)(1+3x)}$$

إشارة $f_3'(x)$ من إشارة $3x^2+10x-5$ لأن : $(3+x)(1+3x) > 0$ موجب تماما على المجال $[1;4]$.

لنحل المعادلة التالية : $3x^2 + 10x - 5 = 0$ مميزها هو $\Delta = b^2 - 4ac = 100 + 60 = 160$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{160}$ إذن حلولها هي :
 $x_1 = \frac{-10 + \sqrt{160}}{6}$ و $x_2 = \frac{-10 - \sqrt{160}}{6}$. وتكون إشارة كثير الحدود $A(x) = 3x^2 + 10x - 5$ كالآتي :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$A(x)$	+	0	0	+

لكن : $x \in [1; 4]$ و $x_2 < 1$ ومنه : $f_3'(x) > 0$ إذن الدالة f_3 متزايدة تماماً على المجال $[1; 4]$. ويكون جدول تغيراتها كآيلي :

x	1	4
$f_3'(x)$	+	+
$f_3(x)$	1	$\ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$

2 تبين أن $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{1+3x}{3+9x} + \frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{9+3x}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{3(3+x)}{3(1+3x)}\right) = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)$$

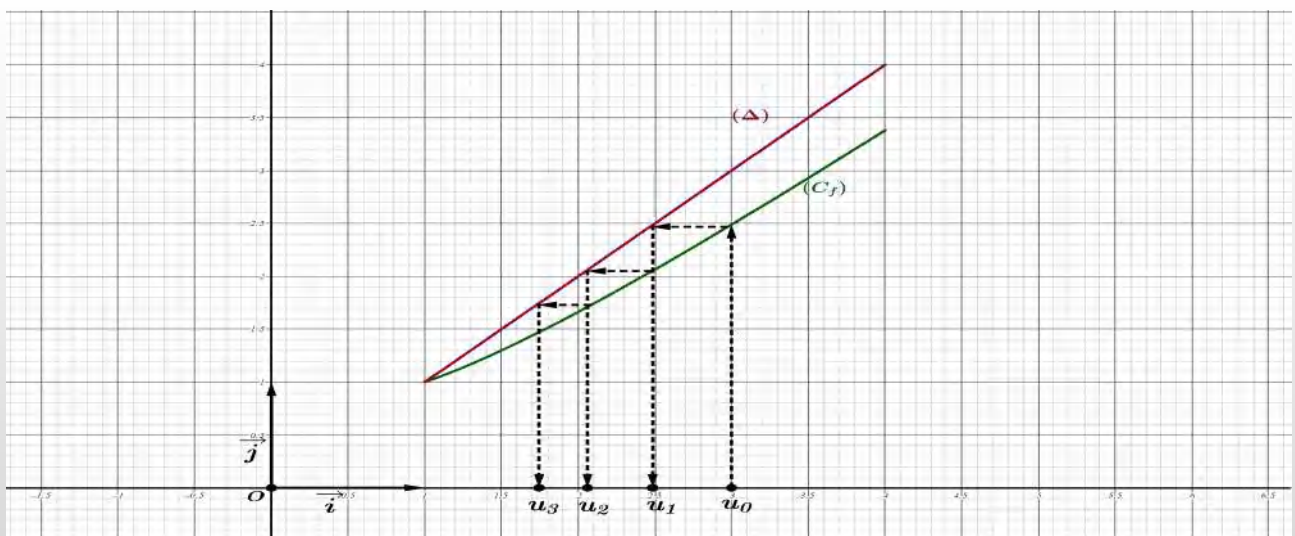
3 دراسة وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على $[1; 4]$

لدينا : $f_3(x) - y = f_3(x) - x = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right)$
 دراسة إشارة $f_3(x) - y$

$f_3(x) - y = 0$ معناه : $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = 0$ أي : $\frac{3+x}{1+3x} = 1$ معناه : $3+x = 1+3x$ ومنه : $x = 1$
 لـ $x > 1$ يكافئ : $9x > 9$ معناه : $9x + 3 > 12$ أي : $\frac{1}{9x+3} < \frac{1}{12}$ يكافئ : $\frac{1}{3} + \frac{1}{9x+3} < \frac{5}{12}$ وعليه : $\ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right) < \ln\left(\frac{5}{12}\right)$
 ومنه : $f_3(x) - y < 0$

- لـ $x \in [1; 4]$ المنحنى (C_{f_3}) يقع تحت المستقيم (Δ) ويتقاطعان في النقطة $(1; 1)$.

3 إنشاء المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1; 4]$



إنشاء المنحنى (C_{f_3}) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3

4 برهان أنه إذا كان $x \in [1; 4]$ فإن $f_3(x) \in [1; 4]$

لدينا : $x \in [1; 4]$ معناه $1 \leq x \leq 4$ بما أن الدالة f_3 متزايدة فإن : $f_3(1) \leq f_3(x) \leq f_3(4)$ يكافئ : $1 \leq f_3(x) \leq \ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$:
 $\ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4 < 4$ فإن $1 \leq f_3(x) \leq 4$ ومنه $f_3(x) \in [1; 4]$.

الجزء السادس

1 تبرير وجود المتتالية (u_n)

لدينا من السؤال 4 في الجزء الخامس فإن : $u_n \in [1; 4]$ وعليه المتتالية (u_n) موجودة .

 تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ممثلة في الرسم السابق .

 وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال البيان نلاحظ أن حدود المتتالية (u_n) تتناقص وبالتالي نُخمن أنها متناقصة كما نلاحظ أنها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_{f_3}) مع المنصف الأول (المستقيم (Δ)) وعليه نُخمن أنها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 1 .

2 البرهان بالترجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n < 4$

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3$ ونعلم أن : $1 \leq 3 < 4$ ومنه $1 \leq u_0 < 4$ ومنه الخاصية " $1 \leq u_n < 4$ " محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن : $1 \leq u_n < 4$ ونبرهن أن : $1 \leq u_{n+1} < 4$.

لدينا من الفرض : $1 \leq u_n < 4$ بما أن الدالة f_3 متزايدة فإن : $f_3(1) \leq f_3(u_n) < f_3(4)$ يكافئ : $1 \leq u_{n+1} < \ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$ بما أن :
 $\ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4 < 4$ فإن $1 \leq u_{n+1} < 4$.

إذن حسب البرهان بالترجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n < 4$.

 تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \leq u_n$ ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

وجدنا تما سبق أنه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f_3(x) - x \leq 0$ وعليه بما أن : $1 \leq u_n < 4$ فإن : $f_3(u_n) - u_n \leq 0$ أي : $f_3(u_n) \leq u_n$:
 إذن : $u_{n+1} \leq u_n$ هذا ما يبين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

 إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n < 4$ معناه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1 وبما أنها متناقصة فإنها متقاربة نحو 1 .

 إيجاد نهاية المتتالية (u_n)

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ حيث l عدد حقيقي .
 إيجاد l

لدينا : $f_3(l) = l$ يكافئ : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right) + l = l$ أي : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right) = 0$ معناه : $\frac{3+l}{1+3l} = 1$ وبالتالي : $3+l = 1+3l$ ومنه : $l = 1$:
 إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3 تبين أنه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f'_3(x) \leq f'_3(4)$

الدالة f'_3 معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1; 4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3''(x) = \frac{(6x+10)(3+x)(1+3x) - (6x+10)(3x^2+10x-5)}{(3+x)^2(1+3x)^2} = \frac{(6x+10)[3x^2+10x+3 - (3x^2+10x-5)]}{(3+x)^2(1+3x)^2}$$

ومنه : $f_3''(x) = \frac{16(3x+5)}{(3+x)^2(1+3x)^2}$ ، واضح أنه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f_3''(x) > 0$ ومنه الدالة f'_3 متزايدة تماما على $[1; 4]$.
 لدينا : $x \leq 4$ وعليه بما أن الدالة f'_3 متزايدة تماما على المجال $[1; 4]$ فإن : $f'_3(x) \leq f'_3(4)$.

 حساب $f'_3(4)$

$$f'_3(4) = \frac{3(4)^2 + 10(4) - 5}{(3+4)(1+3(4))} = \frac{3(16) + 40 - 5}{(7)(13)} = \frac{83}{91}$$

$$u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_n - 1) : n \in \mathbb{N} \text{ كل أجل من أجل كل } n$$

لدينا : $f_3'(x) \leq f_3'(4)$ وبما أن الدالة f_3' مستمرة فإنها تقبل المكاملة على المجال $[1; 4]$ وبما أن : $1 \leq u_n < 4$ فإن : $\int_1^{u_n} f_3'(x) dx \leq \int_1^{u_n} f_3'(4) dx$: $\int_1^{u_n} f_3'(x) dx \leq f_3'(4) \int_1^{u_n} dx$ معناه : $[f_3(x) + c_1]_1^{u_n} \leq f_3'(4) [x + c_2]_1^{u_n}$ - حيث c_1 و c_2 عددين حقيقيين -
وعليه : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_n - 1)$ ومنه : $f_3(u_n) - f_3(1) \leq f_3'(4) (u_n - 1)$ و.ه.م .

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n \text{ تبين أنه من أجل كل } n \text{ عدد طبيعي :}$$

باستعمال المتباينة السابقة - $u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_n - 1)$ - لدينا :

$$\begin{aligned} n = 0 : u_1 - 1 &\leq \frac{83}{91} (u_0 - 1) \\ n = 1 : u_2 - 1 &\leq \frac{83}{91} (u_1 - 1) \\ n = 2 : u_3 - 1 &\leq \frac{83}{91} (u_2 - 1) \\ &\vdots \\ n = n - 2 : u_{n-1} - 1 &\leq \frac{83}{91} (u_{n-2} - 1) \\ n = n - 1 : u_n - 1 &\leq \frac{83}{91} (u_{n-1} - 1) \end{aligned}$$

بضرب المتباينات طرف بطرف نجد :

$$(u_1 - 1)(u_2 - 1)(u_3 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)(u_n - 1) \leq \left(\frac{83}{91} \right)^n (u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_{n-2} - 1)(u_{n-1} - 1)$$

إذن بعد الاختزالات نجد : $(u_n - 1) \leq \left(\frac{83}{91} \right)^n (u_0 - 1)$ يكافئ : $u_n - 1 \leq \left(\frac{83}{91} \right)^n (3 - 1)$ ومنه : $u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ هذا من جهة
ومن جهة أخرى لدينا : $u_n \leq 1$ وعليه : $u_n - 1 \leq 0$ إذن نجد : $0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ و.ه.م .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ استنتاج}$$

لدينا : $0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ وكذلك $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n = 0$ لأن : $\frac{83}{91} < 1$ إذن حسب النهايات بالحصص نتحصل على :
• $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \text{ حساب}$$

4

لدينا : $f_3(u_k) = \ln \left(\frac{3 + u_k}{1 + 3u_k} \right) + u_k$ يكافئ : $-\ln \left(\frac{3 + u_k}{1 + 3u_k} \right) = u_k - f_3(u_k)$ ومنه : $\ln \left(\frac{1 + 3u_k}{3 + u_k} \right) = u_k - u_{k+1}$ إذن :
$$\begin{aligned} T_n &= \ln \left(\frac{1 + 3u_0}{3 + u_0} \right) + \ln \left(\frac{1 + 3u_1}{3 + u_1} \right) + \ln \left(\frac{1 + 3u_2}{3 + u_2} \right) + \dots + \ln \left(\frac{1 + 3u_{n-1}}{3 + u_{n-1}} \right) \\ &= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{n-2} - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_n) \\ &= u_0 - u_n \end{aligned}$$

ومنه : $T_n = 3 - u_n$. وعليه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) = 3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - 1 = 2$.

الجزء السابع

لدينا : $L_{n+1} = 2L_n f_5(L_n) - L_n^2 = 2L_n \left(\ln \left(\frac{5 + L_n}{1 + 5L_n} \right) + L_n \right) - L_n^2 = 2L_n \cdot \ln \left(\frac{5 + L_n}{1 + 5L_n} \right) + 2L_n^2 - L_n^2 = 2L_n \cdot \ln \left(\frac{5 + L_n}{1 + 5L_n} \right) + L_n^2$:
وعليه نلاحظ أن : $L_{n+1} = g(L_n)$.

$$0 \leq L_n \leq 1 \text{ فإن : البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1

• من أجل $n = 0$ لدينا : $L_0 = \frac{1}{5} \leq 1$ ونعلم أن : $\frac{1}{5} \leq 1$ وعليه : $0 \leq L_0 \leq 1$ إذن الخاصية " $0 \leq L_n \leq 1$ " محققة من أجل $n = 0$.

- نفرض أنّ : $0 \leq L_n \leq 1$ ونبرهن أنّ : $0 \leq L_{n+1} \leq 1$.
- لدينا من الفرض : $0 \leq L_n \leq 1$ بما أنّ الدالة g متزايدة فإنّ : $g(0) \leq g(L_n) \leq g(1)$ وعليه : $0 \leq L_{n+1} \leq 1$.
- إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0 \leq L_n \leq 1$.

2 تبين أنّه من أجل كل $x \in [0;1]$: $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$

نضع من أجل كل x من المجال : $[0;1]$: $h(x) = 2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x$
الدالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ ودالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = 2 \left(\frac{\frac{1+5x-5(5+x)}{(1+5x)^2}}{\frac{5+x}{1+5x}} \right) + 1 = 2 \left(\frac{-24}{(1+5x)(5+x)} \right) + 1 = \frac{5x^2 + 26x - 43}{(1+5x)(5+x)}$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $5x^2 + 26x - 43$ لأنّ : $(5+x)(1+5x)$ موجب تماماً على المجال $[0;1]$.
نحل المعادلة التالية : $5x^2 + 26x - 43 = 0$ مميزها هو $\Delta = b^2 - 4ac = 676 + 860 = 1536$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1536}$ إذن حلولها هي :
 $x_1 = \frac{-13 - 8\sqrt{6}}{5}$ و $x_2 = \frac{-13 + 8\sqrt{6}}{5}$ وتكون إشارة كثير الحدود $B(x) = 3x^2 + 10x - 5$ كالآتي :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$B(x)$	+	0	-	0	+

لكن : $x \in [0;1]$ و $x_1 < 0$ و $x_2 > 1$ ومنه : $h'(x) < 0$ إذن الدالة h متناقصة تماماً على المجال $[0;1]$.
وعليه لما : $x \leq 1$ وبما أنّ الدالة h متناقصة تماماً على المجال $[0;1]$ فإنّ : $h(x) \geq h(1)$ أي : $h(x) \geq 1$ ومنه : $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$ و.ه.م.

إثبات أنّ المتتالية (L_n) متزايدة

بما أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة فإنّ :

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2L_n f_5(L_n) - L_n^2}{L_n} = 2f_5(L_n) - L_n = 2 \left(\ln \left(\frac{5+L_n}{1+5L_n} \right) + L_n \right) - L_n = 2 \ln \left(\frac{5+L_n}{1+5L_n} \right) + L_n$$

وجدنا أنّه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإنّ : $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$ وبما أنّ : $0 \leq L_n \leq 1$ فإنّ : $2 \ln \left(\frac{5+L_n}{1+5L_n} \right) + L_n \geq 1$ وعليه :
 $\frac{L_{n+1}}{L_n} \geq 1$ ومنه : $L_{n+1} \geq L_n$ إذن : $L_{n+1} - L_n \geq 0$ لنجد في الأخير أنّ المتتالية (L_n) متزايدة و.ه.م.

تبين أنّ (L_n) متقاربة ثم إيجاد نهايتها

وجدنا أنّ : $0 \leq L_n \leq 1$ هذا معناه أنّ المتتالية (L_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبما أنّها متزايدة فهي متقاربة نحو 1.

إيجاد نهاية المتتالية (L_n)

بما أنّ (L_n) متقاربة فإنّ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{n+1} = l_1$ حيث l_1 عدد حقيقي.

لدينا : $l_1 = g(l_1)$ أي : $g(l_1) - l_1 = 0$ ومنه حسب ماهو معطى : $g(x) - x = 0$ لما $x = 1$ نجد أنّ : $l_1 = 1$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 1$

3 تبين أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان

وجدنا أنّ سابقاً أنّ :

• المتتالية (u_n) متناقصة بينما المتتالية (L_n) متزايدة .

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

إذن المتتاليتان (L_n) و (u_n) متجاورتان .



$$\begin{cases} u_0 = \alpha ; \alpha \neq 1 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases} \quad \text{الجزء الأول: لدينا } (u_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي :}$$

(1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $p(n) : u_n \neq 1$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \alpha \neq 1$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \neq 1$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \neq 1$.

يكفي إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1$ يستلزم $u_n = 1$

لدينا $u_{n+1} = 1$ منه : $\frac{8u_n - 6}{u_n + 1} = 1$ ومنه : $8u_n - 6 = u_n + 1$ ومنه : $7u_n = 7$ إذن : $u_n = 1$

إذن إذا كان $u_n \neq 1$ فإن $u_{n+1} \neq 1$ أي $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 1$.

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية $x^2 - 7x + 6 = 0$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25$ ، إذن للمعادلة حلان مختلفان هما :

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 5}{2} = 6 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

(3) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

(u_n) متتالية ثابتة يعني من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$

من العلاقة : $u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1}$ نجد : $\alpha = \frac{8\alpha - 6}{\alpha + 1}$ منه : $\alpha(\alpha + 1) = 8\alpha - 6$ ومنه : $\alpha^2 + \alpha = 8\alpha - 6$

أي : $\alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0$ وهي المعادلة السابقة ، وعليه : $\alpha = 6$ (مقبول) أو $\alpha = 1$ (مرفوض لأن $\alpha \neq 1$)

الجزء الثاني : نفرض في كل ما يلي : $u_0 = 8$.

$$(1) \text{ لنتحقق أن : } u_n = 8 - \frac{14}{u_n + 1}$$

$$\text{لدينا : } u_n = 8 - \frac{14}{u_n + 1} \text{ منه : } \frac{8(u_n + 1) - 14}{u_n + 1} = \frac{8u_n + 8 - 14}{u_n + 1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1}$$

- لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $p(n) : u_n \geq 6$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 8 > 6$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \geq 6$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \geq 6$.

لدينا حسب فرضية التراجع أن : $u_n \geq 6$ ومنه : $u_n + 1 \geq 7$ ومنه : $\frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{7}$ ومنه : $\frac{-14}{u_n + 1} \geq \frac{-14}{7}$

ومنه : $8 - \frac{14}{u_n + 1} \geq 8 - 2$ أي : $u_{n+1} \geq 6$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 6$.

$$(2) \text{ إثبات أن: } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - u_n = \frac{8u_n - 6 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{8u_n - 6 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-(u_n^2 - 7u_n + 6)}{u_n + 1}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}} \text{ إذن:}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن $u_n \geq 6$ فإن $u_n - 6 \geq 0$ و $u_n - 1 < 6$ و $u_n + 1 > 0$ إذن: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

(3) إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن $u_n \geq 6$ فإن (u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة فهي متقاربة و تقترب نحو العدد الحقيقي ℓ

$$\text{منه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} \text{ منه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} \text{ و منه: } \ell = \frac{8\ell - 6}{\ell + 1} \text{ تكافئ: } \ell^2 + \ell = 8\ell - 6$$

$$\boxed{\ell^2 - 7\ell + 6 = 0} \text{ تكافئ:}$$

(4) تعيين النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا: } \ell^2 - 7\ell + 6 = 0 \text{ من أجل } \ell = 1 \text{ أو } \ell = 6$$

$$\text{بما أن } u_n \geq 6 \text{ فإن } \ell = 6 \text{ و عليه: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6}$$

الجزء الثالث: لدينا من أجل $x \in [1; 8]$ $f(x) = \frac{8x - 6}{x + 1}$

(1) دراسة تغيرات الدالة f :

x	1	8
$f'(x)$	$\vdots$	$\vdots$
$f(x)$	1	$\frac{58}{9}$

$$f'(x) = \frac{8(x+1) - 1(8x-6)}{(x+1)^2} = \frac{8+6}{(x+1)^2} = \frac{14}{(x+1)^2} > 0 : x \in [1; 8] \text{ من أجل كل}$$

منه f دالة متزايدة تماماً على المجال $[1; 8]$.

(2) لنبين أنه إذا كان $x \in [4; 8]$ فإن $f(x) \in [4; 8]$.

$$\text{لدينا: } x \in [4; 8] \text{ و } f \text{ دالة متزايدة تماماً، منه: } f(x) \in [f(4); f(8)] \text{ و منه: } f(x) \in \left[\frac{26}{4}; \frac{58}{9}\right]$$

$$\text{بما أن: } [4; 8] \subset \left[\frac{26}{5}; \frac{58}{9}\right] \text{ فإن: } \boxed{f(x) \in [4; 8]}$$

(3) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $6 \leq u_n \leq 8$: $p(n)$.

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$ من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 8$ منه: $6 \leq u_0 \leq 8$ إذن $p(0)$ محققة.

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي: $6 \leq u_n \leq 8$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $6 \leq u_{n+1} \leq 8$.

$$\text{لدينا حسب فرضية التراجع: } 6 \leq u_n \leq 8 \text{ و } f \text{ دالة متزايدة تماماً، منه: } f(6) \leq f(u_n) \leq f(8) \text{ أي: } \frac{58}{9} \leq u_{n+1} \leq 6$$

$$\text{و بما أن } \frac{58}{9} \leq 8 \text{ فإن: } 6 \leq u_{n+1} \leq 8 \text{ منه } p(n+1) \text{ صحيحة}$$

$$\text{إذن من أجل كل عدد طبيعي } n, \boxed{6 \leq u_n \leq 8}.$$

الجزء الرابع: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $4 \leq v_n \leq 6$: $p(n)$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = 4$ منه : $4 \leq v_0 \leq 6$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $4 \leq v_n \leq 6$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $4 \leq v_{n+1} \leq 6$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $4 \leq v_n \leq 6$ و f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f(4) \leq f(v_n) \leq f(6)$ أي : $\frac{26}{5} \leq v_{n+1} \leq 6$

و بما أن $\frac{26}{5} \geq 4$ فإن : $4 \leq v_{n+1} \leq 6$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq v_n \leq 6$.

(2) إثبات أن (v_n) متتالية متزايدة :

$$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n = \frac{8v_n - 6}{v_n + 1} - v_n = \frac{-(v_n - 1)(v_n - 6)}{v_n + 1}$$

بما أن $4 \leq v_n \leq 6$ فإن $v_n - 6 \leq 0$ و $-(v_n - 1) < 0$ و $v_n + 1 > 0$

إذن : $v_{n+1} - v_n \geq 0$ وبالتالي (v_n) متتالية متزايدة .

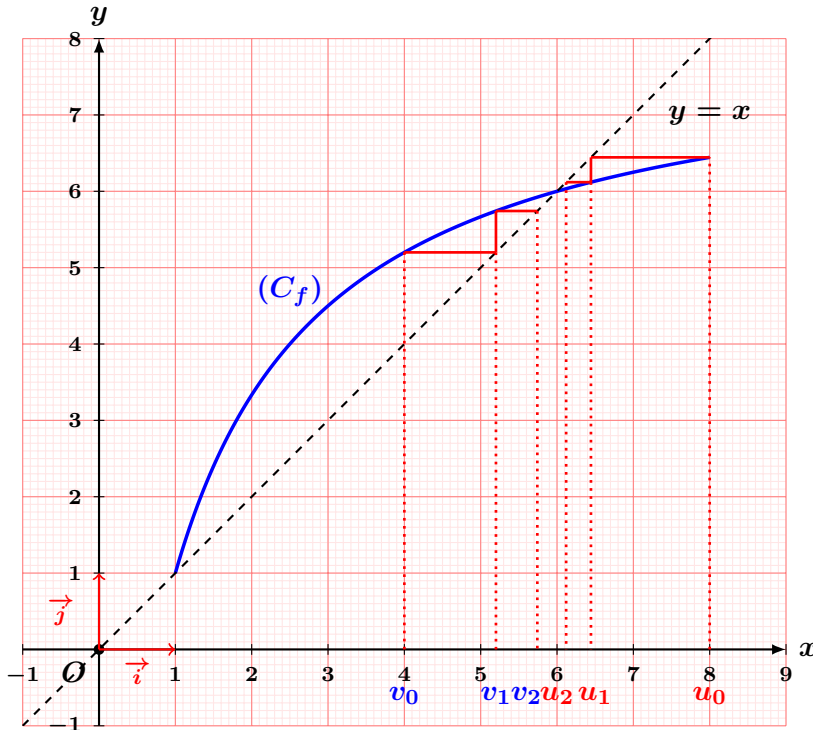
الاستنتاج : بما أن $4 \leq v_n$ فإن (v_n) متتالية محدودة من الأسفل و متزايدة فهي متقاربة و تقترب نحو العدد الحقيقي ℓ' .

(3) تمثيل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 و v_2 : أنظر الشكل أدناه .

(4) التخمين :

من الشكل نلاحظ أن : $v_0 < v_1 < v_2$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة متناقصة و تقترب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ أي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' = 6$$



الجزء الخامس: لدينا المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n)$

$$(1) \quad \text{لنثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : w_{n+1} = \frac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$$

لدينا : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n) = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - \frac{8v_n + 1}{v_n + 1} = \frac{(8u_n - 6)(v_n + 1) - (8v_n + 1)(u_n + 1)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$

$$= \frac{(8u_nv_n + 8u_n - 6v_n - 6) - (8v_nu_n + 8v_n - 6u_n - 6)}{(u_n + 1)(v_n + 1)} = \frac{+8u_n - 6v_n - 8v_n + 6u_n}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$$

$$= \frac{14u_n - 14v_n}{(u_n + 1)(v_n + 1)} = \frac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \frac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$

(2) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N} : w_n \geq 0$

لدينا : $w_n = u_n - v_n$ أي $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$ منه : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n)$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $w_0 = u_0 - v_0 = 8 - 4 = 4 \geq 0$ إذن $w_0 = u_0 - v_0 = 8 - 4 = 4 \geq 0$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي $w_n \geq 0$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي $w_{n+1} \geq 0$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $w_n \geq 0$ أي $u_n - v_n \geq 0$ منه : $14(v_n - u_n) \geq 0$

نقسم الطرفين على العدد $(u_n + 1)(v_n + 1)$ الموجب تماماً فنجد : $\frac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \geq 0$ وبالتالي : $w_{n+1} \geq 0$

أي $p(n+1)$ صحيحة ، إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n \geq 0$

(3) لنبين من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{14}{35}(u_n - v_n)$

لدينا : $\begin{cases} u_n \geq 6 \\ v_n \geq 4 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_n + 1 \geq 7 \\ v_n + 1 \geq 5 \end{cases}$ و منه : $(u_n + 1)(v_n + 1) \geq 35$ أي : $\frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{35}$

نضرب طرفي المتباينة بالعدد الموجب $14(u_n - v_n)$ فنجد : $\frac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{14}{35}(u_n - v_n)$

إذن : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{14}{35}(u_n - v_n)$

(4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - v_n \leq 4\left(\frac{14}{35}\right)^n$

لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$ منه :

$$\begin{cases} u_1 - v_1 \leq \frac{14}{35}(u_0 - v_0) \\ u_2 - v_2 \leq \frac{14}{35}(u_1 - v_1) \\ u_3 - v_3 \leq \frac{14}{35}(u_2 - v_2) \\ \vdots \\ u_n - v_n \leq \frac{14}{35}(u_{n-1} - v_{n-1}) \end{cases}$$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $u_n - v_n \leq \left(\frac{14}{35}\right)^n (u_0 - v_0)$

و بما أن: $u_0 - v_0 = 8 - 4 = 4$ فإن: $u_n - v_n \leq 4 \left(\frac{14}{35} \right)^n$

الاستنتاج: بما أن (u_n) متتالية متناقصة و (v_n) متتالية متزايدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

الجزء السادس: لدينا المتتالية (L_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $L_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$

(1) لنبرهن أن (L_n) متتالية هندسية:

$$L_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 6}{\frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 1} = \frac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{8u_n - 6 - (u_n + 1)} = \frac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{8u_n - 6 - (u_n + 1)} = \frac{2u_n - 12}{7u_n - 7}$$

$$L_{n+1} = \frac{2}{7} \left(\frac{u_n - 6}{u_n - 1} \right) = \frac{2}{7} L_n \text{ منه:}$$

إذن (L_n) متتالية هندسية متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{7}$ وحدها الأول $L_0 = \frac{u_0 - 6}{u_0 - 1} = \frac{8 - 6}{8 - 1} = \frac{2}{7}$ أي: $L_0 = \frac{2}{7}$

(2) إيجاد عبارة الحد العام L_n بدلالة n :

لدينا: $L_n = L_0 \times q^n$ منه: $L_n = \frac{2}{7} \times \left(\frac{2}{7} \right)^n$ إذن: $L_n = \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1}$

- استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $L_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$ منه: $L_n (u_n - 1) = u_n - 6$ تكافئ: $L_n u_n - L_n = u_n - 6$ تكافئ: $L_n u_n - u_n = L_n - 6$

$$u_n = \frac{\left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} - 6}{\left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} - 1} \text{ تكافئ: } u_n (L_n - 1) = L_n - 6 \text{ تكافئ: } u_n = \frac{L_n - 6}{L_n - 1} \text{ إذن:}$$

(3) حساب النهايات:

✓ بما أن $1 < \frac{2}{7} < -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} = 0$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$ ، نستنتج أن (L_n) متتالية متقاربة نحو 0 .

✓ و: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} - 6}{\left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} - 1} = \frac{-6}{-1} = 6$ ، نستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة نحو 6 .

(4) حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا: $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n$ منه: $S_n = L_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

$$S_n = \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} \right) \text{ إذن: } S_n = \frac{2}{7} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} \right) = \frac{2}{7} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1}}{\frac{5}{7}}$$

$$L_n - 1 = -\frac{5}{u_n - 1} : \text{ومنه } L_n = 1 - \frac{5}{u_n - 1} : \text{ومنه } L_n = \frac{u_n - 1 - 5}{u_n - 1} : \text{منه } L_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1} : \text{لدينا}$$

$$\frac{1 - L_n}{5} = \frac{1}{u_n - 1} : \text{أي}$$

$$S'_n = \frac{1 - L_0}{5} + \frac{1 - L_1}{5} + \dots + \frac{1 - L_n}{5} : \text{منه } S'_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1} : \text{ولدينا}$$

$$S'_n = \frac{n + 1 - S_n}{5} : \text{أي } S'_n = \frac{1 + 1 + \dots + 1 - (L_0 + L_1 + \dots + L_n)}{5} : \text{ومنه}$$

$$S'_n = \frac{n + 1 - \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{7} \right)^{n+1} \right)}{5} : \text{إذن}$$

(5) حساب بدلالة n الجداء P_n :

$$P_n = L_0^{2018} \times L_1^{2018} \times L_2^{2018} \times \dots \times L_n^{2018} : \text{لدينا}$$

$$P_n = L_0^{2018} \times (L_0 q)^{2018} \times (L_0 q^2)^{2018} \times \dots \times (L_0 q^n)^{2018} : \text{تكافئ}$$

$$P_n = L_0^{2018} \times L_0^{2018} q^{2018} \times L_0^{2018} q^{2 \times 2018} \times \dots \times L_0^{2018} q^{n \times 2018} : \text{تكافئ}$$

$$P_n = L_0^{2018} \times L_0^{2018} \times L_0^{2018} \times \dots \times L_0^{2018} \times q^{2018 + 2 \times 2018 + \dots + n \times 2018} : \text{تكافئ}$$

$$P_n = \left(\frac{2}{7} \right)^{2018(n+1)} \times \left(\frac{2}{7} \right)^{2018 \times \frac{n}{2} (1+n)} : \text{تكافئ } P_n = (L_0^{2018})^{n+1} \times q^{2018(1+2+\dots+n)} : \text{تكافئ}$$

$$P_n = \left(\frac{2}{7} \right)^{3027(n+1)} : \text{إذن } P_n = \left(\frac{2}{7} \right)^{2018(n+1)} \times \left(\frac{2}{7} \right)^{1009(n+1)} : \text{تكافئ}$$

الجزء السابع:

$$u_{n+1} - 6 = \frac{2(u_n - 6)}{u_n + 1} : \text{لنبرهن من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : (1)$$

$$u_{n+1} - 6 = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 6 = \frac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{8u_n - 6 - 6u_n - 6}{u_n + 1} = \frac{2u_n - 12}{u_n + 1} : \text{لدينا}$$

$$u_{n+1} - 6 = \frac{2(u_n - 6)}{u_n + 1} : \text{منه}$$

$$|u_{n+1} - 6| \leq k |u_n - 6| : \text{بحيث } 0; 1] \text{ من المجال } k : \text{تعيين العدد الحقيقي } k : (2)$$

$$(1) \dots |u_{n+1} - 6| = \frac{2}{u_n + 1} |u_n - 6| : \text{منه } u_{n+1} - 6 = \frac{2(u_n - 6)}{u_n + 1} : \text{لدينا}$$

$$2 |u_n - 6| \leq \frac{1}{u_n + 1} : \text{نضرب الطرفين بالعدد الموجب } u_n + 1 \geq 7 : \text{منه } u_n \geq 6 : \text{ولدينا}$$

$$(2) \dots \frac{2}{u_n + 1} |u_n - 6| \leq \frac{2}{7} |u_n - 6| : \text{نجد}$$

$$k = q = \frac{2}{7} : \text{بتعويض (1) في (2) نجد } |u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7} |u_n - 6| : \text{وعليه}$$

$$(3) \quad |u_n - 6| \leq 2 \left(\frac{2}{7}\right)^n \quad \text{لنبين من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_1 - 6| \leq \frac{2}{7} |u_0 - 6| \\ |u_2 - 6| \leq \frac{2}{7} |u_1 - 6| \\ |u_3 - 6| \leq \frac{2}{7} |u_2 - 6| \quad \text{لدينا : } |u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7} |u_n - 6| \text{ منه :} \\ \vdots \\ |u_n - 6| \leq \frac{2}{7} |u_{n-1} - 6| \end{array} \right.$$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $|u_n - 6| \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n |u_0 - 6|$

$$\text{و بما أن : } u_0 - 6 = 8 - 6 = 2 \text{ فإن : } |u_n - 6| \leq 2 \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

(4) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، يطلب تعيين نهايتها .

$$\text{لدينا : } |u_n - 6| \leq 2 \left(\frac{2}{7}\right)^n \text{ منه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 6| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{2}{7}\right)^n \text{ و منه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 6| \leq 0$$

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 6) = 0 \text{ إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6 \text{ ، أي } (u_n) \text{ متتالية متقاربة و تقترب نحو } 6.$$