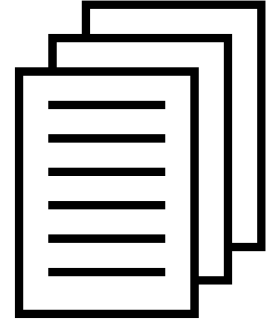


تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية

جميع أساتذ: شعبان أساهة

شعبة:
تسيير و
اقتصاد



تمرين 1:

عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \text{ و } f(x) = \ln(x-3)$$

الحل:

طريقة: اللوغاريتم النيبيري لعدد سالب أو معدوم ليس له معنى.

1. تكون الدالة f معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث $x-3 > 0$ أي $x > 3$.

مجموعة تعريف الدالة f هي إذن $D =]3; +\infty[$.

2. تكون الدالة g معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث $\frac{x+2}{x-1} > 0$ و $x-1 \neq 0$.

و هذا يعني $(x+2)(x-1) > 0$ أي $x < -2$ أو $x > 1$.

مجموعة تعريف الدالة g هي إذن $D =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

تمرين 2:

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(x^2 - 1) < \ln(x + 5) \quad (2) \quad \text{و} \quad \ln(x^2 - 1) = \ln(x + 5) \quad (1)$$

الحل:

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$):

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x) < v(x)$).
- تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2 - 1 > 0$ و $x + 5 > 0$.

$$x^2 - 1 > 0 \text{ تعني } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ و } x + 5 > 0 \text{ تعني } x > -5 \text{ و منه } D =]-5; -1[\cup]1; +\infty[$$

من أجل كل x من D ، (1) تعني $x^2 - 1 = x + 5$ أي $x^2 - x - 6 = 0$.

حلا المعادلة $x^2 - x - 6 = 0$ هما (-2) و 3 و كلاهما عنصر من D . مجموعة الحلول هي إذن $S = \{-2; 3\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D =]-5; -1[\cup]1; +\infty[$.

من أجل كل x من D ، (2) تعني $x^2 - 1 < x + 5$ أي $x^2 - x - 6 < 0$.

بما أن جذري $x^2 - x - 6$ هما (-2) و 3 فإن $x^2 - x - 6 < 0$ تعني $x \in]-2; 3[$. حلول المتراجحة (2) هي إذن الأعداد الحقيقية من المجال $]-2; 3[$ و التي تنتمي إلى D . مجموعة الحلول هي إذن $S =]-2; -1[\cup]1; 3[$.

تمرين 3:

عين حسب قيم x إشارة $\ln(x - 3)$

الحل:

- $\ln(x - 3) \leq 0$ يعني $0 < x - 3 \leq 1$ أي $3 < x \leq 4$.
- $\ln(x - 3) > 0$ يعني $x - 3 > 1$ أي $x > 4$. و منه إشارة $\ln(x - 3)$ هي ملخصة في الجدول التالي:

x	3	4	$+\infty$
$\ln(x - 3)$	-	0	+

ملاحظة: كان بالإمكان تعيين مجموعة التعريف ثم الاكتفاء بحل إحدى المتراجحتين.

تمرين 4:

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(x + 2) + \ln(x + 3) \leq \ln 6 \quad (2) \quad \text{و} \quad \ln(x + 2) + \ln(x + 3) = \ln 6 \quad (1)$$

الحل:

طريقة: الكتابة $\ln a + \ln b$ تفرض أن يكون $a > 0$ و $b > 0$ بينما الكتابة $\ln(a \times b)$ تفرض أن يكون $ab > 0$

و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبيين معا. و لذا فلا بد من تعيين مجموعة التعريف قبل أي تغيير.

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x + 2 > 0$ و $x + 3 > 0$ م هذا يعني $x > -2$.

و $x > -3$ و منه مجموعة تعريفها هي $D =]-2; +\infty[$.

من أجل كل x من D ، (1) تعني $\ln(x + 2)(x + 3) = \ln 6$ و هذا يعني $(x + 2)(x + 3) = 6$ أي $x^2 + 5x = 0$

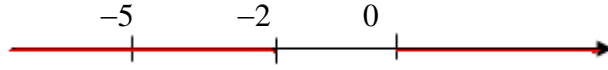
للمعادلة $x^2 + 5x = 0$ حلان هما (-5) و 0 . نلاحظ أن 0 عنصر من D بينما (-5) لا ينتمي إلى D .

مجموعة الحلول هي إذن $S = \{0\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D =]-2; +\infty[$.

من أجل كل x من D ، (2) تعني $\ln(x + 2)(x + 3) \leq \ln 6$ و هذا يعني $(x + 2)(x + 3) \leq 6$ أي $x^2 + 5x \leq 0$

$$S = [-5; 0] \cap D = [-2; 0] \text{ هي } -5 \leq x \leq 0 \text{ يعني } x^2 + 5x \leq 0$$



تمرين 5:

بلغ عدد سكان بلد 10 ملايين نسمة يوم 2007/01/01.

1. في أي سنة يصبح عدد السكان ضعف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان يرتفع سنويا بنسبة 5% ؟
2. في أي سنة يصبح عدد السكان نصف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان ينقص سنويا بنسبة 5% ؟

الحل:

$$1. \text{ في } 01 \text{ جانفي من السنة } 2007 + n \text{ يكون عدد سكان البلد هو } 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \text{ أي } 10^6 (1,05)^n.$$

$$\text{لنعين أصغر عدد طبيعي } n \text{ يحقق } 10^6 (1,05)^n \geq 2 \times 10^6 \text{ أي } (1,05)^n \geq 2.$$

$$(1,05)^n \geq 2 \text{ يعني } \ln(1,05)^n \geq \ln(2) \text{ لأن الدالة " } \ln \text{ " متزايدة تماما على المجال }]0; +\infty[.$$

$$\text{نحصل على } n \ln(1,05) \geq \ln(2) \text{ أي } n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \text{ لأن } \ln(1,05) > 0 \text{ بما أن } 1,05 > 1.$$

$$\text{لدينا } \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \approx 14,20 \text{ و منه أصغر عدد طبيعي } n \text{ يحقق المطلوب هو } n = 15.$$

يتضاعف إذن عدد سكان هذا البلد بعد 15 سنة أي سنة 2022.

$$2. \text{ في } 01 \text{ جانفي من السنة } 2007 + n \text{ يكون عدد سكان البلد هو } 10^6 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^n \text{ أي } 10^6 (0,95)^n.$$

$$\text{لنعين أصغر عدد طبيعي } n \text{ يحقق } 10^6 (0,95)^n \leq 0,5 \times 10^6 \text{ أي } (0,95)^n \leq 0,5 \text{ أي } n \ln(0,95) \leq \ln(0,5).$$

$$\text{نجد } n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}.$$

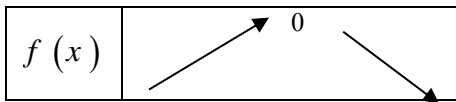
تمرين 6:

ليكن (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة $\ln x \mapsto x$ عند النقطة $A(e; 1)$.

1. عين معادلة للمماس (Δ) .

$$2. \text{ أدرس اتجاه تغير الدالة } f \text{ المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ } f(x) = \ln(x) - \frac{1}{e}x \text{ احسب } f(e).$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-



3. استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس (Δ).

الحل:

1. معادلة (Δ) هي: $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1$ و منه $y = \frac{1}{e}x$ (Δ)

2. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$ ،

بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e-x$. وهكذا:

$f'(x) \geq 0$ من أجل $0 < x \leq e$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x > e$.

$f(e) = 0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على $]0; +\infty[$.

3. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f(x) \leq 0$ ، أي من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\ln(x) \leq \frac{1}{e}x$.

نستنتج إذن أن المنحني (C) يقع تحت المماس (Δ) على المجال $]0; +\infty[$.

تمرين 7:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ ،

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعتها تعريفها.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f .

الحل:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = -1$.

$\lim_{x \rightarrow e} (1 - \ln x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow e} (1 + \ln x) = 2$ و بما أن $1 - \ln x > 0$ من أجل $x < e$ و $1 - \ln x < 0$ من أجل $x > e$.

فإن $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0; e[$ ، $]e; +\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0; e[\cup]e; +\infty[$ ،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) - \left(-\frac{1}{x}\right)(1 + \ln x)}{(1 - \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$$

بما أن $x > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]0; e[$ و $]e; +\infty[$.

تمرين 8:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

• لدينا من جهة: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 2} \ln X = \ln 2$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 + 1) = \ln 2$
و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)] = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.
من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$ ، بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = 1$ و علما أن $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$

نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = 0$.

تمرين 9:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ $f(x) = x + 3\ln(2x - 1)$

1. أحسب $f'(x)$.

2. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

1. من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، $f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = \frac{2x + 5}{2x - 1}$

2. لدينا: $f(1) = 1$ و $f'(1) = 7$. لدينا $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $y = 7x - 6$: (Δ) .

تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 - 1}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$.

2. عين دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-1}{x^2-1} = f(x)$.

2. بوضع $u(x) = x-1$ و $v(x) = x+1$ يكون $u'(x) = 1$ و $v'(x) = 1$

و بالتالي يكون لدينا: $f(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)} + 3 \times \frac{v'(x)}{v(x)}$

و بما أن من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $u(x) > 0$ و $v(x) > 0$ فإن دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$ هي الدالة F

حيث $F(x) = 2 \ln[u(x)] + 3 \ln[v(x)]$

نجد هكذا $F(x) = 2 \ln(x-1) + 3 \ln(x+1)$

تمرين 11: (دراسة دالة لوغاريتمية)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $] -2; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 2 - \ln(x+2)$

1. احسب نهاية الدالة f عند -2 .

2. بملاحظة أن $f(x) = (x+2) \left(1 - \frac{\ln(x+2)}{x+2} \right)$ ، وباستعمال النتيجة $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ ، عين نهاية

الدالة f عند $+\infty$.

3. احسب مشتقة الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات f .

4. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلاً واحداً α محصوراً بين 2 و 3 .

ب- باستعمال الحاسبة ، عين حصراً سعته 10^{-2} للعدد α .

5. نرمز بـ (©) إلى منحنى الدالة f في معلم متعاود و متجانس. وحدة النطوال $1cm$.

أ- عين معادل توجيه المماس T للمنحنى (©) عند النقطة التي فاصلتها 2.

ب- ارسم T ، ثم المنحنى (©) .

الحل:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 2. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

3. من أجل كل x من $] -2; +\infty[$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4. أ- حسب جدول التغيرات ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على

$[2; 3]$ بما أن $f(2) \approx 2,6$ و $f(3) \approx 3,4$ و $f(x)$ تأخذ القيمة

3 في المجال $[2; 3]$ فإن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلاً واحداً α

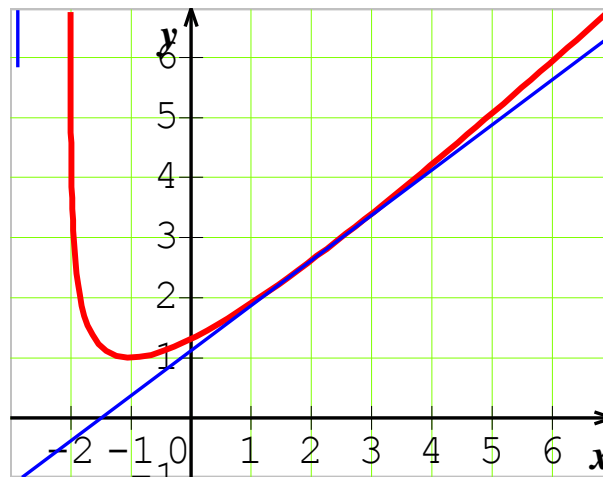
محصوراً بين 2 و 3 .

ب- باستعمال الحاسبة نلاحظ أن $f(2,50) \approx 2,99 < 3$

و $f(2,51) \approx 3,003 > 3$

5.أ- معامل توجيه المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 2

$$f'(2) = \frac{3}{4} \text{ هو}$$



مرجع هذه التمارين - الكتاب المدرسي الجزائري



بالتوفيق في دورة 2020 - احبكم

أشعبيان

تجدون هذا الملف على صفحة

