

الخليـل للرياضيات

سنة **ثانية** ثانويـ

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقنيـ رياضـ

education-onec-dz.blogspot.com

سلسلة تمارين حول:

دراسة الدوال

[مع أسئلة متنوعة فنـ دراسة الدوال والإجابة عنها]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[14 أفريل 2022]

1.

أسئلة متنوعة في دراسة الدوال والإجابة عنها



الخليل للرياضيات
قويسم

السؤال	الإجابة
فسّر بياناً: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيماً مقارباً موازياً لحامل محور الترتيب، معادلته:
فسّر بياناً: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيماً مقارباً موازياً محور الفواصل معادلته: $y = b$
فسر بياناً: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$
بيّن أن المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f)	نبرهن أن: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
بيّن أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً يطلب تعيين معادلته	• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ نبرهن: ومعادلة المستقي هي: $y = ax + b$ ♦ إذا لم يكن ذلك، نحسب العددين a و b من $\mathbb{R}$ كما يلي: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$ ومعادلة المستقي هي: $y = ax + b$
ملاحظة: ♦ خاص بشعبي: رياضيات + تقني رياضي	
فسر بياناً: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$	المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربان عند $\pm\infty$
ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = ax + b$ ذو المعادلة: ♦ نطبق نفس الإجابة على السؤال التالي: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) ، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$ $\bullet (C_f)$ يقع فوق $(\Delta) \Leftrightarrow d(x) > 0$ $\bullet (C_f)$ يقطع $(\Delta) \Leftrightarrow d(x) = 0$ $\bullet (C_f)$ يقع تحت $(\Delta) \Leftrightarrow d(x) < 0$

السؤال	الإجابة
بين أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f)	نبين أن: $\begin{cases} (2\alpha - x) \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$
بين أن: $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ، ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega(\alpha; \beta)$
بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f)	نبين أن: $\begin{cases} (2\alpha - x) \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$
بين أن $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ، ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$
بين أن الدالة f فردية	نبين أن: $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
بين أن الدالة f زوجية	نبين أن: $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
بين أن: $f(-x) - f(x) = 0$ أو $f(-x) = f(x)$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: الدالة f زوجية ، والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التماثل.
بين أن: $f(-x) + f(x) = 0$ أو $f(-x) = -f(x)$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: الدالة f فردية ، ومبدأ المعلم $O(0; 0)$ مركز تناظر لـ (C_f)
بين أن: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$
بين أن: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$
بين أن: $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \alpha$
بين أن: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$
بين أن: $f(x + a) = f(x)$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله a

الصيغة العادية لمعادلة المماس في النقطة $\omega(a; b)$ تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة a	نكتب المعادلة $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ثم نحسب $f(a)$ و $f'(a)$ ونعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيب b	نبحث عن a بحل المعادلة $f(a) = b$ ثم نكتب معادلة المماس عند a
عين بيانيا العدد المشتق $f'(a)$ ♦ ملاحظة: معامل توجيه المماس $f'(x_0)$	معامل التوجيه $f'(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ حيث A و B نقطتين من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي α ؟	نبحث عن a بحل المعادلة $f'(a) = \alpha$ ثم نعوض الحلول في معادلة المماس (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha x + \beta$	نبحث عن a بحل المعادلة $f'(a) = \alpha$ ثم نعوض الحلول في معادلة المماس (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha; \beta)$ ؟	نبحث عن a بحل المعادلة $\beta = f'(a)(\alpha - a) + f(a)$ (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha x + \beta$ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن a بحل المعادلة $f'(a) = -\frac{1}{\alpha}$ (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)

إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة $(a, b, c, \dots)$

أحيانا تعطى لنا عبارة الدالة بثوابت مجهولة $(a, b, c, \dots)$ ويطلب منا تعيينها علما أن المعطيات المباشرة وغير المباشرة تكون بعدد الثوابت:

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: $(a, b, c, \dots)$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل. (أو (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$)	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y = mx + k$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

رسم منحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f)

إذا كان	فإن
$g(x) = f(x + a) + b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$
$g(x) = -f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب
$g(x) = -f(-x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$g(x) = f(x)$	الدالة g زوجية و (C_g) منطبقا على (C_f) لما $x \geq 0$ و (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب لما $x \leq 0$
$g(x) = f(x) $	(C_g) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يكون فوق محور الفواصل و (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل لما (C_f) يكون تحت محور الفواصل

2.

قواعد أساسية في دراسة النهايات



الخليل للرياضيات
قويسم

◀ نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

• النهاية عند $\pm\infty$ لكثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty$$

ملاحظة: يمكن استعمال هذه القاعدة حتى ولو كان كثير الحدود مركب في دالة ناطقة أو جذرية أو أسية الخ...
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x^2 - 1)e^{-x^3 - 2x + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x^2)e^{-x^3}) = +\infty$$

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

◀ حالات عدم التعيين:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{\infty}{\infty} & & 0 \times \infty & & \frac{0}{0} \\ & \textcircled{4} & & \textcircled{3} & & \textcircled{2} & \textcircled{1} \\ +\infty - \infty & & & & & & \end{array}$$

◀ طرق إزالة حالات عدم التعيين:

(1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ حيث:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهم على الشكل: $(x - x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

مثال 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(4x + 7)}{(x - 1)(x + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x + 7}{x + 3} \right) = \frac{11}{4}$$

مثال 2:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \right) = -3$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2 + 3x - 7$ على الشكل: $(x - 1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax + b$ ومنه:

$$\begin{aligned} (x - 1)Q(x) &= (x - 1)(ax + b) = ax^2 + (b - x)x - b \\ \begin{cases} a = 4 \\ b - a = 3 \\ -b = -4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(4x + 7) \end{aligned}$$

ط2: القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 8 & x + 2 \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline -2x^2 + 8 & \\ +2x^2 + 4x & \\ \hline +4x + 8 & \\ -4x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مثال:

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

$$\text{مثال 1: } p(x) = \frac{4}{a}x^2 + \frac{3}{b}x - \frac{7}{c}, \quad x_0 = 1$$

	$a = 4$	$b = 3$	$c = -7$	معاملات $p(x)$
$x_0 = 1$	0	4	7	الجذر x_0
	$a' = 4$	$b' = 7$	$c' = 0$	معاملات $Q(x)$

$$\Rightarrow p(x) = (x - 1)(4x + 7)$$

مثال 2: $x_0 = 2$ ، $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

	$a = 1$	$b = -1$	$c = -4$	$d = 4$	معاملات $p(x)$
$x_0 = 2$	0	2	2	-4	الجذر x_0
	$a' = 1$	$b' = 1$	$c' = -2$	$d' = 0$	معاملات $Q(x)$

$$\Rightarrow p(x) = (x - 2)(x^2 + x - 2)$$

(2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{5-x} + 2} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$ ، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال 3) أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال 4)

مثال 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+1 - \sqrt{x^2 + x - 2})(x+1 + \sqrt{x^2 + x - 2})}{(x+1 + \sqrt{x^2 + x - 2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+1)^2 - (\sqrt{x^2 + x - 2})^2}{x+1 + \sqrt{x^2 + x - 2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1 + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(1 + \frac{3}{x})}{x(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \right) = -\infty\end{aligned}$$

(3) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right) = f'(2) = \frac{1}{2} \\ f(x) &= \sqrt{x-1} ; f(2) = 1 ; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

مثال 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = 1 \\ f(x) &= \sin(x) ; f(0) = 0 ; f'(x) = \cos(x) \\ f &= v \circ u: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c\end{aligned}$$

المستقيمات المقاربة:

المستقيم $x = a$ مقارب عمودي (يوازي محور الترتيب)	$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	①
المستقيم $y = b$ مقارب أفقي (يوازي محور الفواصل)	$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	②
المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل	$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ حيث $a \neq 0$	③

الوضع النسبي بين منحنى ومستقيم:

- إذا كان $f(x) - y_{(\Delta)} > 0$ فإن منحنى الدالة f فوق المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x) - y_{(\Delta)} < 0$ فإن منحنى الدالة f تحت المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x) - y_{(\Delta)} = 0$ فإن منحنى الدالة f يقطع المستقيم (Δ)

مثال: نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x + 2}{(x + 1)^2} \right) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (d) بجوار $\pm\infty$ معادلته:

$$y_{(d)} = x + 1$$

- تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{3x + 2}{(x + 1)^2}$$

لدينا: $(x + 1)^2 > 0$ ومنه الإشارة من البسط

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x) - y_{(d)}$	$-$	$-$	0	$+$

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{2}{3}; -1[$

• (C_f) يقطع (Δ) لما $x = -\frac{2}{3}$

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\frac{2}{3}; +\infty[$

◀ أمثلة:

ح. ع. ت من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{2 - x} \right)$$

مثال 1:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 \left(3 - \frac{1}{x^2} \right)}}{2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \sqrt{3 - \frac{1}{x^2}}}{x \left(\frac{2}{x} - 1 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\sqrt{3 - \frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{x} - 1} \right) = \sqrt{3}$$

ح. ع. ت من الشكل

$(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 1} + x - 2)$$

مثال 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 1} + x - 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2} \right)} + x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x - 2 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x} \right) \right) = +\infty \end{aligned}$$

ح. ع. ت من الشكل

$(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - 3})$$

مثال 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - 3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - 3})(\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - 3})}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - 3}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2x^2 - 1) - (2x^2 - 3)}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - 3}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - 3}} \right] = 0 \end{aligned}$$

ح. ع. ت من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$$

مثال 4:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 0$$

3.

التمارين



الخليل للرياضيات

التمرين 01

[نهاية دالة ناطقة]

من أجل دالة f ، احسب النهايات التالية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} \right) \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} \right) \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} \right) \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{(x + 1)^2} \right) \quad ⑥$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 1}{-x^2 - 3x + 4} \right) \quad ⑤$$

التمرين 02

[نهاية دالة صماء]

من أجل دالة f ، احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 25}} \right) \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 2} + x) \quad ①$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{x - 2} \right) \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\sqrt{x - 2}}{x - 2} \right) \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(x \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \right) \quad ⑥$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}) \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} \right) \quad ⑧$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right) \quad ⑦$$

التمرين 03

[نهاية دالة باستعمال العدد المشتق]

من أجل دالة f ، وباستعمال نهاية دالة باستعمال العدد المشتق، احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x\sqrt{x} - 4x + 4\sqrt{x}}{x - 4} \right) \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(-2x)}{x} \right) \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x - \pi} \right) \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \quad ⑥$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6} \right) \quad ⑤$$

التمرين 04

[المشتقات]

f دالة، احسب دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي:

$$f(x) = \sqrt{2x-3} + x \quad ②$$

$$f(x) = \sqrt{2 \sin^2 x + 1} \quad ①$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 1} \quad ④$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \quad ③$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}} \quad ⑥$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \quad ⑤$$

التمرين 05

[المستقيمات المقاربة]

(I) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب، يطلب تعيين معادلته له، في كل حالة مما يلي:

$$I = \mathbb{R} - \{-1\} , \quad f(x) = \frac{x-3}{x+1} \quad ①$$

$$I = \mathbb{R}^* , \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \quad ②$$

$$I = \mathbb{R} - \{-1\} , \quad f(x) = x + \frac{4}{x+1} \quad ③$$

$$I =]2; +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x-2} \quad ④$$

$$I =]-\infty; -2[, \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \quad ⑤$$

التمرين 06

[المستقيمات المقاربة]

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

① عين الأعداد الحقيقية: a, b, c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ يكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

② استنتج أن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلته له.

③ حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

التمرين 07

[المستقيمات المقاربة]

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2}$$

والدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 3x + 5$$

① عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ يكون:

$$f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$$

② احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

التمرين 08

[دراسة دالة عددية]

(I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(C_f) تمثيلها البياني المعطى في الشكل المقابل:

حيث: (C_f) يمر بالنقطتين $A(0; 1)$ و $B(2; 3)$ ،

والمماسين (T_1) و (T_2) في النقطتين A و B يتقاطعان في

النقطة $C(1; -4)$

①

أ/ اكتب معادلتى المماسين عند النقطتين A و B .

ب/ استنتج $f'(0)$ و $f'(2)$

②

أ/ أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c .

ب/ ادرس تغيرات الدالة f

③ أوجد المماسات لـ (C_f) التي تمر بالمبدأ O

④ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) .

(II) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1$$

①

بين أن h دالة زوجية.

②

اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

③

وضح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h

انطلاقاً من (C_f) ، ثم أنشئه.

التمرين 09

[دراسة دالة عددية]

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

① ادرس تغيرات الدالة g .

② احسب $g(-2)$ ، ثم حل المعادلة $g(x) = 0$

③ استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

1 بين أن:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

2 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 a, b, c ثلاث أعداد حقيقية، بين أن:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

4

أ/ بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل وليكن (Δ) ، يطلب تعيين معادلتيهما.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5 ارسم المنحنى (C_f) علما أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة α ذات الفاصلة -0.2 .

6 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $f(x) = 2x + m$

III h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = f(|x|)$

1 بين أن الدالة h زوجية.

2 وضح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) . ثم أنشئه.

التمرين 10

[دراسة دالة عددية]

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ ب:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$ ، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

2 ادرس تغيرات الدالة f .

3 اثبت أن (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء إحداثيات نقطتي التماس

M_1 و M_2 ومعادلتَي المماسين (D_1) و (D_2) .

4 مثل بدقتَي المماسين (D_1) و (D_2) ، ثم المنحنى (C_f) .

5 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) + 3x - m = 0$.

6 g دالة معرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ب:

$$g(x) = f(|x|)$$

أ/ بين أن الدالة g زوجية.

ب/ بين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم مثل بيانيا (C_g) في المعلم السابق.

التمرين 11

أدراسة دالة عددية

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث: a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

③ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

④ حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

⑤ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحني (C_f) .

التمرين 12

أدراسة دالة عددية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ ، وليكن ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

② عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

③ برهن أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

④ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

⑤ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

⑥ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

التمرين 13

أدراسة دالة عددية

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في م.م.م $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيًا

②

أ/ عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

③

أ/ بين أنه منهما كان $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

ب/ عين اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

④ اكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

⑤ بين أن النقطة $\omega(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

⑥ مثل بيانيا كل من (Δ) ، (T) و (C_f)

التمرين 14

[دراسة دالة عددية]

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

حيث a و b ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) عين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8.

(II) نفرض أن $a = -1$ ، $b = 1$:

① ادرس تغيرات الدالة f .

② احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.

③ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

④ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (Δ) .

⑤ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

التمرين 15

[دراسة دالة عددية]

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم

بين أن $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$

② ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات.

③ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.

④ عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الاحداثيات.

⑤ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

⑥ نسمي ω نقطة تقاطع المنحنى (C_f) و (Δ) ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

⑦ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

⑧ مثل بيانيا كل من (T) ، (Δ) و (C_f) .

الرياضيات

أدراسة دالة عددية

(I) f دالة معرفة على $] -\infty; -1[\cup] -1; 0[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس كما هو مبين في الشكل

1

أ/ احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب/ بقراءة بيانية و دون دراسة تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها

2 g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم السابق

أ/ احسب نهاية g عند $+\infty$

ب/ تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس تغيرات الدالة g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

1 اكتب $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2 اكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للدالة k عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

3 ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

الخليل للرياضيات

بالتوفيق

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



الخليل للرياضيات

4.

الخطول

- طول مقترحة -



الخليل للرياضيات

من أجل دالة f ، حساب النهايات التالية:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n-1+1)(n+1)}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} \right) = \frac{4 + 6 - 1}{0^+} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x + 1}{-x^2 - 3x + 4} \right):$

لدينا: $-x^2 + 3x - 4 = 0$ نحلها نستعمل المميز $\Delta = (-3)^2 - 4(-1)(4) = 25$

ومنه: $x_2 = 1$ و $x_1 = -4$

لدينا: إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$-x^2 - 3x + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$

لما $x \rightarrow 1^-$ نجد $(-x^2 - 3x + 4) > 0$ ومنه:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x + 1}{-x^2 - 3x + 4} \right) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} \right) = \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{3 + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x + 1 + 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right) = \boxed{\frac{1}{4}}$

من أجل دالة f ، حساب النهايات التالية:

$$\begin{aligned}
 ① \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 2} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x(\sqrt{3} - 1)) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ② \quad \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{(\sqrt{x^2-25})(\sqrt{x^2-25})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{x^2-25} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{x^2-5^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{(x-5)(x+5)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{(x+5)} \right) \\
 &= \frac{0}{10} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ③ \quad \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2})}{(x-2)(\sqrt{x-2})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-2})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \\
 &= \frac{1}{0^+} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{x} \right) &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{5}{x^2} \right)}}{x} \right) \\
&= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{4 + \frac{5}{x^2}}}{x} \right) \\
&= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x^2}} \right) \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 2} - x^2 - 2}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) &= -\sqrt{\frac{2}{0^+}} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

التمرين 03

من أجل دالة f ، حساب النهايات التالية:

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)$$

$$g(x) = \cos x \quad \text{نضع:}$$

$$g'(x) = -\sin x \quad \text{ومنه:}$$

$$g(0) = 1 \quad \text{و؛}$$

اذن:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \\
&= g'(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x\sqrt{x} - 4x + 4\sqrt{x}}{x - 4} \right)$$

نضع: $g(x) = x\sqrt{x} - 4x + 4\sqrt{x}$
ومنه:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - 4 + \frac{4}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x - 8\sqrt{x} + 4}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

و: $g(4) = 0$
إذن:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x\sqrt{x} - 4x + 4\sqrt{x}}{x - 4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 4} \right) \\ &= g'(4) \\ &= \frac{12 - 16 + 4}{4} \\ &= \frac{0}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x - \pi} \right)$$

نضع: $g(x) = \sin x$
ومنه: $g'(x) = \cos x$
و: $g(\pi) = 0$
إذن:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x - \pi} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x - 0}{x - \pi} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} \right) \\ &= g'(\pi) \\ &= -1 \end{aligned}$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(-2x)}{x} \right)$$

نضع: $g(x) = \sin(-2x)$
ومنه: $g'(x) = -2 \cos x$
و: $g(\pi) = 0$
إذن:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(-2x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(-2x) - 0}{x - 0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x} \right) \\ &= g'(0) \\ &= -2 \end{aligned}$$

5

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 3}{x-6} \right)$$

$$g(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{نضع:}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ومنه:}$$

$$g(6) = 3 \quad \text{و:}$$

إذن:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 3}{x-6} \right) &= \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{g(x) - g(6)}{x-6} \right) \\ &= g'(6) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

6

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$x^2 = t \quad \text{نضع:}$$

$$t \rightarrow 1 \quad \text{نجد:} \quad x^2 \rightarrow 1 \quad \text{لما:}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t} \times \sqrt{1-t}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{1-t}}{1-t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(-\frac{\sqrt{1-t}}{t-1} \right) \end{aligned}$$

$$g(t) = \sqrt{1-t} \quad \text{نضع:}$$

$$g'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} \quad \text{ومنه:}$$

$$g(1) = 0 \quad \text{و:}$$

إذن:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(-\frac{\sqrt{1-t}}{t-1} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(-\frac{g(t) - g(1)}{t-1} \right) \\ &= -g'(1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

التمرين 04

حساب مشتقة الدالة f في كل حالة مما يلي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} + 1 \\ &= \frac{1 + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{2x-3} + x$$

1

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - (\sqrt{x}-4)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x-1-2x+8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{8\sqrt{x}-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{x-1}$$

②

$$f'(x) = \frac{-\sin x (\sin x - 1) - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$= \frac{\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sin x - 1}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

③

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2 \cos x \cdot \sin x}{2\sqrt{2 \sin^2 x + 1}}$$

$$= \frac{2 \cos x \cdot \sin x}{\sqrt{2 \sin^2 x + 1}}$$

$$f(x) = \sqrt{2 \sin^2 x + 1}$$

④

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x \cdot x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

⑤

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-2}}\sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\sqrt{2x-2}}{\frac{x+3}{\sqrt{2x-2}} - \frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-2}} - \frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{x+3}{\sqrt{2x-2}} - \frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{2(x+3) - (2x-2)}{2\sqrt{(2x-2)(x+3)}}}{\frac{x+3}{\sqrt{2x-2}} - \frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{x+3-x+1}{\sqrt{(2x-2)(x+3)}}}{\frac{x+3}{\sqrt{2x-2}} - \frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}$$

$$= \frac{4}{(x+3)\sqrt{(2x-2)(x+3)}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}}$$

⑥

التمرين 05

(I) تبين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب (d) ، في كل حالة مما يلي:

لدينا:

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

①

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x-3}{x+1} \right) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x-3}{x+1} \right) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = -1$

لدينا:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

②

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = 1$

لدينا:

$$f(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

③

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{4}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4}{x+1} \right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$

لدينا:

$$f(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$$

④

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x+1}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = 0$

لدينا:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

⑤

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = 0$

التمرين 06

① تعيين الأعداد الحقيقية: a, b, c, d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ يكون: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1)^2 + cx+d}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + cx+d}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx + d}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b+c)x + b+d}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a + 2b + c = 6 \\ b + d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x + 1)^2}$$

② استنتاج أن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيماً مقارياً مائلاً (d) عند $\pm\infty$:

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + 1 + \frac{3x + 2}{(x + 1)^2} - (x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x + 2}{(x + 1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3}{x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيماً مقارياً مائلاً (d) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y_{(d)} = x + 1$

③ تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{3x + 2}{(x + 1)^2}$$

لدينا: $(x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة الفرق من البسط:

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

إذن:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x) - y_{(d)}$	-	-	0	+

- الوضعية:

• (C_f) تحت (d) لما: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; -\frac{2}{3}[$

• (C_f) يقطع (d) لما: $x = -\frac{2}{3}$

• (C_f) فوق (d) لما: $x \in]-\frac{2}{3}; +\infty[$

التمرين 07

① تعيين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ يكون: $f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{x + 2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 1)}{x + 2} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1}{x + 2} \\ &= \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x + 2} \end{aligned}$$

ولدينا :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) + \frac{a}{x+2} \\
 &= x^2 - 3x + 5 + \frac{a}{x+2} \\
 &= \frac{(x^2 - 3x + 5)(x+2) + a}{x+2} \\
 &= \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 2x^2 - 6x + 10 + a}{x+2} \\
 &= \frac{x^3 - x^2 - x + 10 + a}{x+2}
 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$10 + a = 1 \Rightarrow a = -9$$

إذن:

$$f(x) = g(x) - \frac{9}{x+2}$$

② حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[-\frac{9}{x+2} \right] = 0$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

المنحنى الممثل للدالة f والمنحنى للدالة g متقاربان بجوار $\pm\infty$

التمرين 08

(I)

① كتابة معادلتَي المماسين عند النقطتين A و B :

• لدينا (T_1) يمر من النقطتين A و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (AC) هو شعاع توجيه $\vec{d}(T_1)$:

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -4-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

إذن معادلة المستقيم (T_1) هي:

$$(T_1): -5x + (-1)y + c = 0$$

نعوض النقطة A في معادلة المستقيم (T_1) نجد:

$$-5(0) - (1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

إذن: $(T_1): -5x - y + 1 = 0$

أي: $(T_1): y = -5x + 1$

• ولدينا (T_2) يمر من النقطتين B و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (BC) هو شعاع توجيه $\vec{d}(T_2)$:

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -4-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

إذن معادلة المستقيم (T_2) هي:

$$(T_2): -7x + (1)y + c = 0$$

نعوض النقطة B في معادلة المستقيم (T_2) نجد:

$$-7(2) + (3) + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

إذن: $(T_2): -7x + y + 11 = 0$

أي: $(T_2): y = 7x - 11$

② استنتاج $f'(0)$ و $f'(2)$ ؛

صورة المشتقة لدالة f عند نقطة M ، هي معامل توجيه المماس عند النقطة M ، ومنه:

$$f'(2) = 7 \quad \text{و} \quad f'(0) = -5$$

③ إيجاد الأعداد الحقيقية a ، b و c ؛

لدينا منحنى الدالة f يمر من النقطتين $A(0; 1)$ و $B(2; 3)$ ، ولدينا سابقاً $f'(0) = -5$ ومنه:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 3 \\ f'(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 1 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 3 \\ 2a(0) + b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

④ دراسة تغيرات الدالة f ؛

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

⑤ إيجاد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O ؛

لايجاد المماسات التي تمس (C_f) في النقطة $O(0; 0)$ نعوض النقطة O في معادلة المماس العامة، ثم نحل المعادلة:

$$f'(x)(x_0 - x) + f(x) = y_0 \Rightarrow (6x - 5)(0 - x) + 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -6x^2 + 5x + 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \text{أو} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين في النقطتين ذات الفاصلتين $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ يمران بالمبدأ O . نسميهما (T_3) و (T_4)

- إيجاد معادلة (T_3) ؛

$$(T_3): y = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \left(6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 5\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1$$

$$= 2\sqrt{3}x - 2 - 5x + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1$$

$$= (2\sqrt{3} - 5)x$$

- إيجاد معادلة (T_4) ؛

$$\begin{aligned}
(T_4): y &= f' \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + f \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
&= \left(6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - 5 \right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + 1 \\
&= -2\sqrt{3}x - 2 - 5x - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 \\
&= -(2\sqrt{3} + 5)x
\end{aligned}$$

٦ تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) :

محور تناظر:

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$



• لدينا: $x \in D_f$ معناه: $x \in \mathbb{R}$ معناه $(-x) \in \mathbb{R}$ معناه $\left(2\left(\frac{5}{6}\right) - x\right) \in \mathbb{R}$
• ولدينا:

$$\begin{aligned}
f\left(2\left(\frac{5}{6}\right) - x\right) &= f\left(\frac{5}{3} - x\right) \\
&= 3\left(\frac{5}{3} - x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{3} - x\right) + 1 \\
&= 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{3}\right)x + 3x^2 - \frac{25}{3} + 5x + 1 \\
&= \frac{25}{3} - 10x + 3x^2 - \frac{25}{3} + 5x + 1 \\
&= 3x^2 - 5x + 1 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f)

(II)

١ تبين أن h دالة زوجية:

$$\begin{aligned}
h(-x) &= 3(-x)^2 - 5|-x| + 1 \\
&= 3x^2 - 5|x| + 1 \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

$h(-x) = h(x)$ معناه أن الدالة h زوجية.

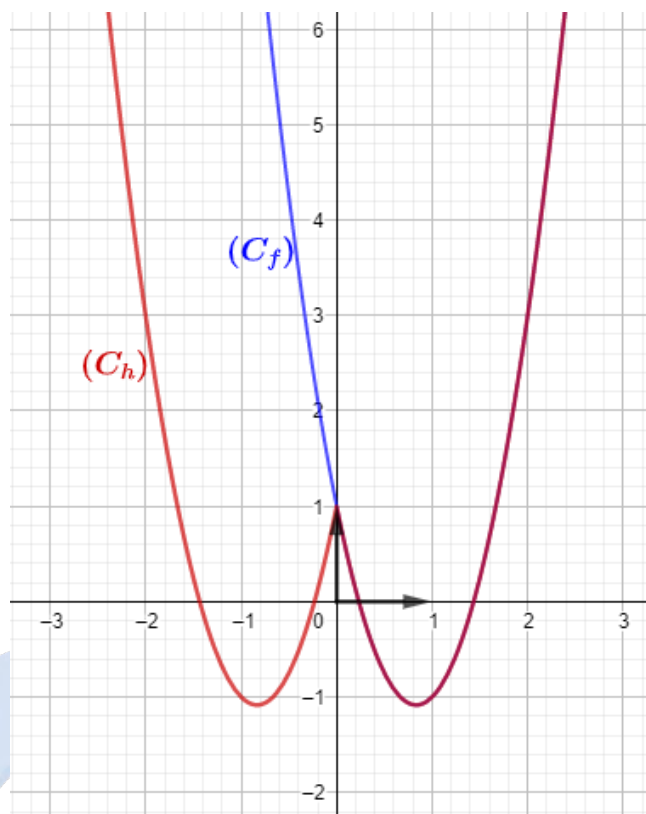
٢ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}
h(x) &= 3x^2 - 5|x| + 1 \\
&= \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 & ; x \geq 0 \\ 3(-x)^2 - 5(-x) + 1 & ; x \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

٣ توضيح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقاً من (C_f) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.



التمرين 09

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 6x + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \end{aligned}$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

② حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا (-2) جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - (-2))(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b \\ &= x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 2a)x + 2b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$
 لحل المعادلة ($x^2 + x + 1 = 0$) نستعمل المميز Δ ؛
 ومنه $(x^2 + x + 1) > 0$ في $\mathbb{R}$
 إذن؛

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

③ استنتاج إشارة $g(x)$ ؛

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

① تبين أن: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(6x^2 + 14x + 8)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2)}{(x + 1)^4} \\
 &= \frac{(6x^2 + 14x + 8)(x + 1) - 2(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2)}{(x + 1)^3} \\
 &= \frac{6x^3 + 14x^2 + 8x + 6x^2 + 14x + 8 - 4x^3 - 14x^2 - 16x - 4}{(x + 1)^3} \\
 &= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{(x + 1)^3} \\
 &= \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x + 1)^3} \\
 &= \frac{2g(x)}{(x + 1)^3}
 \end{aligned}$$

② دراسة تغيرات الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها؛

- تعيين النهايات؛

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) = \frac{-1}{(0^-)^2} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) = \frac{-1}{(0^+)^2} = -\infty$$

- دراسة $f'(x)$ ؛

لدينا؛

$$\begin{aligned}
 (x + 1)^3 = 0 &\Rightarrow (x + 1)^2(x + 1) = 0 \\
 &\Rightarrow x + 1 = 0 \\
 &\Rightarrow x = -1
 \end{aligned}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي؛

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$2g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$(x + 1)^3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

- جدول تغيرات الدالة f ؛

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$

③ تبين أن: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + c}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + c}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b)x + b + c}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ a + 2b = 8 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

4

أ/ تبين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x + 3) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-1}{(x+1)^2} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

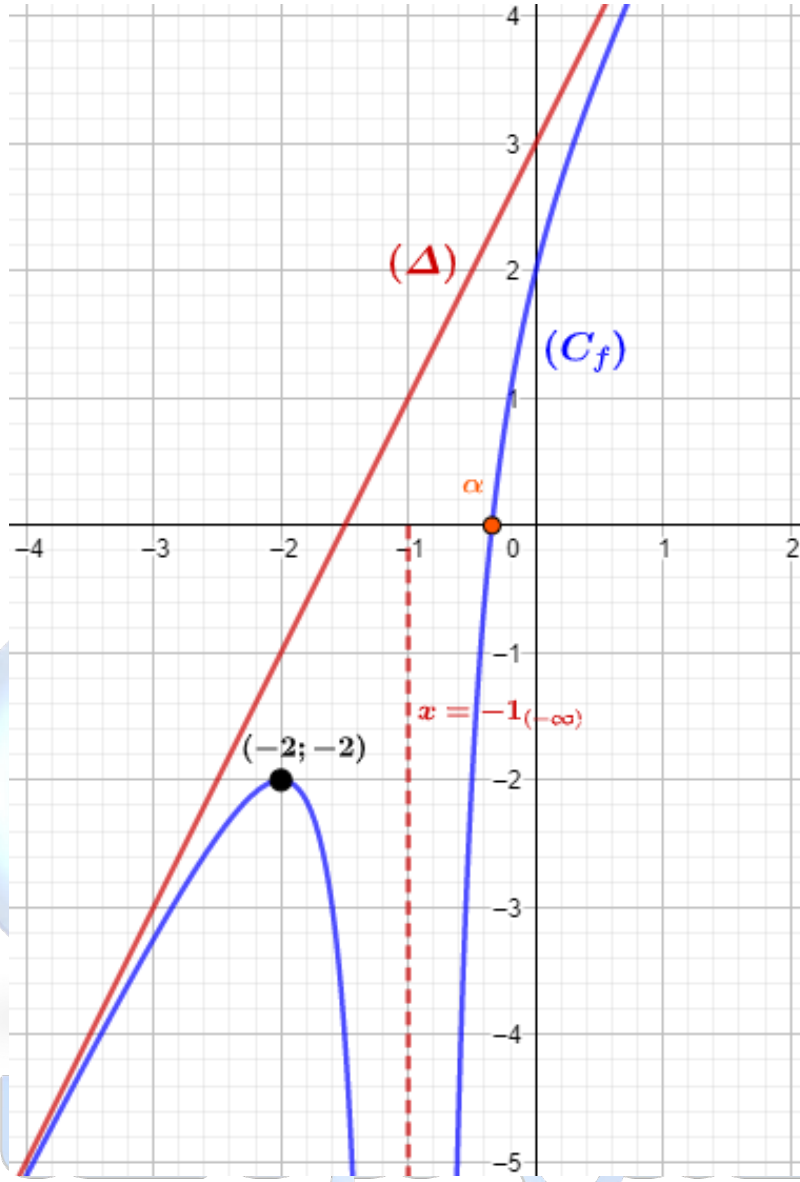
لدينا $(x+1)^2 > 0$ ومنه $(f(x) - y_{(\Delta)}) < 0$

إذن (C_f) تحت (Δ) لما $x \in D_f$.

⑤ رسم المنحنى (C_f) :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = 2x + 3$.
- نعين النقطة α نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(-2; -2)$ لتسهيل الرسم.

باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة (Δ) .



6 المناقشة البيانية قويسم

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$ ، وهي:

لما $m < 2$	المعادلة تقبل حلين سالبين
لما $m = 2$	المعادلة تقبل حل معدوم وحل مضاعف
لما $2 < m < 3$	المعادلة تقبل حلين متمايزين ومختلفين في الإشارة
لما $m \geq 3$	المعادلة لا تقبل حلول

(III)

1 تبين أن الدالة h زوجية:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

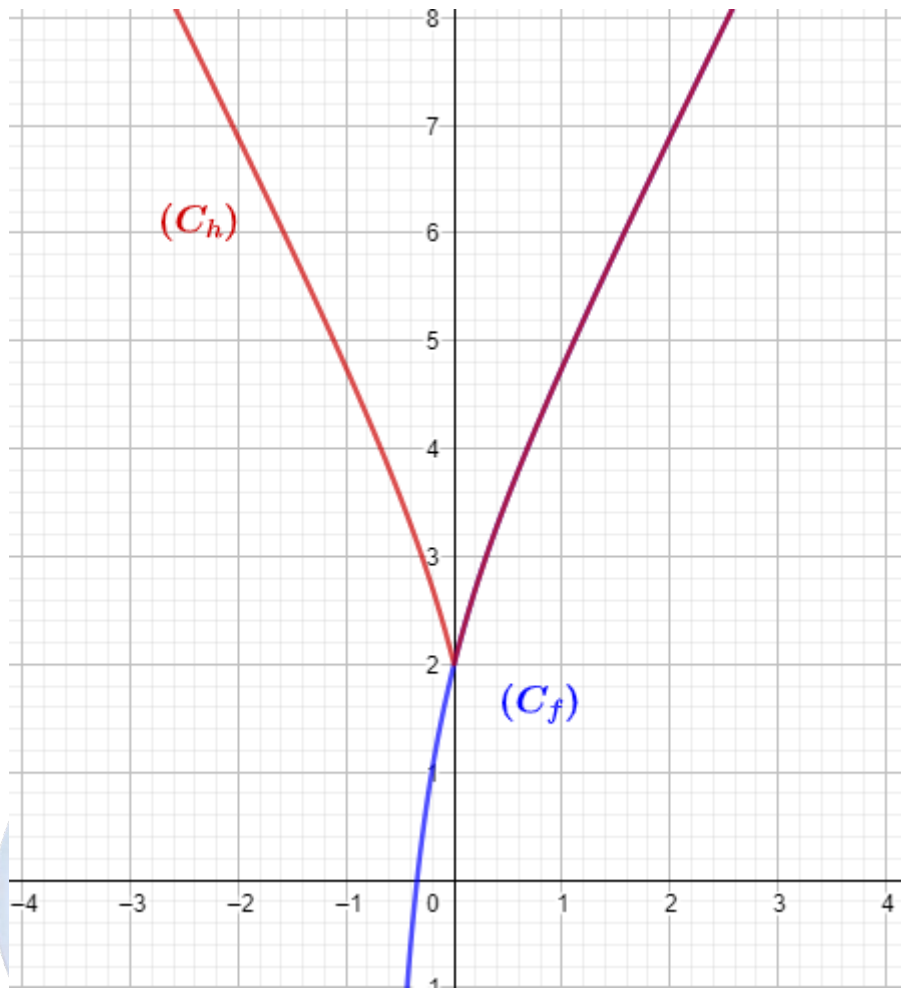
ومنه الدالة h زوجية.

2 رسم المنحنى (C_h) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور الترتيب.



التمرين 10

③ تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c ؛
 لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$ ، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3. معناه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x - 2} - (x - 3) \right) = 0$$

$$f'(3) = 0$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x - 2} - (x - 3) \right) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c - (x - 3)(x - 2)}{x - 2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c - x^2 + 2x + 3x - 6}{x - 2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a - 1)x^2 + (b + 5)x + c - 6}{x - 2} \right) = 0 \end{aligned}$$

هذه النهاية لا تحقق إلا إذا كان: $(a - 1 = 0)$ ومنه $\boxed{a = 1}$

وعليه:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 5)x + c - 6}{x - 2} \right) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 5)x}{x} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + 5) = 0 \\ &\Rightarrow b + 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -5}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2ax + b)(x - 2) - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2ax^2 - 4ax + bx - 2b - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(3) = 0 &\Rightarrow \frac{a(3)^2 - 4a(3) - 2b - c}{((3) - 2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 9a - 12a - 2b - c = 0 \\ &\Rightarrow -3a - 2b - c = 0 \end{aligned}$$

بتعويض قيمته a و b نجد:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -3(1) - 2(-5) - c = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{c = 7} \end{aligned}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

④ دراسة تغيرات الدالة f :

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{6}{0^-} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0^-$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{6}{0^+} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = +\infty$$

- تعيين $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

لحل المعادلة السابقة نستعمل المميز Δ ؛

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

ومنه؛

$$\begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3 \\ \text{أو} \\ x = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي: $s = \{1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow -3$ $\searrow -\infty$	$+\infty$ $\searrow 1$ $\nearrow +\infty$	

⑤ اثبات أن (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ؛

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) معناه أن المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل حلان؛
لدينا؛

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = -3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 + 3(x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 + 3x^2 + 12 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

نحسب المميز Δ ونستخرج الجذور؛ فنجد: $\Delta = 16$ ومنه؛

$$x_2 = \frac{5}{2} ; x_1 = \frac{3}{2}$$

ولدينا؛

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} ; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

إذن احداثيات نقطتي التماس M_2 و M_1 مع المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب؛

$$M_2\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) ; M_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$$

ولدينا؛

$$(D_1): y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(D_1): = \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 3}{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2} \right) \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 7}{\left(\frac{3}{2} - 2\right)}$$

$$(D_1): = -3x + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}$$

$$(D_1): = -3x + 1$$

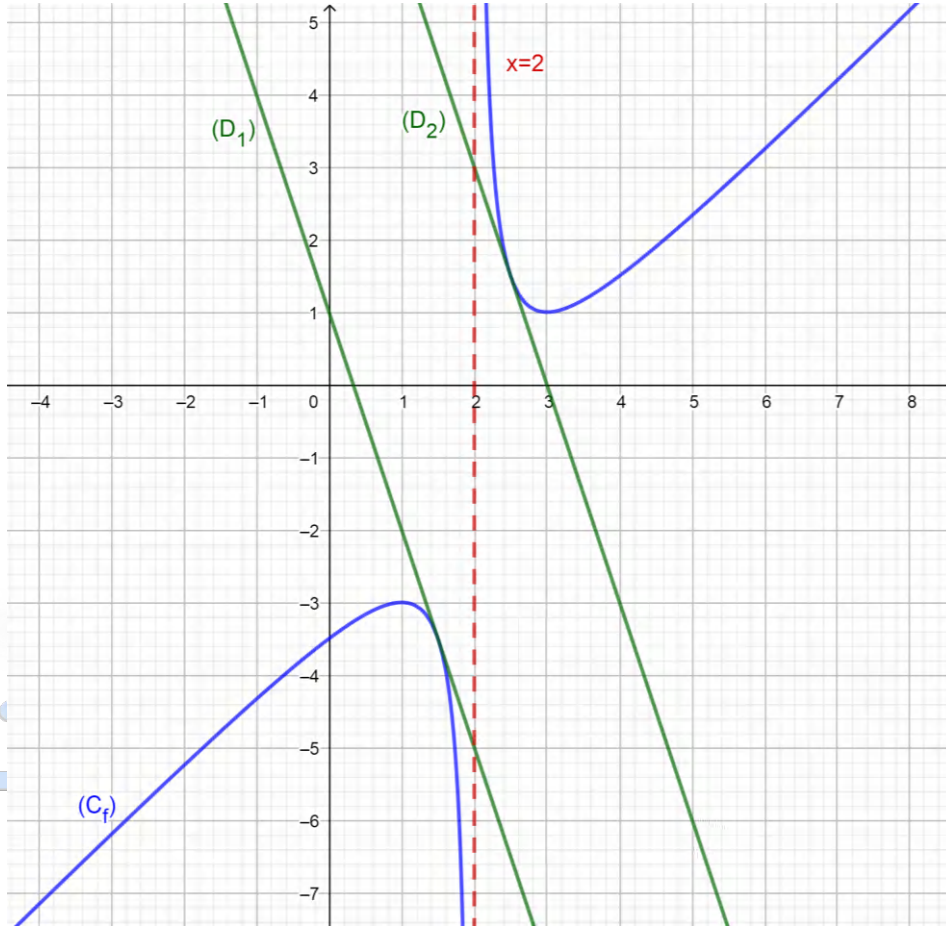
$$(D_2): y = f' \left(\frac{5}{2} \right) \left(x - \left(\frac{5}{2} \right) \right) + f \left(\frac{5}{2} \right)$$

$$(D_2): y = -3x + \frac{15}{2} + \frac{3}{2}$$

$$(D_2): y = -3x + 9$$

ومنه معادلتا المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب: $y_{(D_1)} = -3x + 1$ و $y_{(D_2)} = -3x + 9$

⑥ التمثيل البياني:



⑦ المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمتين $y_m = -3x + m$ ذو المعادلة $y_m = -3x + m$ ومنه:

لما $m < 1$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر موجب
لما $m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما $1 < m < 9$	المعادلة لا تقبل حلول
لما $m = 9$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما $m > 9$	المعادلة تقبل حلان موجبان

⑧

أ/ تبين أن الدالة g زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ تبين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) :
لدينا:

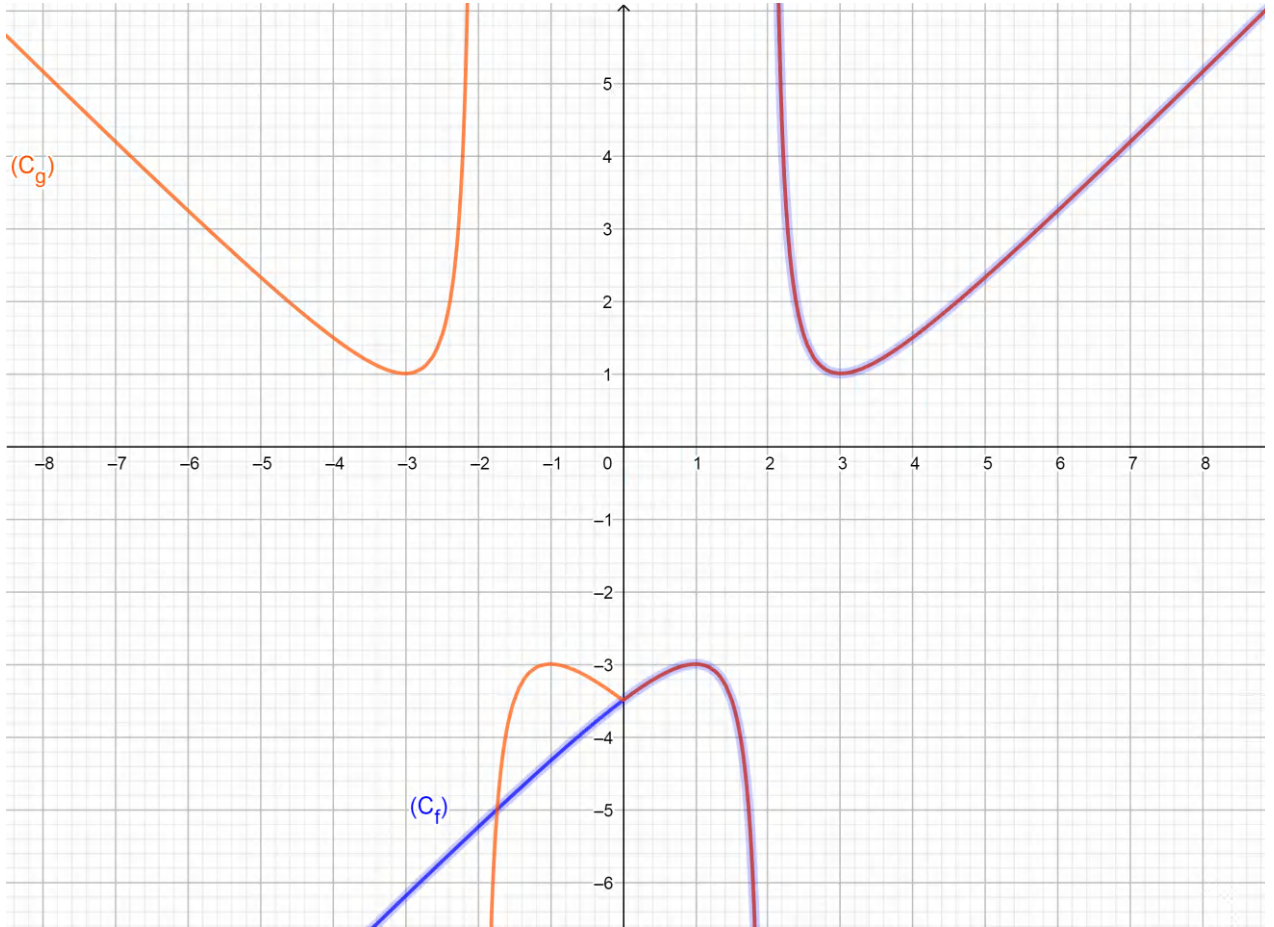
$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه لما $x \geq 0$ ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$ ينظر (C_g) بالنسبة إلى محور الترتيب.

- تمثيل بيانياً (C_g) في المعلم السابق:

المنحني (C_f) والمنحني (C_g) والجزء الملون بنفسجي يمثل تطابق (C_f) مع (C_g)



التمرين 11

1 تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = +\infty$

لأن:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 + x - 3}{0^-} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 0^-$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

② اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x + 1} \\ &= \frac{ax^2 + x(a + b) + b + c}{x + 1} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

أي:

$$f(x) = x - \frac{3}{x+1}$$

• استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = +\infty$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$ ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{3}{x+1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1} \right)$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$.

③ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{-3}{x+1} \Rightarrow f(x) - x = \frac{3}{-x-1} \\ &\Rightarrow -x-1 \neq 0 \\ &\Rightarrow x \neq -1 \end{aligned}$$

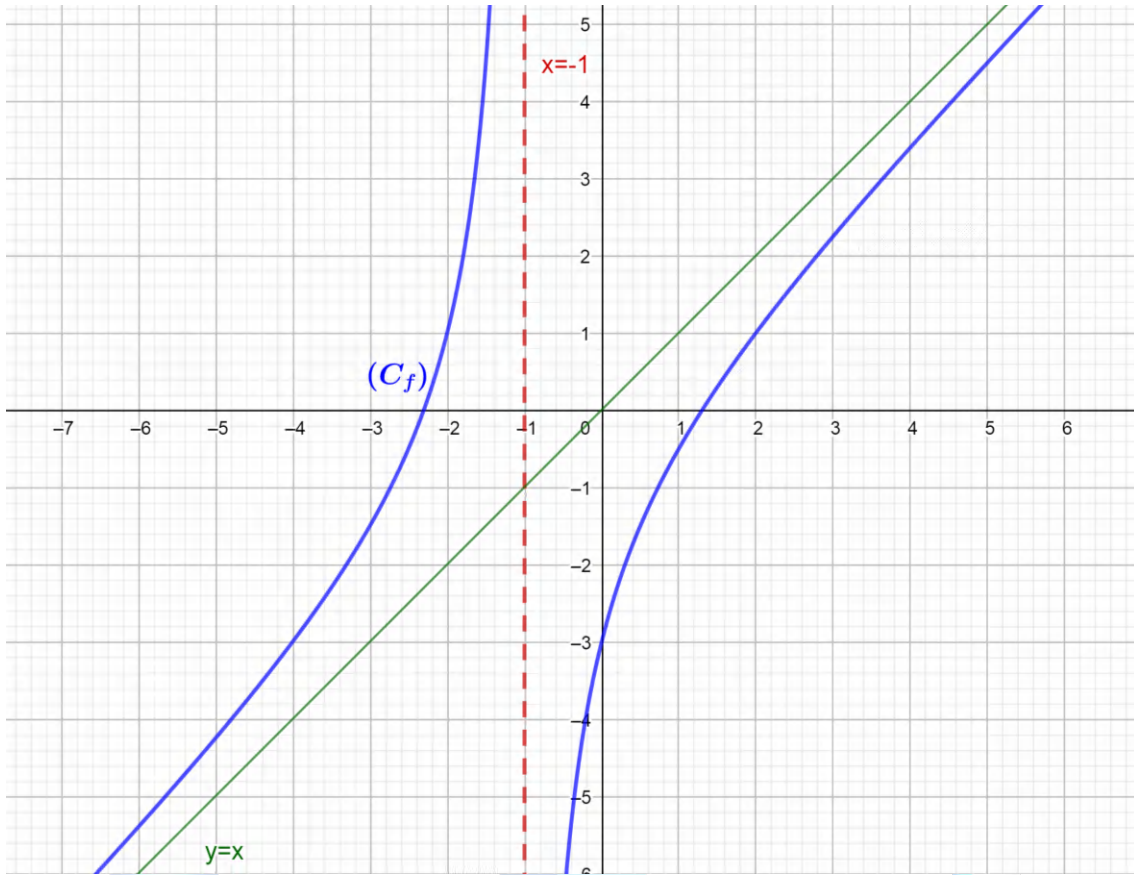
ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

④ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحني (C_f)



التمرين 12

① دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) \right) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) &= +\infty \end{aligned}$$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \\ &\Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

② تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:



لتعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$.
- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الترتيب نقوم بحساب $f(0)$.

- مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

لدينا:

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a - 1 = 3 \\ b - a = 0 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$

ومنه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$ ومنه: $x = 1$

ولدينا: $x^2 + 4x + 4 = 0$ ، لحلها نستعمل المميز Δ :

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ أي $x = -2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي: $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور الترتيب:

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور الترتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0; -4)$

③ برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :



نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

لدينا:

$$-\infty < x < +\infty \text{ معناه: } -\infty < -x < +\infty \text{ معناه: } -\infty < \underbrace{2(-1) - x}_{2\alpha - x} < +\infty$$

$$(2(-1) - x) \in \mathbb{R} \text{ معناه:}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2(-1) - x) + f(x) &= (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 - 4 + x^3 + 3x^2 - 4 \\ &= -(-2 - x)^2(2 + x) + 3(2 + x)^2 - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -(4 + x^2 + 4x)(2 + x) + 12 + 3x^2 + 12x - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -8 - 4x - 2x^2 - x^3 - 8x - 4x^2 + 4 + 6x^2 + 12x + x^3 \\ &= -4 \\ &= 2(-2) \end{aligned}$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

④ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= (3(-1)^2 + 6(-1))(x + 1) + (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 \\ &= -3x - 3 - 2 \\ &= -3x - 5 \end{aligned}$$

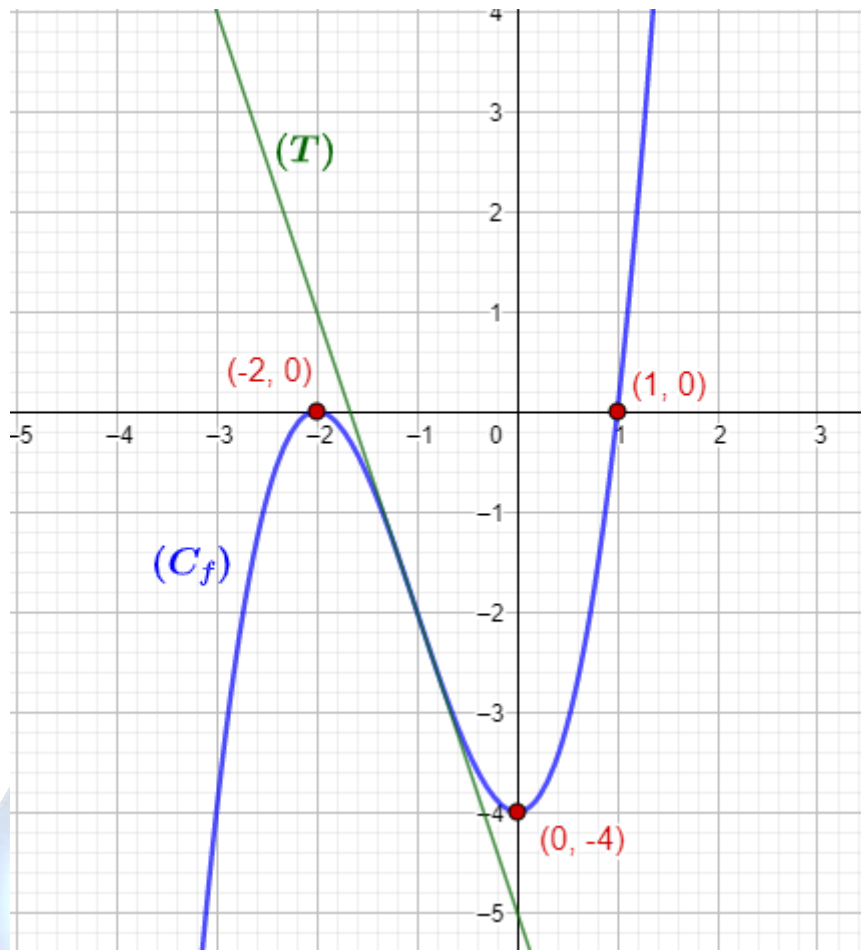
ومنه معادلة المماس (T) هي $y = -3x - 5$.

⑤ التمثيل البياني كل من (T) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني تتبع الخطوات التالية:

الرياضيات

الخليل



٦ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0 \Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$ وعليه المناقشة أفقية:

للمعادلة حل وحيد سالب	$x < -4$	أي	$m < -4$	لما
المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر مضاعف	$x = -4$	أي	$m = -4$	لما
المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب	$-4 < x < 0$	أي	$-4 < m < 0$	لما
المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب	$x = 0$	أي	$m = 0$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد موجب	$x > 0$	أي	$m > 0$	لما

التمرين 13

١ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x + 1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 3}{x + 1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{0^-} \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 3}{x + 1} \right) \\
&= \frac{4}{0^+} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$
ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$.

②

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax + b + \frac{c}{x + 1} \\
&= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x + 1} \\
&= \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 1}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x + 1} - x + 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4}{x + 1} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y_{(\Delta)} = x - 1$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{4}{x + 1}$$

إشارة الفرق من إشارة $x + 1$:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$

• (C_f) يقطع (Δ) لما $x = -1$ أي في النقطة ذات الإحداثيات $(-1; -2)$.

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; +\infty[$

③

أ/ تبين أنه منهما كان $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

نقوم بتحليل: $(x^2 + 2x - 3)$

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16$$

$$\text{ومنه: } x = \frac{-2-4}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-2+4}{2}$$

$$\text{أي: } x = -3 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

$$\text{أي: } (x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x-(-3)))$$

إذن:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x+3)$:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-6	$-\infty$	2	$+\infty$	

④ كتابة معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{-3}{1}x + \frac{3}{1} = -3x + 3$$

⑤ تبين أن النقطة $\omega(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

$$\begin{array}{llll} \text{معناه: } x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[& \text{معناه: } x < -1 & \text{أو} & x > -1 \\ \text{معناه: } (-x) < 1 & \text{أو} & \text{معناه: } (2(-1) - x) > -1 & \text{أو} & (2(-1) - x) < -1 \\ \text{معناه: } (2(-1) - x) \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[\end{array}$$

إذن: $(2(-1) - x) \in D_f$

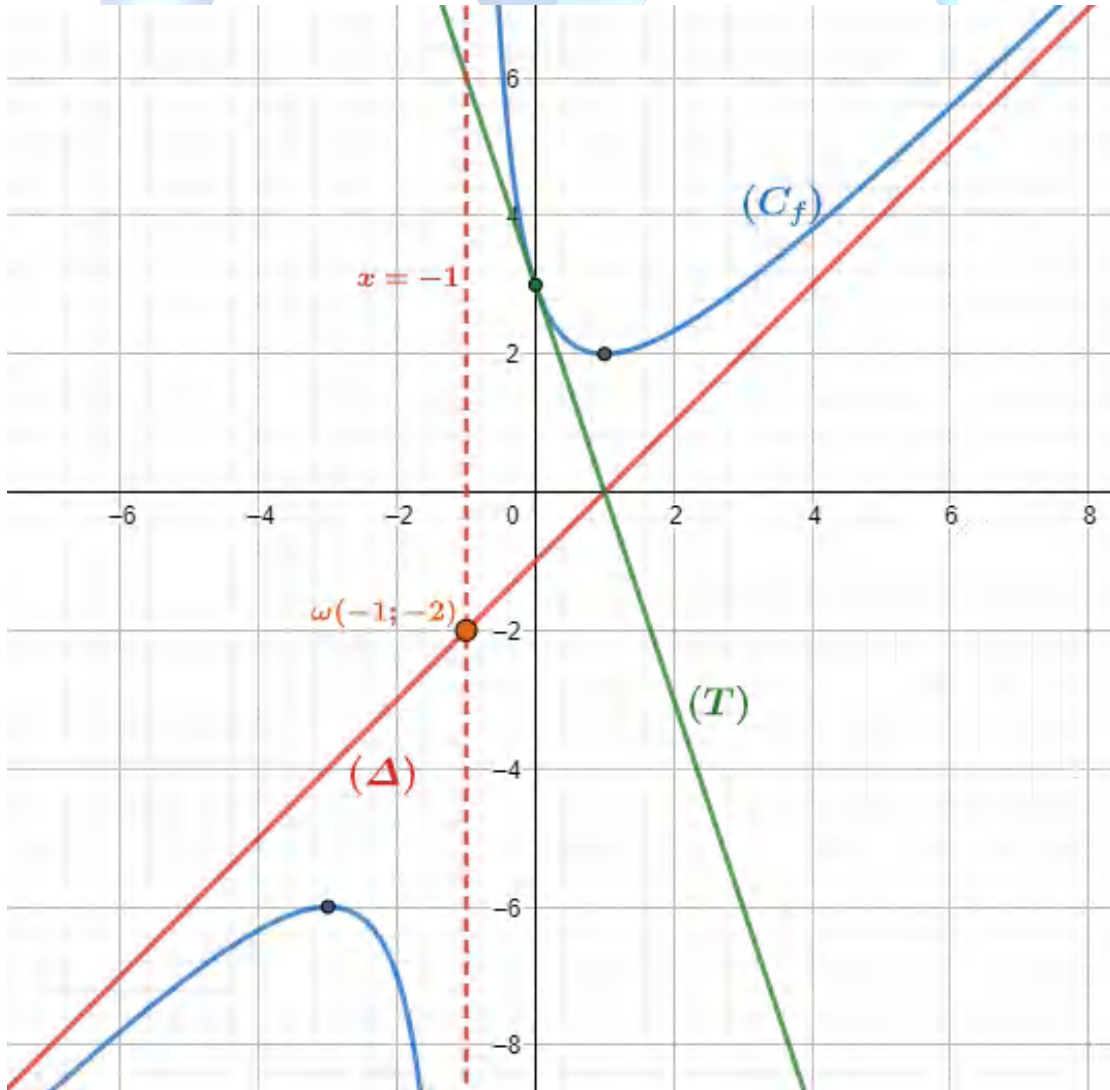
• ولدينا:

$$\begin{aligned}
 f(2(-1) - x) + f(x) &= f(-2 - x) + f(x) \\
 &= \frac{(-2 - x)^2 + 3}{-2 - x + 1} + \frac{x^2 + 3}{x + 1} \\
 &= \frac{4 + x^2 + 4x + 3}{-x - 1} + \frac{x^2 + 3}{x + 1} \\
 &= \frac{x^2 + 4x + 7}{-(x + 1)} + \frac{x^2 + 3}{x + 1} \\
 &= \frac{-x^2 - 4x - 7 + x^2 + 3}{(x + 1)} \\
 &= \frac{-4x - 4}{(x + 1)} \\
 &= \frac{-4(x + 1)}{(x + 1)} \\
 &= -4 \\
 &= 2(-2)
 \end{aligned}$$

ومنه: $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

لدينا: $\begin{cases} (2(-1) - x) \in D_f \\ f(2(-1) - x) + f(x) = 2(-2) \end{cases}$

⑥ التمثيل البياني:



مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

I) تعيين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 :
الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناه:

$$\begin{cases} f(3) = -8 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$f'(x) = x^2 + 2ax - 3$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(3) = 0 &\Rightarrow 3^2 + 2a(3) - 3 = 0 \\ &\Rightarrow 6a = -6 \\ &\Rightarrow \boxed{a = -1} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(3) = -8 &\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + a(3)^2 - 3(3) + b = -8 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + (-1)(3)^2 - 3(3) + b = -8 \\ &\Rightarrow 9 - 9 + 9 + b = -8 \\ &\Rightarrow \boxed{b = 1} \end{aligned}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

II) نفرض أن $a = -1$ ، $b = 1$:

1) دراسة تغيرات الدالة f :

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 \right) \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right) &= +\infty \end{aligned}$$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3 \\ \text{أو} \\ x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1 \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي : $s = \{-1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	-8	$+\infty$	

② حساب $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(5)$:

- $f(5) = \frac{1}{3}(5)^3 - (5)^2 - 3(5) + 1 = \frac{8}{3}$
- $f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
- $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = \frac{8}{3}$
- $f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 1 = \frac{1}{3}$

③ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 :

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = (1^2 - 2(1) - 3)(x - 1) - \frac{8}{3}$$

$$(T): y = -4x + 4 - \frac{8}{3}$$

$$(T): y = -4x + \frac{4}{3}$$

ومنه معادلة المماس (Δ) هي: $y = -4x + \frac{4}{3}$.

④ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ) :

لدينا :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 + 4x - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = (x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

$$= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma$$

$$= \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta - \alpha = -1 \\ \gamma - \beta = 1 \\ -\gamma = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه :

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = (x - 1)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(x - 1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{3}(x - 1)(x - 1)^2$$

الخليل للرياضيات
قويسم

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه :

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3$$

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

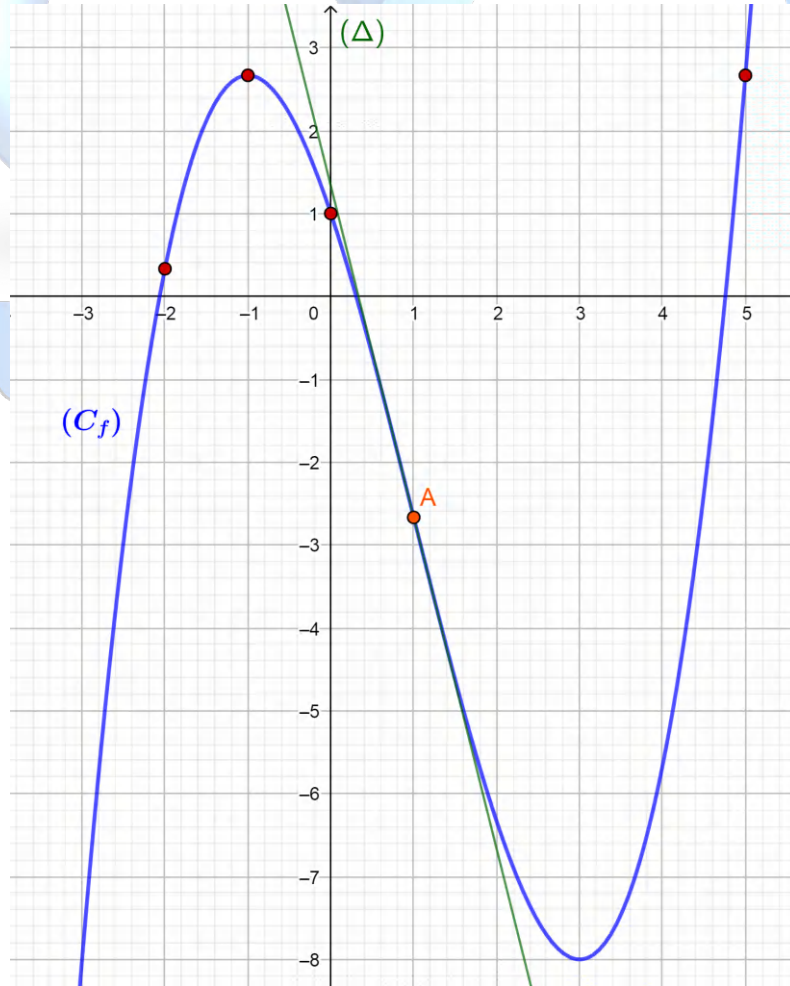
ومنه الوضعية النسبية:

- (C_f) فوق Δ لما: $x \in]1; +\infty[$.
- (C_f) يقطع Δ لما: في النقطة A ذات الاحداثيات $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$.
- (C_f) تحت Δ لما: $x \in]-\infty; 1[$.

5 التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعيّن بعض النقط المساعدة $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f(-2)$ و $f(5)$.
- نعيّن النقطة A نقطة تقاطع المنحني (C_f) والمماس (Δ) .
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -4x + \frac{4}{3}$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



1 تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{7}{2} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{7}{2} &\Rightarrow \frac{(0)^2 + a(0) + b}{(0)^2 + 2(0) + 2} = \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow b = 7 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + a)(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(x^2 + ax + 7)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 + 4x + ax^2 + 2ax + 2a - 2x^3 - 2ax^2 - 14x - 2x^2 - 2ax - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{(2 - a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

بما أن $f'(0) = 0$ لدينا:

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 &\Rightarrow \frac{(2 - a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2 + 2(0) + 2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 2a - 14 = 0 \\ &\Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

اذن:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}$$

- تبين أن $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 2 + 5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

اذن:

$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$

2 دراسة تغيرات الدالة f :

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) \\ &= 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} \right) &= 1 \end{aligned}$$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$f'(x) = \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -5x^2 - 10x = 0$$

$$\Rightarrow -5x(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}$$

- تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1

③ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 1$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

④ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx') :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 7 = 0$$

بعد حساب المميز Δ نجد: $\Delta = 21$ و:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} \cong -1.21 \\ x_2 = \frac{-7 - \sqrt{21}}{2} \cong -5.79 \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \{(-5.79; 0), (-1.21; 0)\}$$

- تقاطع (C_f) مع (yy') :

لدينا سابقا

$$f(0) = \frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{2} \right) \right\}$$

⑤ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} &= 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} - 1 \\ &= \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x^2 + 2x + 2) > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$5x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- الوضعية النسبية:

- لما $x \in]-\infty; -1[$: (C_f) تحت (Δ) .
- لما $x = -1$: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات $\omega(-1; 1)$
- لما $x \in]-1; +\infty[$: (C_f) فوق (Δ)

⑥ برهان أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) :

$$\begin{aligned} f(2\alpha - x) + f(x) &= f(-2 - x) + f(x) \\ &= 1 + \frac{5(-2 - x) + 5}{(2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 1} + 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= 2 + \frac{-10 - 5x + 5}{x^2 + 2x + 2} + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= 2 - \frac{(5x + 5)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= 2 \\ &= 2(1) \end{aligned}$$

ومنه النقطة $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

⑦ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω :

$$(T): y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

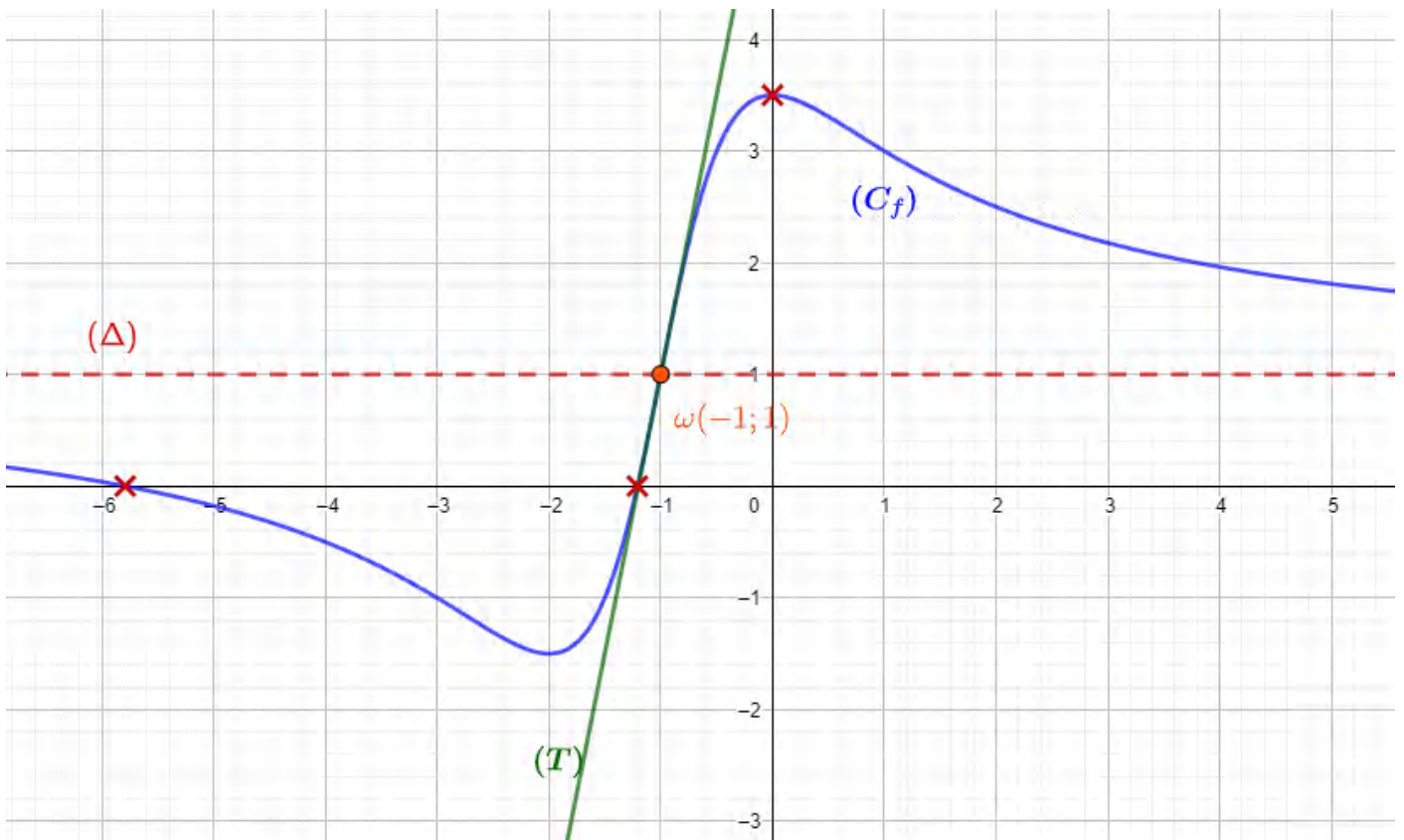
$$(T): y = \frac{-5 + 10}{(1 - 2 + 2)^2} (x + 1) + 1$$

$$(T): y = 5x + 6$$

⑧ التمثيل البياني لكل من (T) ، (Δ) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = 1$.
- نعين النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y = -5x + 6$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 16

(I)

1

أ/ حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة بقراءة بيانية:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	—	—	—
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 4	

2

أ/ حساب نهاية g عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب/ التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $+\infty$:

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

ج/ دراسة تغيرات الدالة g :

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+3) > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$

لدينا :

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	4	3	$+\infty$

(II)

1 كتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}k(x) &= |x| + \frac{4}{x+1} \\ &= \begin{cases} x + \frac{4}{x+1} & ; x \in]0; +\infty[\\ -x + \frac{4}{x+1} & ; x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & ; x \in]0; +\infty[\\ f(x) & ; x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\end{cases}\end{aligned}$$

2 كتابة معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

لدينا :

$$f'(x) = -1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

ومنه :

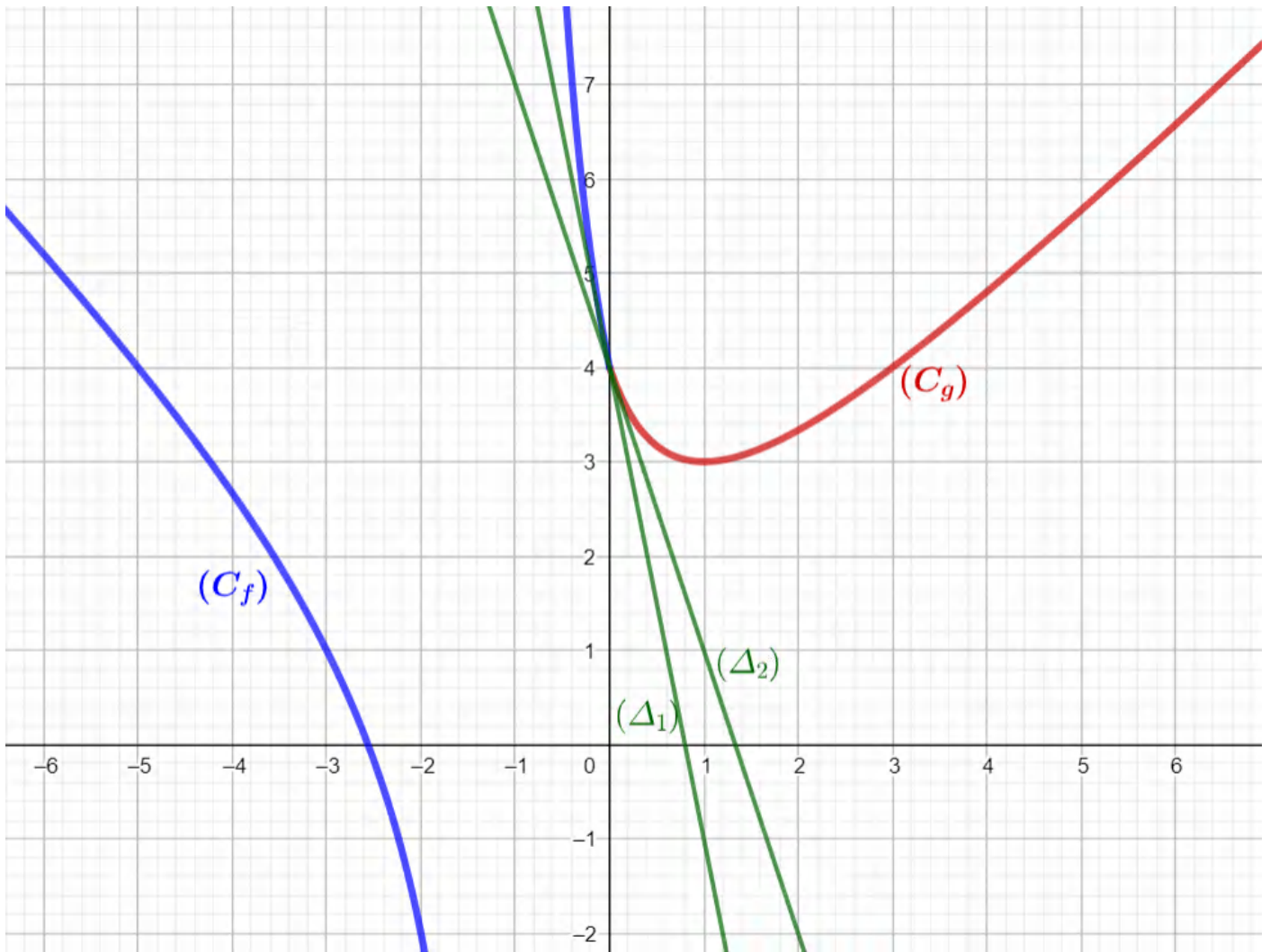
$$\begin{aligned}y_{(\Delta_1)} &= f'(0)x + f(0) \\ &= -5x + 4\end{aligned}$$

ولدينا :

$$y_{(\Delta_2)} = g'(0)x + g(0)$$

$$= -3x + 4$$

③ رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :



الحليل للرياضيات
قويسم

بالتوفيق

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥
الأستاذ: قويسم إبراهيم الخليل