

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

« الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: حساب مشتقة دالة

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 2 ساعة

« المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دالة، تعيين معادلة مماس عند نقطة
« الكفاءات المستهدفة: تذكير: حساب مشتقة دالة، تعيين معادلة مماس عند نقطة
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المرحلة
المرحلة	1 حساب المشتقة 1 حساب الأعداد المشتقة: لدينا: $f'(-1) = 0$ هو معامل توجيه المماس للنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 نختار نقطتين من المماس مثلا: $A(-1; 2)$ و $B(-2; 2)$ ومنه $f'(-1) = \frac{2-2}{-1+2} = \frac{0}{1} = 0$ $g'(2) = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2} \bullet f'(2) = \frac{0-2}{2-0} = -1 \bullet g'(-1) = \frac{-1-0}{-1-2} = \frac{1}{3} \bullet$ $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = -2 \bullet (f+g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = \frac{1}{3} \bullet$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - g'(2) \times f(2)}{(g(2))^2} = \frac{1}{2} \bullet \left(\frac{3}{f}\right)'(-1) = -\frac{3f'(-1)}{(f'(-1))^2} \bullet$ 2 من أجل كل x من $[0; 2]$ نضع: $h(x) = f(2x-1)$ - حساب $h'(0)$: لدينا: $h'(x) = 2f'(2x-1)$ ومنه: $h'(0) = 2f'(-1) = 0$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right) = 2f'(2) = -2$ 2 الحد المشتق-الدالة المشتقة تعريف f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. x_0 و h عددا حقيقيين من I مع: $h \neq 0$. نقول أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0. تسمى هذه النهاية: العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز لها بـ $f'(x_0)$. نكتب إذن: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ أو نكتب: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (بوضع $x = x_0 + h$) ملحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I فهي تقبل الاشتقاق على I ونرمز لدالتها المشتقة بـ f'	المرحلة



د15

مثال

$f(x) = x^2 + x$: دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي

1 برهن أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

2 عيّ $f'(x)$

ليكن x_0 عدد حقيقي كفي

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 1)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 1) = 2x_0 + 1$$

ومن ثم $2x_0 + 1$ عدد حقيقي ومنه f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0

لكن x_0 يسمح $\mathbb{R}$ ومنه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

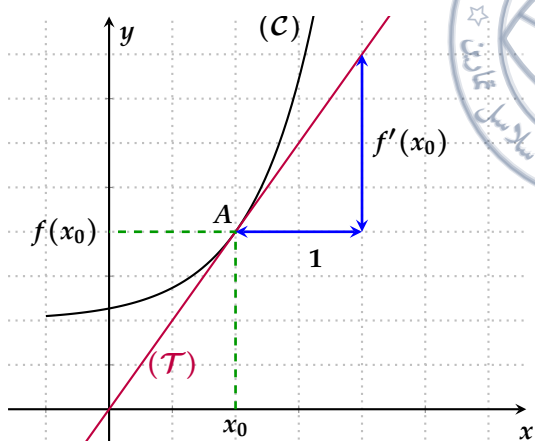
لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f

لدينا : $f'(x) = 2x + 1$

3 التفسير البياني (ماس منحنى دالة)**تعريف**

f دالة معرفة على مجال D من $\mathbb{R}$. و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 من D و $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند x_0 فإن المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_0, f(x_0))$ ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يسمى ماس المنحنى (C) عند النقطة A

معادلته هي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**البرهان**

الماس (T) هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$.

إذن معادلة (T) من الشكل $y = f'(x_0)x + b$ والنقطة $A(x_0, f(x_0))$ تنتمي إلى (T) فإن

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$$

ومن ثم :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

مثال

$f(x) = x^3 + 2$: دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

معادلة الماس لمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$ هي :

$$y = 5x - 2 \text{ أي } y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

التطبيق : حل تمرين { 4 - 7 - 8 } من صف { 58 } حة

ملامح حول سير الدرس



د40

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: الإستمرارية

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 1 ساعة

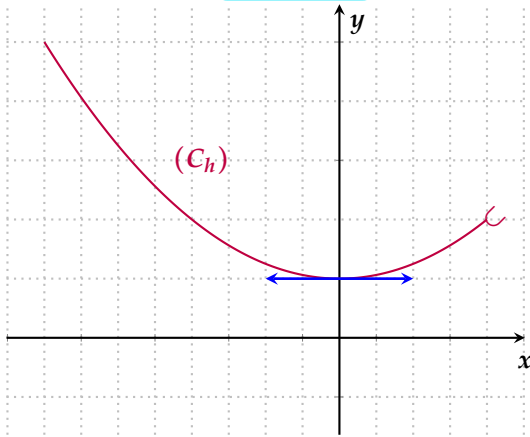
المكتسبات القبلية: مفاهيم أولية حول الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة: دراسة السلوك التقاربي للدالة
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المرحلة
	التهيئة النفسية 1 حصة مقبلة 3 حصص 7 1 حساب $E(11,01)$ ، $E(-1)$ ، $[-2,3]$ ، $E(\sqrt{3})$ ، لدينا: $-2 \leq -2,3 < -3$ ومنه $[-2,3] = -3$ ، $E(-1) = -1$ ، $1 \leq \sqrt{3} < 2$ ومنه $E(\sqrt{3}) = 1$ ، $E(11,01) = 11$ 2 نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2;1]$ كيلي: $f(x) = [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ ، $h(x) = x^2 + 1$ ولتكن (C_f) ، (C_g) و (C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب رسم (C_f) من أجل $x \in [-2; -1[$: $f(x) = -2$ من أجل $x \in [-1; 0[$: $f(x) = -1$ من أجل $x \in [0; 1[$: $f(x) = 0$ إذن $f(x) = \begin{cases} -2; x \in [-2; -1[\\ -1; x \in [-1; 0[\\ 0; x \in [0; 1[\end{cases}$ رسم (C_g) من أجل $x \in [-2; -1[$: $g(x) = x + 2$ من أجل $x \in [-1; 0[$: $g(x) = x + 1$ من أجل $x \in [0; 1[$: $g(x) = x$ إذن $f(x) = \begin{cases} x + 2; x \in [-2; -1[\\ x + 1; x \in [-1; 0[\\ x; x \in [0; 1[\end{cases}$	مرحلة الإلقاء



30د

رسم (C_h)



- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) دون رفع القلم (اليد)
- لا يمكن رسم المنحنيين (C_f) و (C_g) دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحنى (C_h) دون رفع القلم (اليد)
- هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- الدالتان f و g لا تقبلان نهاية عند -1 وكذا عند الصفر .
- الدالة h تقبل نهاية عند -1 و عند 0 لأنها معرفة عندهما : $h(0) = 1$ و $h(-1) = 2$

خلاصة

- يمكن رسم المنحنى (C_h) دون رفع القلم (اليد) ، فنقول أن الدالة h مستمرة على المجال $[-2;1]$.
- أما f ، g فهما غير مستمرتين على المجال $[-2;1]$

2

1 إستمرارية دالة عند القيمة a

تعريف

f دالة مجموعة تعريفها I و a عدد حقيقي غير معزول من I
 نقول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$
 نقول أن f مستمرة عند a يعني أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2 الإستمرار من اليمين

تعريف

f دالة معرفة على المجال $[x_0; a]$ و $a < 0$ ، القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليمين يعني أن: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2;4]$ كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x; x \in [-2;1[\\ x - 1; x \in [1;4] \end{cases}$$

بين أنها مستمرة على يمين الـ 1

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0$ و كذلك $f(1) = 1 - 1 = 0$ ، إذن الدالة f مستمرة على يمين الـ 1

3 الإستمرار من اليسار

تعريف

f دالة معرفة على المجال $[x_0; a]$ و $a > 0$ ، القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليسار يعني أن: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2; 4]$ كيلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x; x \in [-2; 1[\\ x - 1; x \in [1; 4] \end{cases}$$
 بين أنها مستمرة على يسار الـ 1

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x = 2$ وكذلك $f(1) = 1 + 1 = 2$ ، إذن الدالة f مستمرة على يمين الـ 1

4) إستمرارية دالة على مجال من مجموعة التعريف

تعريف

دالة معرفة على مجال I
 القول أن f مستمرة على I يعني $f(x)$ مستمرة عند كل عدد a من المجال I

5) التفسير البياني

الدالة f مستمرة على المجال I من $\mathbb{R}$ يعني يمكن رسم منحناها البياني (C_f) دون رفع القلم (دون رفع اليد)

مثال

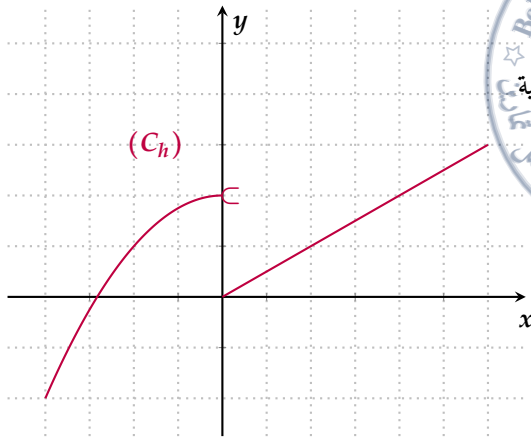
لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2; 3]$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2; x \in [-2; 0[\\ x; x \in [0; 3] \end{cases}$$

1 مثل بيانيا الدالة f . هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2 هل الدالة f مستمرة على المجال : $[-2; 3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة .

الحل



1 أنظر لدينا من جهة : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ ومن جهة ثانية $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ، إذن الدالة f لا تقبل نهاية عند 0

2 الدالة f غير مستمرة عند 0 وبالتالي فهي غير مستمرة على المجال : $[-2; 3]$.
 الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0; 3]$

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a; b]$ و مستمرة على $[a; b]$ وعلى a من اليمين وعلى b من اليسار نقول أنها مستمرة على $[a; b]$

خواص (تقبل دون برهان):

دالة f مستمرة عند a يعني $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \ell$

- الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها
- مجموع و جداء دوال مستمرة عند a هي دالة مستمرة عند a
- الدوال كثيرات الحدود و الدوال $\sin$ ، $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1; x \leq 2 \\ x^2 + x - 5; x > 2 \end{cases}$$

أدرس إستقرارية الدالة f عند 2
هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

الحل

1 لدينا : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1$ و $f(2) = 1$ ، إذن الدالة مستمرة على يمين 2

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5) = 1$ و $f(2) = 1$ ، إذن الدالة مستمرة على يسار 2

ومنه الدالة f مستمرة عند الـ 2

2 لدينا : $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]-\infty; 2]$

$x \mapsto x^2 + x - 5$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]2; +\infty[$

ولدينا حسب سؤال 1 f مستمرة عند 2 ومنه الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

تطبيق :

1 بين أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^2 - 2x) \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

2 بين أن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ مستمرة على $]1; +\infty[$

الحل

1 لدينا : $x \mapsto x^2 - 2x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود

لدينا : $x \mapsto \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$

الدالة f جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ ، إذن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2 الدالة g دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها ومنه g مستمرة على $]1; +\infty[$

تمرين منزلي : تمرين 49-45 صفحة 29

حل تمرين 45 صفحة 29

1 دراسة إستقرارية الدالة f عند العدد 1

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ ولدينا : $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ، إذن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$ ومنه الدالة f مستمرة عند العدد 1

2 لدينا : $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ دالة ناطقة فهي معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ومنه f مستمرة على $\mathbb{R} - \{1\}$

ومما سبق f مستمرة عند العدد 1 إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$

ملاحظات حول سير الدرس

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

« الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: مبرهنة القيم المتوسطة

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 2 ساعة

« المكتسبات القبلية: إستمرارية دالة على مجال، رتبة دالة
« الكفاءات المستهدفة: تبيان وجود حل للمعادلة $f(x) = k$
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المراحل
المرحلة الأولى	التهيئة النفسية 1 مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان) أضف إلى معلوماتك إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $[a, b]$	مرحلة الإنطلاق
المرحلة الثانية	2 التفسير البياني المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة منحنى الدالة f في نقطة فاصلتها محصورة بين a و b بالنسبة للشكل المقابل للمستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع منحنى الدالة f في ثلاث نقط فواصلها c_1، c_2 و c_3. حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$	مرحلة البناء
المرحلة الثالثة	3 المعادلة $f(x) = k$ إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a, b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلاً c محصور بين a و b ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة. مثال برهن بإستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^5 + 3x^4 - 6x^2 = 1$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[1; 2]$ طريقة • نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$ • نتحقق من إستمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$ • نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$	مرحلة التقييم



15 د

الحل : لتكن f الدالة المعرفة على $[1;2]$ بـ: $f(x) = x^5 + 3x^2 - 6x^2$
 • f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على المجال $[1;2]$ ولدينا: $f(1) = -2$ و $f(2) = 56$
 ولدينا: $56 > 1 > -2$ أي $f(2) > 1 > f(1)$ ، إذن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[1;2]$
طريقة 2
 المعادلة السابقة تكافئ: $x^5 + 3x^2 - 6x^2 - 1 = 0$ ، نضع $f(x) = x^5 + 3x^2 - 6x^2 - 1$
 f مستمرة على المجال $[1;2]$ و $f(1) = -2$ ، $f(2) = 56$ ، ومنه $f(1) \times f(2) < 0$
 ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[1;2]$

تطبيق

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث: $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$

1 أحسب: $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f(-\frac{1}{2})$ ، $f(-1)$

2 إستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

الحل

1 حساب الصور: $f(1) = \frac{1}{4}$ ، $f(0) = -\frac{1}{4}$ ، $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ ، $f(-1) = -\frac{5}{4}$

2 إستنتاج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

لدينا: f دالة كثيرة حدود، فهي معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1;1]$

لدينا f مستمرة على المجال $[-1; -\frac{1}{2}]$ وأن: $f(-\frac{1}{2}) \times f(-1) < 0$ أي f أي 0 محصور

بين $f(-\frac{1}{2})$ و $f(-1)$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال (1) $[-1; -\frac{1}{2}]$

لدينا f مستمرة على المجال $[-\frac{1}{2}; 0]$ وأن: $f(0) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$ أي f أي 0 محصور بين $f(-\frac{1}{2})$ و $f(0)$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال (2) $[-\frac{1}{2}; 0]$

لدينا f مستمرة على المجال $[0; 1]$ وأن: $f(1) \times f(0) < 0$ أي f أي 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال (3) $[0; 1]$

النتيجة: من (1) و (2) و (3) فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

4 الدوال المستمرة و الرتبة تماماً على المجال $[a; b]$

أضف إلى

معلوماتك

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين

$f(a)$ و $f(b)$ ، فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[a; b]$

البرهان

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتبة تماماً على المجال $[a; b]$

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي c

محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.

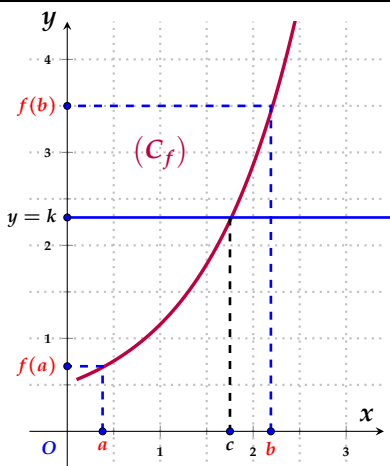
لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c محصور بين a و b و يحقق $f(c') = k$

يكون حينئذ $c' \neq c$ و $f(c) = f(c')$ وهذا يناقض الرتبة التامة للدالة f على $[a; b]$.

وبالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a; b]$ بحيث $f(c) = k$



5 د



التفسير البياني

المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع مرة واحدة منحنى الدالة f في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .
 إذا كان $k = 0$ منحنى الدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها حل للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a; b]$.

تطبيق 1

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث جدول تغيراتها كيلي :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		5		8
		-2		-3	

عين عدد حلول المعادلات التالية محدد المجال الذي ينتمي إليه كل حل $f(x) = 9$ ، $f(x) = -2$ ، $f(x) = 0$

تطبيق 2

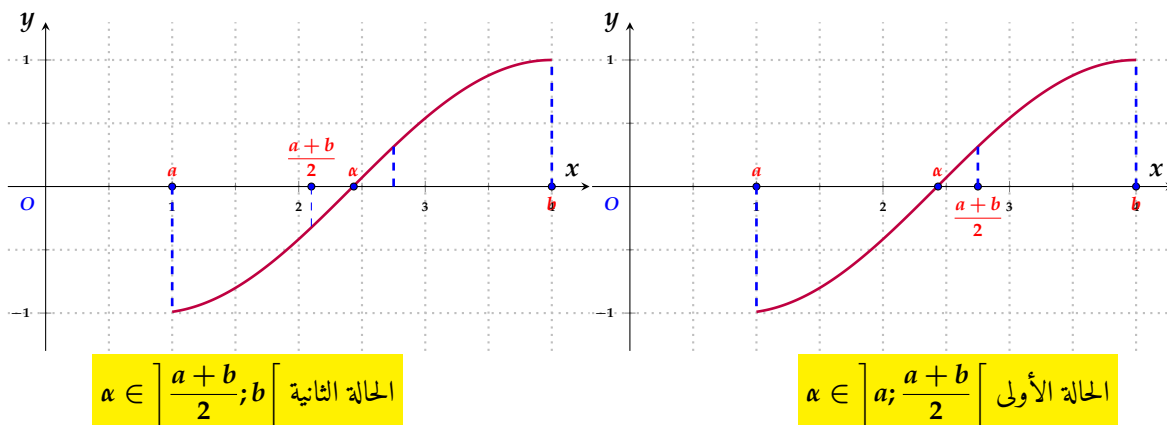
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

- أحسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[1; 2]$
- إستنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x

5 إيجاد حصر حل لمعادلة بالتصنيف

الحصول على حصر أدق للعدد α نتبع طريقة التصنيف التالية :

- نحسب كل من $m = \frac{a+b}{2}$ (مركز المجال $[a; b]$) و $f(m)$
- نقارن بين $f(a)$ و $f(m)$ ونميز حالتين :
- إذا كان $f(a) \times f(m) < 0$ فإن الحل α موجود في المجال $[a; m]$
- إذا كان $f(a) \times f(m) > 0$ فإن الحل α موجود في المجال $[m; b]$
- نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m وذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه .



$$\alpha \in \left] \frac{a+b}{2}; b \right[\text{ الحالة الثانية}$$

$$\alpha \in \left] a; \frac{a+b}{2} \right[\text{ الحالة الأولى}$$

تطبيق 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ كإيلي : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f .

2 برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1, 1; 2, 3[$.

3 بإستعمال طريقة التصنيف عين حصراً للعدد α سعته (طوله) 0,15

4 أثبت أن: $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

الحل

1 دراسة إتجاه تغير الدالة f

الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $]1; +\infty[$ حيث : $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

بمأن $-\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ و $-\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f دالة متناقصة تماماً على المجال $]1; +\infty[$.

2 لنبرهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1, 1; 2, 3[$

• f دالة مستمرة على المجال $]1; +\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]1, 1; 2, 3[$.

• $f(1,1) \approx 8,95$ و $f(2,3) \approx -0,75$ ومنه $f(1,1) \times f(2,3) < 0$.

• f دالة متناقصة تماماً على المجال $]1; +\infty[$ فهي متناقصة تماماً على المجال $]1, 1; 2, 3[$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $\alpha \in]1, 1; 2, 3[$.

3 تعيين حصراً للعدد α سعته 0,15

• مركز المجال $]1, 1; 2, 3[$ هو $m = \frac{1,1 + 2,3}{2} = 1,7$ ومنه $f(1,7) \approx 0,12$ و $f(1,7) \times f(2,3) < 0$

إذن : $\alpha \in]1, 1; 1,7; 2, 3[$

• مركز المجال $]1, 1; 1,7; 2, 3[$ هو $m = \frac{1,1 + 1,7 + 2,3}{3} = 1,7$ ومنه $f(1,7) \times f(2) < 0$

إذن : $\alpha \in]1, 1; 1,7; 2[$

• مركز المجال $]1, 1; 1,7; 2[$ هو $m = \frac{1,1 + 1,7 + 2}{3} = 1,85$ ومنه $f(1,85) \approx -0,18$ و $f(1,85) \times f(1,7) < 0$

إذن : $\alpha \in]1, 1; 1,7; 1,85[$

لاحظ أن طول المجال الأخير هو $1,85 - 1,7 = 0,15$ إذن نتوقف عن تصنيف المجال .

4 إثبات أن $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

لدينا α حل للمعادلة $f(x) = 0$ معناه $f(\alpha) = 0$ تكافئ : $\frac{1}{\alpha-1} - \sqrt{\alpha} = 0$ تكافئ : $\frac{1}{\alpha-1} = \sqrt{\alpha}$

بالتربيع الطرفين نجد : $\frac{1}{(\alpha-1)^2} = \alpha$ تكافئ : $\alpha(\alpha-1)^2 = 1$ تكافئ : $\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 1$

$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 1$

إذن : $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

ملاحظات حول سير الدرس

.....
.....
.....

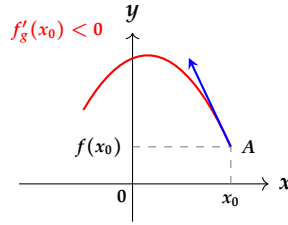
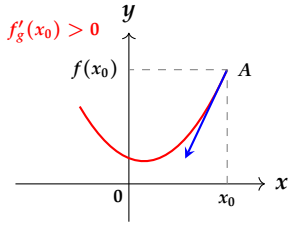
ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

« الوحدة التعليمية: الإشتقاقية والإستمرارية
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الدقة: قابلية الإشتقاق دالة عند عدد

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 2 ساعة

« المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دالة، تعيين معادلة مماس عند نقطة
« الكفاءات المستهدفة: قابلية إشتقاق دالة عند عدد من اليمين ومن اليسار وتفسير الهندسي
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المراحل
المرحلة الأولى	1 قابلية إشتقاق الدالة عند عدد 1 قابلية الإشتقاق على اليمين تعريف ف دالة معرفة على الأقل، على مجال من الشكل $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$ عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$ كانت إذا فقط إذا كانت ℓ_1 حيث ℓ_1 عدد حقيقي ويسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين التفسير البياني إذا قبلت الدالة الإشتقاق في x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين وهو معرف كلياً: $y = \ell_1(x - x_0) + f(x_0) : x \geq x_0$	مرحلة الإنطلاق
المرحلة الثانية	مثال الدالة المعرفة بـ $f(x) = x\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأنها معرفة على $[0; +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x} - 0\sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ لدينا 2 قابلية الإشتقاق على اليسار تعريف ف دالة معرفة على الأقل، على مجال من الشكل $[x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$ عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$ كانت إذا فقط إذا كانت ℓ_2 حيث ℓ_2 عدد حقيقي ويسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار	مرحلة البناء



❖ التفسير البياني

إذا قبلت الدالة الاشتقاق في x_0 من اليسار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين وهو معرف كلياً:
من أجل $y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0) : x \leq x_0$

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

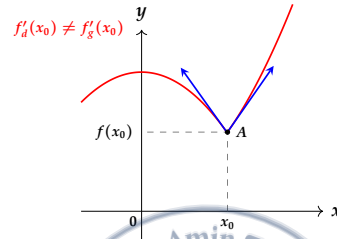
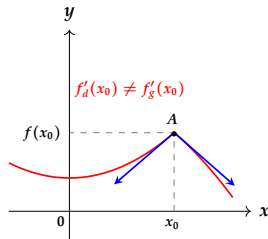
ندرس قابلية الاشتقاق للدالة f من اليسار العدد 3

لدينا:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ; x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\\ -(x^2 - 9) & ; x \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 3} \frac{-(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \nearrow 3} -(x + 3) = -6$$

إذن الدالة تقبل الاشتقاق على يسار 3 وهي تقبل نصف مماس على اليسار معادلته $y_g = -6(x - 3) + f(3)$

③ نقطة زاوية



إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

ندرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد 3

لدينا:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ; x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\\ -(x^2 - 9) & ; x \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 3} \frac{-(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \nearrow 3} -(x + 3) = -6$$

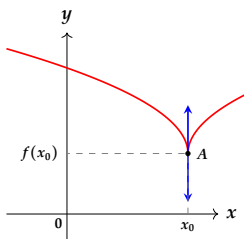
إذن الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار 3 وعددها المشتق هو -6

$$\lim_{x \searrow 3} \frac{(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \searrow 3} (x + 3) = 6$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين 3 وعددها المشتق هو 6

بما أن العدد المشتق على اليمين يختلف عن اليسار فالدالة لا تقبل الاشتقاق عند 3 وتقبل نقطة زاوية

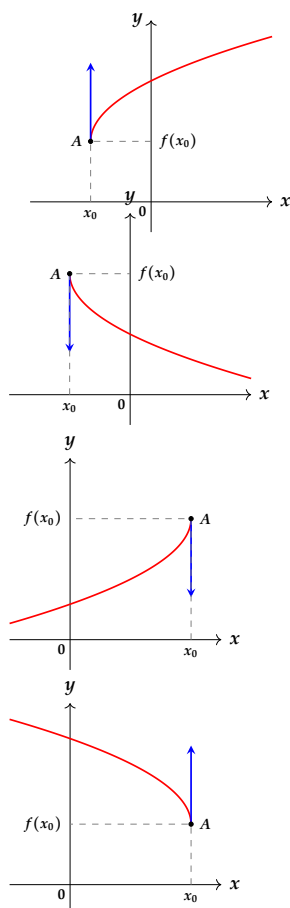
④ مماس موازي لمحور الترتيب



إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty$ فإن التمثيل البياني (C_f) للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مماساً يوازي حامل محور الترتيب.



20



حالات خاصة

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة

للإشتقاق عند x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند x_0 النقطة $A(x_0; f(x_0))$ عمودي مماس نصف محو نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند

x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند x_0 النقطة $A(x_0; f(x_0))$ عمودي مماس نصف محو نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند

يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ عمودي مماس نصف محو نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند

يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ عمودي مماس نصف محو نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.

مثال

الدالة المعروفة بـ: $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي على حامل محور الترتيب معادلته نحو الأعلى $x = 0$

التقويم

2 الإستقائية و الإستمرارية

مبرهنة: إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0

ملاحظة: عكس هذه المبرهنة ليس دوما صحيح

مثال

الدالة $f: x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0 ولكن غير قابلة للإشتقاق عند 0

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-0}{x} = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-0}{x} = 1$

ومنه المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار $(f'_d \neq f'_g)$ إذن f لا تقبل الإشتقاق عند 0



20



20د

تطبيق: أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 في كل حالة ثم فسر النتيجة بانياء.

① $f(x) = -x^2 + 2$; $x_0 = 1$ ② $f(x) = \sqrt{x-4}$; $x_0 = 4$ ③ $f(x) = |x-3|$; $x_0 = 3$

④ $f(x) = \frac{|x|x^2}{x+2}$; $x_0 = 0$

حل التطبيق:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x+1) = -2$

نتيجة

الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$ و $f'(1) = -2$

② $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x-4}}{x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-4} \times \sqrt{x-4}}{(x-4)\sqrt{x-4}}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{(x-4)\sqrt{x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$

نتيجة

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 4$

③ كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة : $f(x) = \begin{cases} -x(x-3) & ; x < 3 \\ x(x-3) & ; x > 3 \end{cases}$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 3$:

أولا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يمين x_0 :

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

ثانيا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يسار x_0 :

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} -x = -3$

نتيجة

إذن النسبة $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ ليس لها نهاية عندما x يتحول إلى 3 ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 3

④ كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x+2} & ; x \in [0; +\infty[\\ \frac{-x^3}{x+2} & ; x \in]-\infty; -2] \cup]-2; 0[\end{cases}$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$:

أولا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يمين x_0 :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x+2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+2} = \frac{0}{2} = 0$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$:

ثانيا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يسار x_0 :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^3}{x+2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x+2} = \frac{0}{2} = 0$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 0$:

نتيجة

بما أن f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار $x_0 = 0$ ولهما نفس النهاية فإن f دالة قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

ملحوظات حول سير الدرس

.....

.....

.....

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

« الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: حساب مشتقة دالة

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 1 ساعة

« المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دالة، تعيين معادلة مماس عند نقطة
« الكفاءات المستهدفة: حساب مشتقات الدوال المألوفة
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المرحلة																																																
المرحلة الأولى	التهيئة النفسية المشتقات و العمليات 1 مشتقات دوال مألوفة (تقديم أمثلة) <table> <tr> <th>الدالة f</th><th>مجالات قابلية الاشتقاق</th><th>الدالة المشتقة f'</th></tr> <tr> <td>$x \mapsto a$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto 0$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto ax + b$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto a$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto x^2$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto 2x$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N})$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto nx^{n-1}$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto \frac{1}{x}$</td><td>$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$</td><td>$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$</td><td>$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$</td><td>$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto \sqrt{x}$</td><td>$]0; +\infty[$</td><td>$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto \sin x$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \cos x$</td></tr> <tr> <td>$x \mapsto \cos x$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto -\sin x$</td></tr> </table> 2 المشتقات و العمليات على الجوال النتائج ملخصة في الجدول التالي: <table> <tr> <th>الدالة f</th><th>مجالات قابلية الاشتقاق</th><th>الدالة المشتقة f'</th></tr> <tr> <td>$u + v$</td><td>u و v قابلتان للإشتقاق على I</td><td>$u' + v'$</td></tr> <tr> <td>$u.v$</td><td>u و v قابلتان للإشتقاق على I</td><td>$u'.v + u.v'$</td></tr> <tr> <td>$\lambda u (\lambda \in \mathbb{R})$</td><td>$u$ قابلة للإشتقاق على I</td><td>$\lambda u'$</td></tr> <tr> <td>$\frac{1}{u}$</td><td>u قابلة للإشتقاق على I ومن أجل كل x من I: $u(x) \neq 0$</td><td>$-\frac{u'}{u^2}$</td></tr> <tr> <td>$\frac{u}{v}$</td><td>u و v قابلتان للإشتقاق على I و من أجل كل x من I: $v(x) \neq 0$</td><td>$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$</td></tr> </table>	الدالة f	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة f'	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$	$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	الدالة f	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة f'	$u + v$	u و v قابلتان للإشتقاق على I	$u' + v'$	$u.v$	u و v قابلتان للإشتقاق على I	$u'.v + u.v'$	$\lambda u (\lambda \in \mathbb{R})$	u قابلة للإشتقاق على I	$\lambda u'$	$\frac{1}{u}$	u قابلة للإشتقاق على I ومن أجل كل x من I : $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u}{v}$	u و v قابلتان للإشتقاق على I و من أجل كل x من I : $v(x) \neq 0$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء المعرفة المرحلة الثالثة
الدالة f	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة f'																																																
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$																																																
$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$																																																
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$																																																
$x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$																																																
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$																																																
$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$	$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$																																																
$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$																																																
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$																																																
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$																																																
الدالة f	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة f'																																																
$u + v$	u و v قابلتان للإشتقاق على I	$u' + v'$																																																
$u.v$	u و v قابلتان للإشتقاق على I	$u'.v + u.v'$																																																
$\lambda u (\lambda \in \mathbb{R})$	u قابلة للإشتقاق على I	$\lambda u'$																																																
$\frac{1}{u}$	u قابلة للإشتقاق على I ومن أجل كل x من I : $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$																																																
$\frac{u}{v}$	u و v قابلتان للإشتقاق على I و من أجل كل x من I : $v(x) \neq 0$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$																																																



د5

الدوال كثرات الحدود قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$
الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها

أمثلة

لنعين مشتقة الدوال التالية المعرفة على $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x} \quad ③ \quad f(x) = (x - 2)\sqrt{x} \quad ② \quad f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8 \quad ①$$

الحل

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6}{4x^2} \quad ③ \quad f'(x) = \frac{2x - 2}{\sqrt{x}} \quad ② \quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x \quad ①$$

مبرهنة

a و b عددين حقيقيين مع $a \neq 0$ ، u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث : $ax + b$ ينتمي إلى I .

الدالة $f : u(ax + b) \rightarrow f$ قابلة للإشتقاق على J ولدينا : $f'(x) = au'(ax + b)$

أمثلة

$f(x) = a \cos(ax + b)$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$: $\sin(ax + b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = -a \sin(ax + b)$

$f(x) = -a \sin(ax + b)$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$: $\cos(ax + b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = a \cos(ax + b)$

$f(x) = na(ax + b)^{n-1}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$: $(ax + b)^n$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = na(ax + b)^{n-1}$

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

1 عين مشتقة الدالة f

2 لتكن g و h الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$: $g(x) = f(-x)$ و $h(x) = g(3x - 1)$

عين $g'(x)$ و $h'(x)$ دون تعيين $g(x)$ و $h(x)$

الحل

1 الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'(x^2+1) - (x^2+1)'(2x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

2 الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x) = -f'(-x) = \frac{2x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}$

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة h' حيث :

$$h'(x) = 3g'(3x-1) = \frac{2(3x-1)^2+2(3x-1)-2}{((3x-1)^2+1)^2} = \frac{18x^2+4x-2}{(9x^2-6x+2)^2}$$

تطبيق منزلي : حل تمرين {13 - 17 - 24} من صف {59 - 60} حة

ملوظات حول سير الدرس

.....
.....
.....

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: الاشتقاقية والإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: حساب مشتق الدالة مركب

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 1 ساعة و نصف

المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دوال المألوفة

الكفاءات المستهدفة: حساب مشتق الدالة مركب ، $\sqrt{u(x)}$ ، $\frac{1}{u(x)^n}$ ، $u(x)^n$

المراجع: الكتاب المدرسي ، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المرحلة
	التهيئة النفسية التذكير بتفكيك دالة و تركيب دالة و مشتقات الدوال $x \mapsto f(ax+b)$ 1 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 3$. 1 عيّن عبارة الدالة $(f \circ g)(x)$. 2 أحسب $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $(f \circ g)'(x)$. 3 قارن بين $(f \circ g)'(x)$ و $f'(g(x))g'(x)$. مناقشة النشاط لدينا: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3)$. إذن $(f \circ g)(x) = (x+3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$. لدينا: $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 1$ و $(f \circ g)'(x) = 2x + 6$. المقارنة بين $(f \circ g)'(x)$ و $f'(g(x))g'(x)$ لدينا: $g'(x)f'(g(x)) = 1f'(x+3) = 1[2(x+3)] = 2x + 6$ ومنه: $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$ مشتق الدالة مركب مبرهنة إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، وإذا قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ قابلة للاشتقاق على I ، ولدينا من أجل كل x من I $[v(u(x))]' = u'(x)v'(u(x))$ أمثلة لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ نضع: $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = \sqrt{x}$ ومنه: $f(x) = (v \circ u)(x)$ و $[v(u(x))]' = u'(x)v'(u(x))$. لدينا: $u'(x) = 2x$ و $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ إذن: $f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	مرحلة الإنطلاق مرحلة النشاط مرحلة التمرين

2 المشتقات المتتابة

تعريف

f دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ ، f' دالتها المشتقة على هذا المجال.
 إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى **الدالة المشتقة الثانية** للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' أو $f^{(2)}$.
 وهكذا إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق n مرة فإن دالتها المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $f^{(n)}$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$
 لدينا: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$ ، $f''(x) = 12x^2 - 6$ ، $f^{(3)}(x) = 24x$ ، $f^{(4)}(x) = 24$

ملاحظة: f دالة ، n عدد طبيعي غير معدوم .
 $f^{(n)}$ هي الدالة f قوى العدد n
 $f^{(n)}$ هي مشتقة ذات الرتبة n (المشتقة النونية)

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي $f(x) = \cos x$

- 1 عيّن الدوال المشتقة المتتابة f' ، f'' ، f''' ، $f^{(4)}$ و $f^{(5)}$.
- 2 نحن حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات المرتبة n .

الحل

- 1 تعيين الدوال المشتقة المتتابة
 من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = -\sin(x)$ ، $f''(x) = -\cos(x)$ ، $f'''(x) = \sin(x)$ ، $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ ، $f^{(5)}(x) = -\sin(x)$
- 2 تخمين حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$
 من أجل $n = 2k + 1$ نجد : $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin(x)$ حيث $k \in \mathbb{N}$
 من أجل $n = 2k$ نجد : $f^{(2k+2)}(x) = (-1)^{k+1} \cos(x)$ حيث $k \in \mathbb{N}$

3 مشتقة الدالة $\sqrt{u(x)}$

مشتقة الدالة $\sqrt{u(x)}$ $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

أضف إلى
معلوماتك

ميرهنه

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ و كانت u موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على I ، ولدينا من أجل كل x من I :

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

البرهان

نضع $f(x) = v \circ u$ ومنه $v(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = \sqrt{u(x)}$
 لدينا u قابلة للاشتقاق على I من $\mathbb{R}$ وموجبة أي $u(x) > 0$ أي $u(x) \in]0; +\infty[$
 إذن f قابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة f' حيث : $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$ لكن $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 ومنه $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مثال

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
 لدينا : $f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

مشتقة الجالة $x \mapsto (u(x))^n$

أضف إلى

معلوماتك

مبرهنة

• n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 ، إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I من $\mathbb{R}$ فإن
 الدالة u^n قابلة للاشتقاق على I ولدينا : من أجل كل x من I $(u(x)^n)' = nu'(x) (u(x))^{n-1}$

البرهان

نضع $f(x) = v \circ u$ ومنه $v(x) = x^n$ و $f(x) = (u(x))^n$
 الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$
 الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
 ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ($u(x) \in \mathbb{R}$ محققة دوماً)
 إذن f قابلة للاشتقاق على I
 من أجل كل x من I $f'(x) = ((v \circ u)(x))' = u'(x)v'(u(x))$ لكن $v'(x) = nx^{n-1}$
 ومنه $f'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}$ ومنه $v'(u(x)) = n(u(x))^{n-1}$

مثال

• لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^4 + 2x)^6$
 لدينا : $f'(x) = 6(4x^3 + 2)(x^4 + 2x)^5$ أي : $f'(x) = (24x^2 + 12)(x^4 + 2x)^5$

مشتقة الجالة $x \mapsto \frac{1}{(u(x))^n}$

أضف إلى

معلوماتك

مبرهنة

• n عدد طبيعي غير معدوم ، إذا كانت دالة u قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ و كانت u لا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : من أجل كل x من I $\left(\frac{1}{u(x)^n}\right)' = -\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

البرهان

$$f(x) = \frac{1}{(u(x))^n} \text{ نضع :}$$

$$v(x) = \frac{1}{x} \text{ لدينا : حيث } f = v \circ u$$

الدالة u قابلة للإشتقاق على I ومنه $x \mapsto (u(x))^n$ قابلة للإشتقاق على I ولا تنعدم على I ومنه حسب مبرهنة مشتقة

مقلوب قابلة للإشتقاق $\frac{1}{(u(x))^n}$ قابلة للإشتقاق على I أي f قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة f' حيث

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v'(u(x)) \\ &= -\frac{(u(x))^n}{(u(x))^2} \\ &= -\frac{nu'(x)u(x)^{n-1}}{(u(x))^{2n}} \\ &= -\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n}u(x)^{-n+1}} \\ &= -\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n-n+1}} \\ &= -\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = -\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}} \text{ ومنه}$$

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^3}$

$$f'(x) = -\frac{6x}{(x^2+3)^4} \text{ لدينا :}$$

تطبيق

حل التمرين 78 صفحة 66

حل التمرين 40 صفحة 61

ملاحظات حول سير الدرس

.....

.....

.....

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: الاشتقاقية والإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: تطبيقات الاشتقاقية

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 1 ساعة

المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة: إتجاه دالة بإستعمال الدالة المشتقة
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة الأولى		عناصر الدرس		المرحلة الثانية																									
المدة				التهيئة النفسية																									
20د				1																									
				في الشكل المقابل (C_f) و $(C_{f'})$ منحنى الدالة f ودالتها المشتقة f' أتمم الجدول التالي :																									
				<table><tr><th>المجال</th><th>إشارة $f'(x)$</th><th>تغيرات الدالة f</th></tr><tr><td>$I = [-2; -1]$</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$J = [-1; 1]$</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$k = [-1; 3]$</td><td></td><td></td></tr></table>		المجال	إشارة $f'(x)$	تغيرات الدالة f	$I = [-2; -1]$			$J = [-1; 1]$			$k = [-1; 3]$														
المجال	إشارة $f'(x)$	تغيرات الدالة f																											
$I = [-2; -1]$																													
$J = [-1; 1]$																													
$k = [-1; 3]$																													
				2																									
				ذكر بالخاصية التي تربط إشارة $f'(x)$ بتغيرات الدالة f																									
				2																									
				المشتقة و إتجاه التغير																									
				مبرهنة																									
				أضف إلى معلوماتك																									
				f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x) > 0$ موجبة تماماً على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماماً على D_f. إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x) < 0$ موجبة تماماً على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماماً على D_f. إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x) = 0$ موجبة تماماً على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على D_f.																									
				مثال تطبيقي : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 - 4)^2$																									
				أدرس إتجاه تغير الدالة f																									
				الحل																									
				f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = 2(2x)(x^2 - 4)$ <table><tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>-2</th><th>0</th><th>2</th><th>$+\infty$</th></tr><tr><td>$4x$</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$x^2 - 4$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>		x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	$4x$	-	-	0	+	+	$x^2 - 4$	+	0	-	-	+	$f'(x)$	-	0	+	0	+
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$																								
$4x$	-	-	0	+	+																								
$x^2 - 4$	+	0	-	-	+																								
$f'(x)$	-	0	+	0	+																								
				10د																									

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[-2; 0]$ و $[2; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; -2]$ و $[0; 2]$ **ملاحظة:**

نقول أنّ الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f ، إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما على المجال D_f .
تبقى هذه البرهنة صحيحة إذا إنعدمت المشتقة من أجل قيم معزولة في المجال المذكور

مثال

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x^2$ والدالة المشتقة $3x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، لأن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ مجموعة منتهية وهي $\{0\}$

تطبيق

1 أدرس اتجاه تغير الدالة f ، أحسب $f(-1)$.
الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2 شكل جدول تغيرات الدالة f ثم إستنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 بإستعمال سؤال 1 أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $] -\infty; 0[$ بـ $g(x) = \frac{1}{2} - 3x - \frac{4}{x}$

الحل

1 دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ حيث

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و $[2; +\infty[$

و متناقصة على المجال $[0; 2]$

حساب $f(-1)$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 0$$

نهايات الدالة f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

2 جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	0	+
f	$-\infty$	0	4	0	$+\infty$

• من جدول التغيرات f نستنتج أنّ $f(2)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f و $f(0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

إشارة $f(x)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	+

3 دراسة إتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $] -\infty; 0[$ و دالتها المشتقة g' حيث : $g'(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2}$ ومنه

$$g'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $f(x)$

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-1; 0[$ و متناقصة تماما على المجال $] -\infty; -1[$

ملاحظات حول سير الدرس

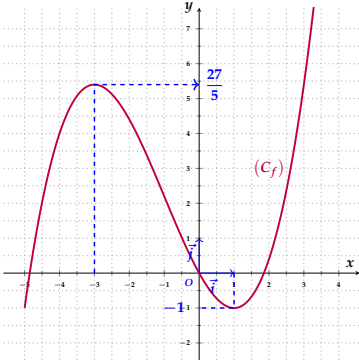


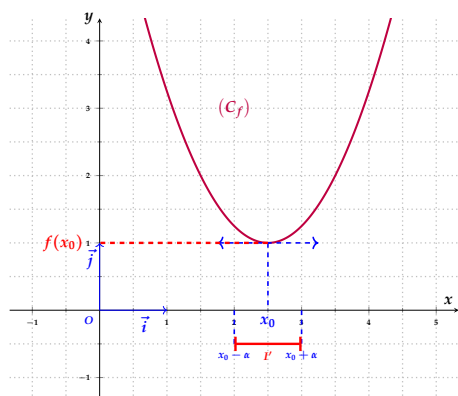
ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

« الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: تطبيقات الإستقائية (تابع)

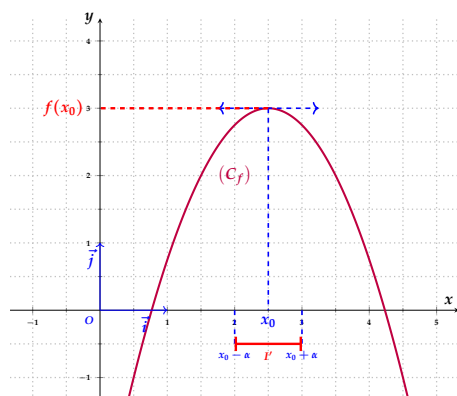
« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 1 ساعة

« المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دوال المألوفة
« الكفاءات المستهدفة: قيم الحدية المحلية لدالة، نقطة إنعطاف
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المرحلة
المرحلة الأولى	1 القيم الحدية المحلية تعريف f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I. « $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح I' محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I' : $f(x) \leq f(x_0)$ « $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح I' محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I' : $f(x_0) \leq f(x)$ « $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة يعني أن: $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى أو صغرى مثال لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 4]$ $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 - 9x)$ تمثيلها (C_f) موضح في الشكل المقابل نلاحظ أن: $\frac{27}{5}$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة عند $x_0 = -3$ و -1 قيمة حدية محلية صغرى للدالة عند $x_1 = 1$  مبرهنة « لتكن الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة . إذا إنعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة x_0 من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I' محتوي في I يشمل x_0. تقبل فيه f قيمة حدية $f(x_0)$ ، تسمى $f(x_0)$ قيمة حدية محلية .	المرحلة الثانية



من أجل كل x من I' : $f(x_0) \leq f(x)$

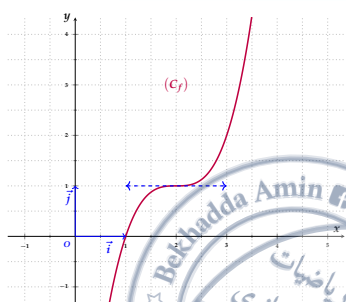


من أجل كل x من I' : $f(x) \leq f(x_0)$

ملاحظات :

- النقطة $(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة حدية (الذروة) و المماس عند هذه النقطة موازيا لحامل محور القواصل معادلته $y = f(x_0)$.
- إذا قبلت f قيمة حدية محلية عند x_0 فإن: $f'(x_0) = 0$

2 نقطة إنعطاف



تعريف

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني البياني

أضف إلى

معلوماتك

إذا إنعدم الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مع تغير الإشارة فإن المنحني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0 .
إذا إنعدم الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 دون تغير الإشارة فإن المنحني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0 .

مبرهنة

مثال

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم عند $x_0 = 0$ ولا تغير إشارتها
إذن النقطة $A(0; f(0))$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f)
الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ مشتقتها الثانية تنعدم عند $x_0 = 1$ وتغير إشارتها.
إذن النقطة $A(0; g(0))$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_g)

حل تمرين 67 صفحة 64 و تمرين 70 صفحة 65

التقويم

ملاحظات حول سير الدرس

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: الاشتقاقية والإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: التقريب التآلفي

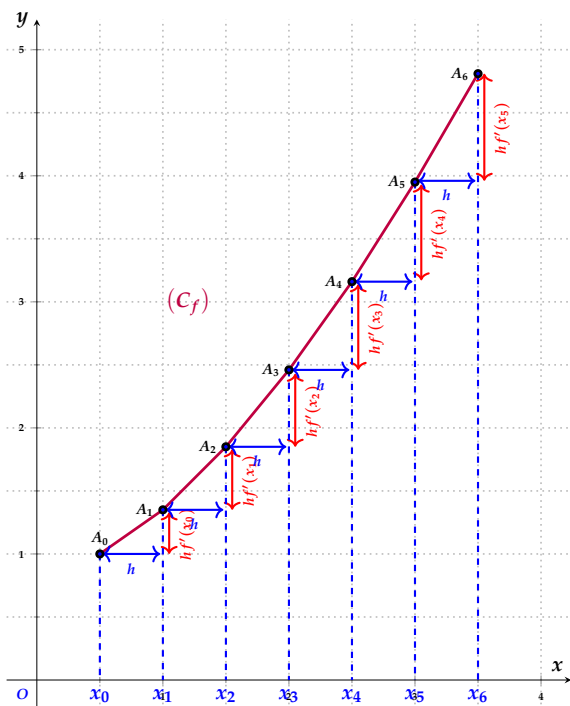
الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 1 ساعة

المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة: توظيف المشتقات لحل مشكلات
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإطلاع	التهيئة النفسية التذكير بأحسن تقريب تآلفي لدالة بجوار عدد الحقيقي x_0. 1 التقريب التآلفي خاصية أضف إلى معلوماتك هـ دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$. إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا: $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ مع $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$. من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ يسمى $f(x+h)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f. البرهان ليكن x_0 من I ولدينا f قابلة للاشتقاق عند x_0 ومنه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ بوضع: $\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ يكون لدينا: $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ إذن: $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \varepsilon(h) + f'(x_0)$ ومنه $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ مثال لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ هـ باستعمال التقريب التآلفي للدالة f لنحسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} للعدد $f(1,0001)$ لدينا: $f'(x) = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ و $f(1) = -\frac{1}{2}$ و $f'(1) = 1$ ومنه $f(1,0001) = f(1+0,0001) \approx f(1) + 0,0001f'(1)$ ومنه $f(1,0001) \approx -0,50$ ملحوظة: نضع $x = x_0 + h$ أحسن تقريب تآلفي للدالة f يصبح كالتالي: $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ مثال أحسن تقريب تآلفي للدالة $\sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي دالة تآلفية $\frac{1}{2}x + 1$ ونكتب: $\sqrt{x+1} \approx \frac{1}{2}x + 1$ بجوار 0	10 د 10 د 5 د



د15



تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0 = f(x_0)$ ، تتركز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا : $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ انطلاقا من النقطة $A_0(x_0; f(x_0))$ ننشئ النقطة $A_1(x_1; f(x_1))$ حيث $x_1 = x_0 + h$ و $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ من أجل h قريب من 0 فإن $A_1(x_1; f(x_1))$ قريبة من C_f منحنى الدالة f بنفس الطريقة يمكن إنشاء انطلاقا من A_1 النقطة $A_2(x_2; f(x_2))$ وهكذا يمكن إنشاء النقطة $A_n(x_n; y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$ ، يربط النقاط $A_0, A_1, A_2, \dots$ نحصل على تمثيل بياني تقريبي للدالة f مرتبط بإختيار h الذي يسمى الخطوة وكلما كانت الخطوة أقرب إلى الصفر نحصل على تمثيل أكثر دقة

الكتابة التفاضلية

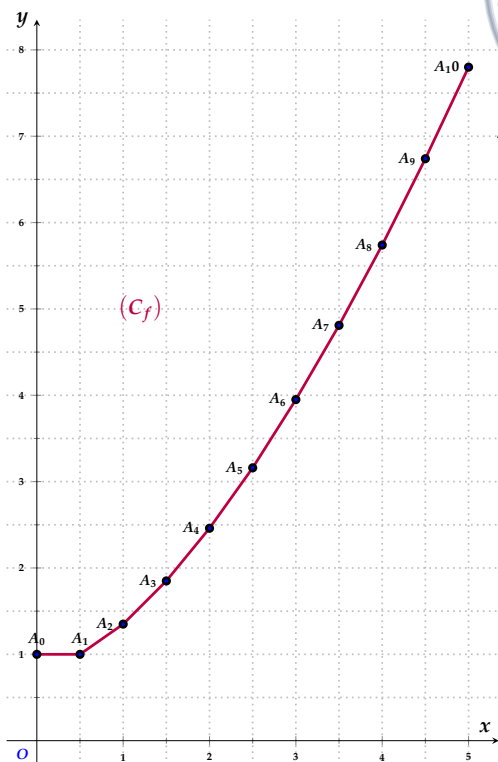
بوضع $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ نكتب المساواة : $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + hg(h)$ كما يلي : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta xg(\Delta x)$ ومنه التقريب التآلفي : $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dx$

يستخدم هذا الترميز في العلوم الفيزيائية وبصفة عامة نكتب $\frac{df}{dx}$ بدلا من f' و $\frac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$

تطبيق

أنشئ منحنى تقريبي بطريقة أولر للدالة f على المجال $[0; 5]$ حيث $f(1) = 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ نختار مثلا الخطوة $h = 0,5$ و نقوم بمسح المجال $[0; 5]$



لتكن $A_0(0;1)$ ولتكن A_1 النقطة ذات الإحداثيات $(0,5; f(0,5))$ أي $(0,5; f(0+0,5))$ لدينا : $f(0,5) \approx f(0+0,5) \approx f(0) + 0,5f'(0) \approx 1 + 0,5(0) \approx 1$ ومنه $A_1(0,5;1)$ لتكن $A_2(0,5+0,5; f(0,5+0,5))$ $f(0,5+0,5) \approx f(0,5) + (0,5)f'(0,5) \approx 1,35$ ومنه : $A_2(1;1,35)$ لتكن $A_3(1,5; f(1,5))$ $f(1,5) = f(1+0,5) \approx f(1) + (0,5)f'(1) \approx 1,85$ ومنه : $A_3(1,5;1,85)$ لتكن $A_4(2; f(2))$ $f(2) = f(1,5+0,5) \approx f(1,5) + (0,5)f'(1,5) \approx 1,85$ ومنه : $A_4(2;2,46)$ لتكن $A_5(2,5; f(2,5))$ $f(2,5) = f(2+0,5) \approx f(2) + (0,5)f'(2) \approx 3,16$ ومنه : $A_5(2,5;3,16)$ لتكن $A_6(3; f(3))$ $f(3) = f(2,5+0,5) \approx f(2,5) + (0,5)f'(2,5) \approx 3,95$ ومنه : $A_6(3;3,95)$



د20

لتكن $A_7(3, 5; 4, 81)$: ومنه $f(3, 5) = f(3 + 0, 5) \approx f(3) + (0, 5)f'(3) \approx 4, 81$ ، $A_7(3, 5; f(3, 5))$
 لتكن $A_8(4; 5, 74)$: ومنه $f(4) = f(3, 5 + 0, 5) \approx f(3, 5) + (0, 5)f'(3, 5) \approx 5, 74$ ، $A_8(4; f(4))$
 لتكن $A_9(4, 5; 6, 74)$: ومنه $f(4, 5) = f(4 + 0, 5) \approx f(4) + (0, 5)f'(4) \approx 6, 74$ ، $A_9(4, 5; f(4, 5))$
 لتكن $A_{10}(5; 7, 81)$: ومنه $f(5) = f(4, 5 + 0, 5) \approx f(4, 5) + (0, 5)f'(4, 5) \approx 7, 81$ ، $A_{10}(5; f(5))$



ملاحظات حول سير الدرس

.....

.....

.....

.....

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

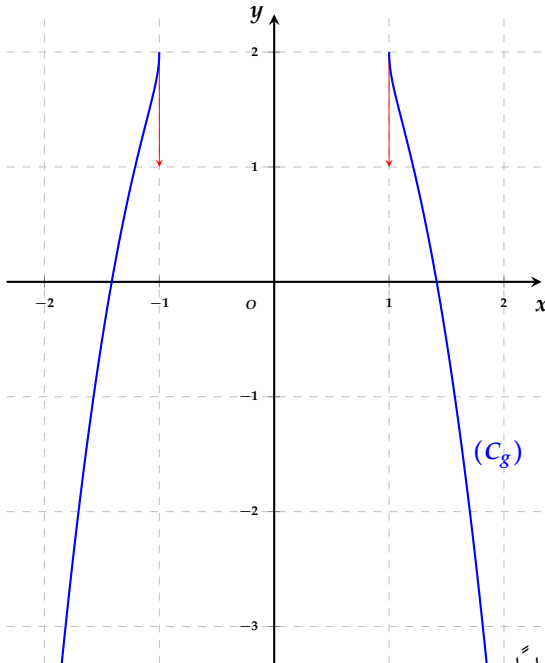
« الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: دراسة دالة

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 2 ساعة

« المكتسبات القبلية: مفاهيم أولية حول الدوال العددية
« الكفاءات المستهدفة: دراسة إتجاه تغير دوال كثير الحدود، ناطقة، الصماء
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

دراسة دالة صماء (60 دق)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $D =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2 - 1}$
• (C_g) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المقابل.

1 أحسب: $g(\sqrt{2})$ و $g(-\sqrt{2})$

2 بقراءة بيانية:

(أ) عيّن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (ب) هل الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟(ج) هل الدالة g قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين؟ برّر.(د) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1

(أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 1 من اليمين وعند القيمة -1 من اليسار. فسّر النتائج بيانياً.(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2 بين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$ 3 أنشئ جدول تغيرات الدالة f .4 بين أن النقطة $I(0, 1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .5 أنشئ (C_f) .

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

1 أدرس تغيرات الدالة g .2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[-1; 0]$.3 عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x .4 بين أن : $\alpha^2 = -3 - \frac{4}{\alpha - 1}$.الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$.
 (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

< أدرس تغيرات الدالة f .2 بين أن : $f(\alpha) = \alpha - \frac{2}{\alpha^2 + 1}$.< استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ باستعمال العدد α .3 عين الأعداد a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

أ) بين أن للمنحنى (C_f) مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة لمؤي
 ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{4(-3x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

< بين أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتيهما .5 أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .< ماذا تستنتج بالنسبة للمماس (T) والمستقيم (Δ) ؟6 أنشئ (C_f) ، (T) ، (Δ) والمستقيمات المقاربة .7 ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد إشارة حلول المعادلة :

$$m(x^2 + 1) + 2 = 0$$

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: دراسة الدوال المثلثية

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 2 ساعة

المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة: توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto a \sin(bx + c)$
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المدة														
مرحلة الإطلاع	التهيئة النفسية التذكير بدوال $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$ و دساتير الجمع ❖ دراسة الدالة $\sin$ و الدالة $\cos$ 1 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لـ f و g على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نقتصر دراسة الدالتين على المجال $[-\pi; \pi]$ 1 اعتمادا على الدائرة المثلثية حدد إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0; \pi]$. 2 (باستعمال دساتير الجمع) • أدرس شفاة الدالتين (فسر النتيجة هندسيا) • أثبت أن f و g دوريتين و دورهما هو 2π 3 أحسب $f'(x)$ و $g'(x)$. 4 إستنتج إتجاه تغير f و g على مجال $[0; \pi]$ ، ثم شكل جدول تغيرات f و g 5 أنشئ (C_f) و (C_g) على مجال $[0; \pi]$ ثم إستنتج الإنشاء على المجال $[-\pi; 0]$ 6 إشرح كيف يتم إنشاء (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$ مناقشة النشاط 1 إشار $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0; \pi]$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>π</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>+</td></tr></table> 2 دراسة شفاة الدالتين • لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos(0) \cos(x) + \sin(0) \sin(x) = 1 \times \cos(x) + 0 \times \sin(x) = \cos(x)$ ومنه $\cos(-x) = \cos(x)$ إذن الدالة $\cos$ دالة زوجية و منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب • لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$ $\sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin(0) \cos(x) - \sin(x) \cos(0) = 0 \times \cos(x) - \sin(x) \times 1 = -\sin(x)$ ومنه $\sin(-x) = -\sin(x)$ إذن الدالة $\sin$ دالة فردية و منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم	x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$g(x)$	+	0	-	x	0	π	$f(x)$	+	+	10د 40د 30د
	x	0	$\frac{\pi}{2}$	π												
$g(x)$	+	0	-													
x	0	π														
$f(x)$	+	+														

- إثبات أن الدالتين f و g دالتين دوريتين
- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) = \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0$
- ومنه $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ إذن الدالة $\cos$ دورية و دورها 2π
- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \sin(2\pi) = \sin(x) \times 1 + \cos(x) \times 0$
- ومنه $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ إذن الدالة $\sin$ دورية و دورها 2π
- 3 • الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث: $f'(x) = \cos(x)$
- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث: $g'(x) = -\sin(x)$
- 4 • إشتتاج أتجاه تغير f و g

• لدينا: $f'(x) > 0$ من أجل $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; \frac{\pi}{2}]$ و متناقصة تماماً على المجال $[\frac{\pi}{2}; \pi]$

• لدينا: $g'(x) < 0$ من أجل $x \in [0; \pi]$ ومنه الدالة g متناقصة تماماً على المجال $[0; \pi]$

جدول التغيرات

x	0	π
$g'(x)$		—
$g(x)$	1	—1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	0	1	0

5 التمثيل البياني

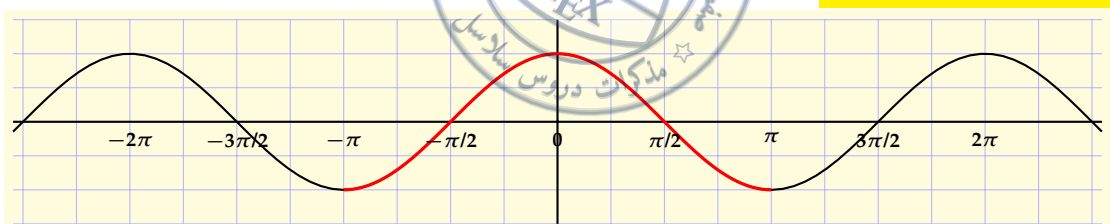
❖ الدالة $\cos$

ننشئ التمثيل البياني للدالة " $\cos$ " على المجال $[0; \pi]$ انطلاقاً من جدول تغيراتها.

نتم هذا الرسم على المجال $[-\pi; 0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب لأن الدالة " $\cos$ " زوجية (الجزء الأحمر)

ومنه نستنتج بيان الدالة $\cos$ على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$



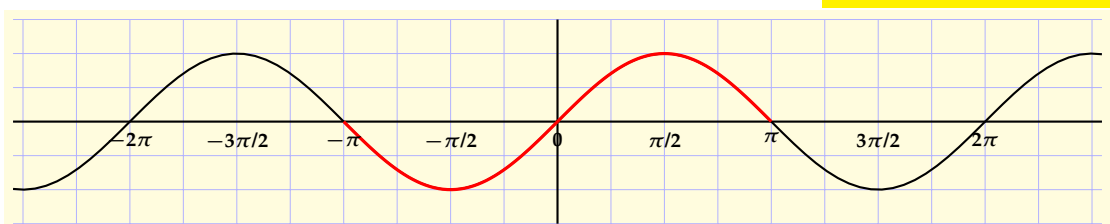
❖ الدالة $\sin$

ننشئ التمثيل البياني للدالة " $\sin$ " على المجال $[0; \pi]$ انطلاقاً من جدول تغيراتها.

نتم هذا الرسم على المجال $[-\pi; 0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة " $\sin$ " فردية (الجزء الأحمر)

ومنه نستنتج بيان الدالة " $\sin$ " على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$





30د

الدالة ظل والتي نرمز إليها بالرمز "tan" معرفة بـ: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ من أجل كل عدد حقيقي x بحيث x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

خواص

① دراسة شفعية الدالة

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

لدينا: $\tan(-x) = -\tan(x)$

ومنه الدالة ظل دالة فردية .

② لنبين أن الدالة دورية و دورها π

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

إذن $\tan$ دالة دورية و دورها π

③ دراسة الدالة الظل

الدالة الظل دورية و دورها π يكفي دراستها على $D_f \cap]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ أي يكفي دراستها على $]0; \frac{\pi}{2}[$

• دراسة الدالة على المجال $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty ; \tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0$$

المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى دالة الظل

• مشتقة الدالة الظل

الدالة الظل قابلة للاشتقاق على $]0; \frac{\pi}{2}[$ ودالتها المشتقة $\tan'(x)$ حيث:

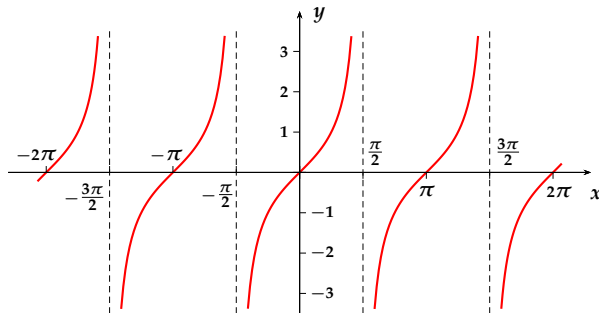
$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - (-\sin(x) \sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ومنه $\tan'(x) > 0$ أي الدالة ظل متزايدة تماما على $]0; \frac{\pi}{2}[$

• جدول تغيرات الدالة الظل

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	+	
$\tan(x)$	0 $\rightarrow$ $+\infty$	

• التمثيل البياني للدالة الظل



تطبيق : حل تمرين 95 صفحة 70

ملامح حول سير الدرس

التقويم



20د

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: الإستقائية والإستمرارية
 ميدان التعلم: التحليل
 موضوع الحصة: دراسة الدوال المثلثية (تابع)

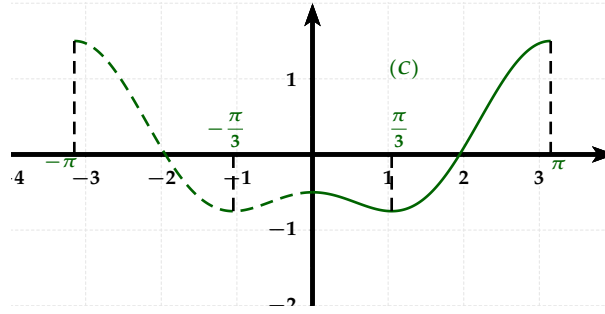
الإستاذ: بخدة أمين
 المستوى: السنة الثالثة رياضيات
 المدة: 1 ساعة

المكتسبات القبلية: حساب مشتقة دوال المألوفة
 الكفاءات المستهدفة: توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto a \sin(bx + c)$
 المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة																											
التقويم	حل تمرين 95 صفحة 70 1 أ) إثبات أن الدالة f دورية دورها 2π. من أجل كل x و $x + 2\pi$ من $\mathbb{R}$ يكون : $\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} \cos 2(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi) \\ &= \frac{1}{2} (2x + 4\pi) - \cos(x + 2\pi) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$ إذن: f دورية ، دورها $T = 2\pi$ ب) إثبات أن محور الترتيب هو محور تناظر: من أجل x و $-x$ من $\mathbb{R}$ يكون : $f(-x) = \frac{1}{2} \cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos x = f(x)$ إذن: الدالة f زوجية وبالتالي (C) يقبل محور تناظر معادلته : $x = 0$	 40د																											
	2 أ) تعين $f'(x)$ f تقبل الإستقاق على $\mathbb{R}$ ويكون $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x)$ ب) لدينا: $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)(1 - 2\cos(x))$ ج) دراسة إشارة $f'(x)$ على $[0; \pi]$ $f'(x) = 0$ تكافئ : $\sin x = 0$ أو $\cos x = \frac{1}{2}$ أو $x = k\pi$ أو $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3})$ ومنه $x \in \{0; \frac{\pi}{3}; \pi\}$ <table><tr><th>x</th><th>0</th><th>$\frac{\pi}{3}$</th><th>π</th></tr><tr><th>$1 - 2\cos x$</th><td>1</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><th>$\sin x$</th><td>0</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><th>$f'(x)$</th><td>0</td><td>-</td><td>+</td></tr></table> • جدول التغيرات <table><tr><th>x</th><th>0</th><th>$\frac{\pi}{3}$</th><th>π</th></tr><tr><th>$f'(x)$</th><td>0</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><th>$f(x)$</th><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td></tr></table>	x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$1 - 2\cos x$	1	0	+	$\sin x$	0	+	+	$f'(x)$	0	-	+	x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$f'(x)$	0	-	+	$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x	0	$\frac{\pi}{3}$	π																										
$1 - 2\cos x$	1	0	+																										
$\sin x$	0	+	+																										
$f'(x)$	0	-	+																										
x	0	$\frac{\pi}{3}$	π																										
$f'(x)$	0	-	+																										
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$																										

4 • رسم المنحنى على $[-\pi; \pi]$

نرسم (C) على المجال $[0; \pi]$ ثم نأخذ نظيره بالنسبة لمحور الترتيب على المجال $[-\pi; 0]$



يمكن رسم (C) على R وذلك بإستعمال الإنسحاب الذي شعاعه $k\pi \vec{i}$.

حل تمرين رقم 63

إثبات أن التسارع متناسب مع فاصلة المتحرك عند اللحظة t .

لدينا: $x(t) = 3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ حيث $t \in [0; +\infty[$

فتكون السرعة اللحظية عند t هي: $x'(t) = 3 \left[-2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -6 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

والتسارع هو: $x''(t) = -6 \left[2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -12 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

النتيجة: $x''(t) = -4 \left[3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -4x(t)$ أي أن تسارع المتحرك يكون متناسبا مع فاصلة المتحرك.

ملاحظات حول سير الدرس

