

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين  
الموضوع الأول

التمرين الأول : (06 ن)

- $a$  ،  $b$  و  $C$  أعداد طبيعية حيث :  $a \equiv -3[7]$  ،  $b \equiv 1441$  و  $C \equiv 1962[7]$
- (1) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد  $a$  ،  $b$  و  $C$  على 7
  - (2) أ) تحقق أن  $b \equiv -1[7]$   
ب) ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد  $2b + C - 2$  على  $7$
  - (3) بين أن العدد  $2b + C$  يقبل القسمة على 7
  - (4) أ) عين باقي قسمة كل من الأعداد 2 ،  $2^2$  ،  $2^3$  على 7  
ب) استنتج أن  $2^{3k+1} \equiv 2[7]$  حيث  $k$  عدد طبيعي غير معدوم
  - (ج) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  حيث  $2^n - C^3 \equiv b^{2n}[7]$
- التمرين الثاني: (06 ن)

- $(U_n)$  متتالية حسابية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $U_0 = 5$  و  $U_2 + U_4 = 28$
1. عين الأساس  $r$
  2. أكتب عبارة الحد العام  $U_n$  بدلالة  $n$ . ثم استنتج قيمة  $U_{15}$
  3. عين قيمة  $n$  حتى يكون  $U_n = 2015$ .
  4. أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S$  حيث :  $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .
  5. أـ د سب المجموع  $A = 50 + 53 + 56 + \dots + 2015$

التمرين الثالث: (08 ن)

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$  و  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  ،  
 $(C_f)$  تمثيلها البياني حيث :  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 1$
- (1) عين قيمة العدد الحقيقي  $a$  علما أن المنحنى  $(C_f)$  يشمل النقطة  $N(1;0)$
  - (2) نعتبر  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$   
أ) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .  
ب) أحسب  $f'(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و أنشئ جدول تغيراتها
  - (3) بين أن النقطة  $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$
  - (4) أكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة -1
  - (5) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $f(x) = (2x + 1)(x - 1)^2$   
ب) عين نقطتي تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل.  
ج) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$
  - هـ) أنشئ المستقيم ذا المعادلة  $y = 5$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  بيانيا المترابحة :  $f(x) \leq 5$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول : (6ن)

عين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل:

(1) العددان 2016 و 1436 متوافقان بترديد :

(أ) 7 (ب) 5 (ج) 9

(2) ليكن  $k$  عدد طبيعي غير معدوم ، الأعداد الطبيعية  $n$  التي تحقق  $[7] n \equiv 2013$  هي :

(أ)  $n = 7k + 2$  (ب)  $n = 7k + 1$  (ج)  $n = 7k + 4$

(3) باقي القسمة الإقليدية للعدد  $77^{21}$  على 13 هو:

(أ) 12 (ب) -1 (ج) 3

(4)  $(U_n)$  متتالية حسابية معرفة على  $N$  حيث  $U_3 = 15$  و  $U_6 - 2U_2 = 5$  فإن أساسها  $r$  يساوي :

(أ)  $r = 2$  (ب)  $r = 3$  (ج)  $r = 4$

(5)  $(U_n)$  متتالية هندسية معرفة على  $N$  حيث  $U_3 = 128$  و  $U_5 = 2048$  فإن قيمة الحد الخامس هي:

(أ) 384 (ب) 2048 (ج) 512

### التمرين الثالث : (6ن)

$(u_n)$  متتالية معرفة بعدها الأول  $u_1 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $N^*$  :  $u_{n+1} = 3u_n + 8$

(1) أحسب  $u_2$  ,  $u_3$

(2) نعرف المتتالية  $(v_n)$  على  $N^*$  كما يلي:  $v_n = u_n + 4$

- أثبت أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_1$

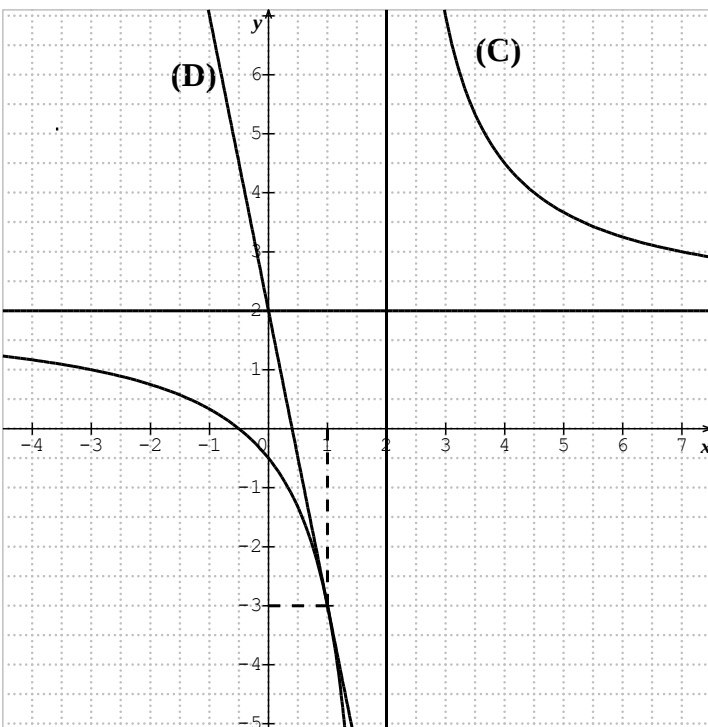
(3) أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$

(4) عين  $n$  بحيث:  $u_n = 239$

(5) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

### التمرين الثالث: (8ن)

المنحني (C) المرسوم في الشكل المقابل هو لدالة  $f$  معرفة على المجالين  $]2, +\infty[$  ،  $]-\infty, 2[$



والمماس (D) لـ (C) في النقطة ذات الفاصلة 1

1- خمن نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  ،  $-\infty$

2- بقراءة بيانية عين اتجاه تغير الدالة  $f$  على كل

من المجالين  $]2, +\infty[$  ،  $]-\infty, 2[$

ثم شكل جدول تغيراتها

3- من بين العبارات التالية

(أ)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  (ب)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

(ج)  $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

عين العبارة المناسبة للدالة  $f$  مع التبرير

4- أدرس تغيرات الدالة  $f$

5- عين معادلة المستقيم (D)

6- عين نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل

7- حل بيانيا المتراجحة  $f(x) > 0$

**تصحيحات 1:**

$$C \equiv 1962[7] \quad \text{و} \quad b = 1441 \quad \text{و} \quad a \equiv -3[7]$$

1/ **تعيين باقي قسمة  $a$  ،  $b$  و  $C$  على 7 :**

$$a \equiv -3[7] \quad \text{إذن} \quad a \equiv -3 + 7[7] \quad \text{ومنه} \quad a \equiv 4[7]$$

باقي قسمة  $a$  على 7 هو : 4

$$b \equiv 6[7] \quad \text{إذن} \quad 1441 = 7 \times 205 + 6 \quad \text{ومنه} \quad b \equiv 6[7]$$

باقي قسمة  $b$  على 7 هو : 6

$$C \equiv 2[7] \quad \text{إذن} \quad 1962 = 7 \times 280 + 2 \quad \text{ومنه} \quad C \equiv 2[7]$$

باقي قسمة  $C$  على 7 هو : 2

2(أ) **التحقق أن  $b \equiv -1[7]$  :**

$$b \equiv 6[7] \quad \text{إذن} \quad b \equiv 6 - 7[7] \quad \text{ومنه} \quad b \equiv -1[7]$$

ب) **باقي قسمة  $2 - b^{2016} + b^{2017}$  على 7 :**

$$b^{2016} + b^{2017} - 2 \equiv (-1)^{2016} + (-1)^{2017} - 2[7]$$

$$b^{2016} + b^{2017} - 2 \equiv 1 - 1 - 2[7]$$

$$b^{2016} + b^{2017} - 2 \equiv -2[7]$$

إذن

$$b^{2016} + b^{2017} - 2 \equiv -2 + 7[7]$$

$$b^{2016} + b^{2017} - 2 \equiv 5[7]$$

باقي قسمة  $2 - b^{2016} + b^{2017}$  على 7 هو : 5

3(إثبات أن  $2b + C$  يقبل القسمة على 7 :

$$2b + C \equiv 14[7] \quad \text{إذن} \quad 2b + C \equiv 2(6) + 2[7]$$

$$2b + C \equiv 0[7] \quad \text{ومنه} \quad 14 \equiv 0[7] \quad \text{إذن} \quad 14 = 7 \times 2 + 0$$

باقي قسمة  $2b + C$  على 7 هو 0 إذن يقبل القسمة على 7

4(أ) **تعيين باقي قسمة 2 ،  $2^2$  و  $2^3$  على 7 :**

$$2 \equiv 2[7] \quad \text{باقي قسمة 2 على 7 هو : 2}$$

$$2^2 \equiv 4[7] \quad \text{باقي قسمة } 2^2 \text{ على 7 هو : 4}$$

$$2^3 \equiv 8[7] \quad \text{و} \quad 8 = 7 \times 1 + 1$$

ومنه  $2^3 \equiv 1[7]$  باقي قسمة  $2^3$  على 7 هو : 1

ب) **استنتاج أن  $2^{3k+1} \equiv 2[7]$**

$$2^3 \equiv 1[7] \quad \text{نجد} \quad (2^3)^k \equiv (1)^k[7] \quad \text{ومنه} \quad 2^{3k} \equiv 1[7]$$

$$2^{3k} \times 2 \equiv 2 \times 1[7] \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} 2 \equiv 2[7] \\ 2^{3k} \equiv 1[7] \end{cases}$$

$$2^{3k+1} \equiv 2[7] \quad \text{نجد}$$

ج) **تعيين قيم  $n$  حيث :**

$$2^n - C^3 \equiv b^{2n}[7]$$

$$2^n - 2^3 \equiv (-1)^{2n}[7] \quad \text{لدينا}$$

$$2^n - 8 \equiv 1[7]$$

$$2^n \equiv 9[7]$$

$$2^n \equiv 2[7] \quad \text{إذن} \quad 9 = 7 \times 1 + 2$$

$$n = 3k + 1 \quad \text{حسب السؤال السابق}$$

**تصحيحات 2 :  $(u_n)$  متتالية حسابية معرفة على  $N$**

$$(1) \dots u_2 + u_4 = 28 \quad \text{و} \quad u_0 = 5 \quad \text{حيث :}$$

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{لدينا :}$$

$$u_2 = u_0 + 2r = 5 + 2r \quad \text{إذن :}$$

$$u_4 = u_0 + 4r = 5 + 4r$$

$$5 + 2r + 5 + 4r = 28 \quad \text{نعوض في العلاقة (1) نجد :}$$

$$6r = 18 \quad \text{نجد} \quad 6r + 10 = 28$$

$$r = \frac{18}{6} \quad \text{نجد} \quad \text{ومنه} \quad r = 3$$

2( **كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :**

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = 5 + 3n$$

$$u_{15} = 5 + 3(15) = 5 + 45 \quad \text{حساب :} \quad u_{15}$$

$$u_{15} = 50$$

3( **تعيين  $n$  حيث :**

$$u_n = 2015$$

$$5 + 3n = 2015$$

$$3n = 2010$$

$$n = \frac{2010}{3} \quad \text{ومنه} \quad n = 670 \quad \text{إذن} \quad u_{670} = 2015$$

4( **حساب  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  :**

$$S = \frac{n-0+1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$S = \frac{n+1}{2} (5 + 5 + 3n)$$

$$S = \frac{n+1}{2} (10 + 3n)$$

5( **حساب  $A = 50 + 53 + \dots + 2015$  :**

$$u_{670} = 2015 \quad \text{و} \quad u_{15} = 50 \quad \text{لدينا :}$$

$$A = u_{15} + u_{16} + \dots + u_{670} \quad \text{ومنه}$$

$$A = \frac{670-15+1}{2} (u_{15} + u_{670})$$

$$S = 328(2065) \quad \text{ومنه} \quad S = \frac{656}{2} (50 + 2015)$$

$$S = 677320$$

#### 4) معادلة المماس (Δ) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة -1

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$y = 12(x+1) - 4$$

$$y = 12x + 12 - 4$$

$$y = 12x + 8$$

$$f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(-1)$$

$$f'(-1) = 12$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 1$$

$$f(-1) = -4$$

#### 5) إثبات أن : $f(x) = (2x+1)(x-1)^2$

$$\begin{aligned} (2x+1)(x-1)^2 &= (2x+1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

#### \* تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل: نحل $f(x) = 0$

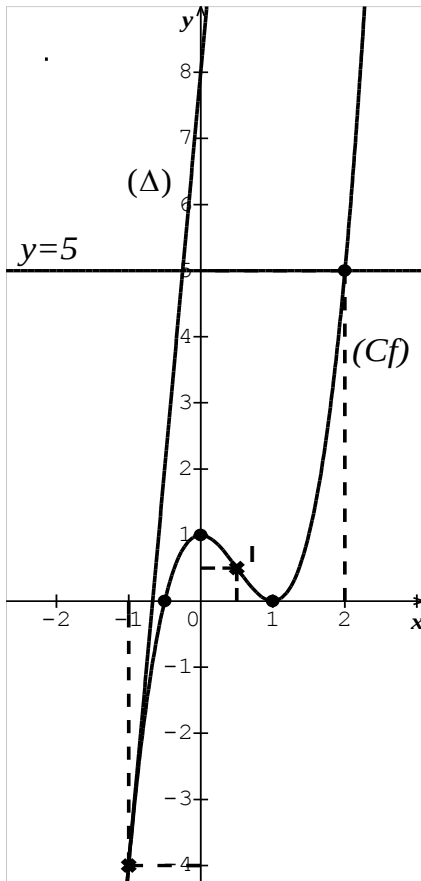
$$(2x+1)(x-1)^2 = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{أو} \quad 2x+1=0 \quad \text{إذن}$$

$$x=1 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-1}{2} = -0.5 \quad \text{ومنه}$$

$(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين احداثيهما:

$$(1,0) \quad \text{و} \quad (-0,5;0)$$



#### رسم $(C_f)$ و $(\Delta)$

لرسم  $(\Delta)$

$$y = 12x + 8$$

نعين نقطتين

|   |    |   |
|---|----|---|
| x | -1 | 0 |
| y | -4 | 8 |

(ب) الحل البياني

للمراجعة

$$f(x) \leq 5$$

نعين المجال التي يكون

فيه  $(C_f)$  تحت

المستقيم  $y = 5$

$$S = ]-\infty; 2]$$

#### حل تمرين 03 :

1) حساب  $a$ :  $(C_f)$  يشمل  $N(1,0)$  معناه  $f(1) = 0$

$$a = -3 \quad \text{ومنه} \quad 3 + a = 0 \quad \text{نجد} \quad 2(1)^3 + a(1)^2 + 1 = 0$$

2) (أ) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

#### ب دراسة اتجاه تغير $f$ :

حساب المشتق:  $f'(x) = 6x^2 - 6x$

إشارة المشتق:  $f'(x) = 0$

$$6x(x-1) = 0 \quad \text{ومنه} \quad 6x^2 - 6x = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{أو} \quad 6x=0$$

$$x=1$$

$$x=0$$

|            |           |          |          |           |          |
|------------|-----------|----------|----------|-----------|----------|
| $x$        | $-\infty$ | <b>0</b> | <b>1</b> | $+\infty$ |          |
| $f'$ إشارة | <b>+</b>  | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>0</b>  | <b>+</b> |

$f$  متزايدة على  $[1; +\infty[$  و  $]-\infty; 0]$  ومتناقصة على  $[0; 1]$

#### جدول التغيرات:

|         |           |          |          |           |          |
|---------|-----------|----------|----------|-----------|----------|
| $x$     | $-\infty$ | <b>0</b> | <b>1</b> | $+\infty$ |          |
| $f'(x)$ | <b>+</b>  | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>0</b>  | <b>+</b> |
| $f(x)$  | $-\infty$ | <b>1</b> | <b>0</b> | $+\infty$ |          |

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

#### 3) إثبت أن $I(0,5;0,5)$ نقطة إنعطاف:

لدينا  $f''(x) = 12x - 6$  ومنه  $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$$12x - 6 = 0 \quad \text{نجد} \quad 12x = 6 \quad \text{إذن} \quad x = \frac{6}{12} \quad \text{ومنه} \quad x = \frac{1}{2}$$

إشارة المشتق الثاني  $f''$

|                          |           |               |           |
|--------------------------|-----------|---------------|-----------|
| x                        | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f''(x) = 12x - 6$ إشارة | -         | 0             | +         |

$f''$  تتعدم عند  $\frac{1}{2}$  مغيرة إشارتها و

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{2}{8} - \frac{3}{4} + 1 = 0.5$$

$I(0,5;0,5)$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$