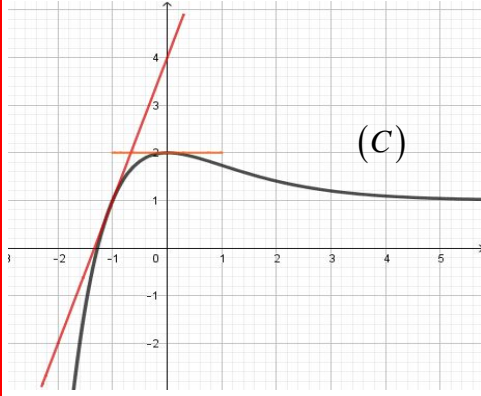


الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

مسألة

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. المنحنى (C) في الشكل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ حيث a ؛ b عدنان حقيقيان .



① أ - بقراءة بيانية عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النهاية الأخيرة بيانياً.

ب - عين كلا من $f(0)$ ؛ $f(-1)$ ؛ $f'(0)$ ؛ $f'(-1)$.

ج - اعتماداً على ما سبق جد قيمة كل من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$.

② أ / بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1,4 < \alpha < -1,2$.

ب / استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

③ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$

- احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسياً . (نقبل أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$)

(II) نضع فيما يلي : $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$

(C_g) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$

① أ / احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب / بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

② أ / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x) = f(x)$

ب / استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

③ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1 .

④ بين أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$ ثم استنتج حصراً للعدد $g(\alpha)$.

⑤ أ / احسب $g(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) ؛ (T) والمنحنى (C_g) .

ب / m وسيط حقيقي . ناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$. بالتوفيق

(1) معرفة f على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ (أ) - بقراءة بيانية تعيين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم تفسير النهاية الأخيرة بيانيا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \bullet$$

تفسير النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ بيانيا : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل بجوار $(+\infty)$.ب - تعيين كلا من $f(0)$ ؛ $f(-1)$ ؛ $f'(0)$ ؛ $f'(-1)$:

$$f(0) = 2 \quad \bullet \quad f(-1) = 1 \quad \bullet$$

- $f'(0)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 والموازي لحامل محور الفواصل وعليه : $f'(0) = 0$.
- $f'(-1)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 وبما أن $(0; 4)$ و $(-2; -2)$ هما إحداثيات نقطتين منه فإن :

$$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{0 - (-2)} = 3$$

ج - اعتمادا على ما سبق إيجاد قيمة كل من a و b ثم استنتاج عبارة $f(x)$:

$$\text{لدينا } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} (a(0)+b)e^0 + 1 = 2 \\ (a(-1)+b)e^1 + 1 = 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} b+1 = 2 \\ (-a+b)e+1 = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b = 1 \\ (-a+1)e = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه } f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$$

(2) أ / تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4 < \alpha < -1,2$:

- f مستمرة على $]-1,4; -1,2[$.
- $f(-1,4) \times f(-1,2) < 0$ ؛ $f(-1,4) = -0,62$ ؛ $f(-1,2) = 0,33$ ؛
- f رتيبة على $]-1,4; -1,2[$ (متزايدة تماما).
- ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4 < \alpha < -1,2$.

ب / استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

(3) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$

- حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^{-x} + e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(-x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-xe^{-x} + e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cancel{x}e^{-x}}{\cancel{x}} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -2$$

التفسير الهندسي :

- الدالة h لاتقبل الاشتقاق في النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل نصف مماس على يمين الصفر معامل توجيهه 0 ويقبل نصف مماس على يسار الصفر معامل توجيهه -2.

(II) $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ ؛ g معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$

① / حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x} \right) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = +\infty$

ب / تبين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x+2}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى g بجوار $(+\infty)$.

② / تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x) = f(x)$

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$g'(x) = \left(x - \frac{x+2}{e^x} \right)' = (x - (x+2)e^{-x})' = 1 - (e^{-x} - (x+2)e^{-x}) = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 - (-x-1)e^{-x}$

ومنه $g'(x) = 1 + (x+1)e^{-x} = f(x)$

ب / استنتاج اتجاه تغير الدالة g ثم إنشاء جدول تغيراتها :

لدينا $g'(x) = f(x)$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $f(x)$

• $g'(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ ومنه $x = \alpha$.

• $g'(x) < 0$ تكافئ $f(x) < 0$ ومنه $x \in]-\infty; \alpha[$ ومنه g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$.

• $g'(x) > 0$ تكافئ $f(x) > 0$ ومنه $x \in]\alpha; +\infty[$ ومنه g متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

③ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1 :

$(\Delta): y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$

لدينا $g(-1) = -1 - e$ و $g'(-1) = f(-1) = 1$

ومنه $(\Delta): y = 1(x+1) - 1 - e$

ومنه $(\Delta): y = x - e$

④ تبين أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$ ثم استنتاج حصر للعدد $g(\alpha)$:

لدينا $g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2)e^{-\alpha}$

ولدينا $f(\alpha) = 0$ تكافئ $(\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0$ ومنه $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 1}$

وبالتعويض بقيمة $e^{-\alpha}$ في عبارة $g(\alpha)$ نجد :

$$g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2) \frac{-1}{\alpha + 1}$$

$$= \alpha + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

$$= \alpha + \frac{(\alpha + 1) + 1}{\alpha + 1}$$

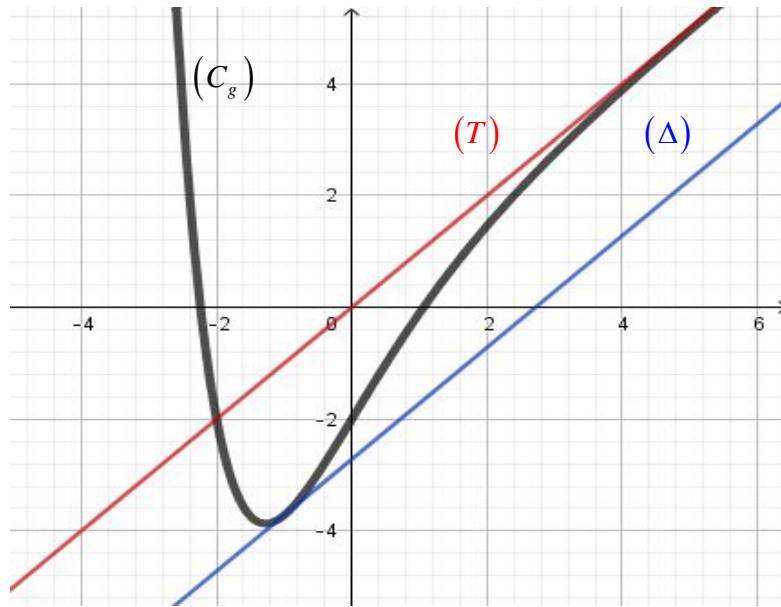
$$= \alpha + \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$$

٥ / أ / حساب $g(0)$ ثم إنشاء كلا من (Δ) ؛ (T) والمنحنى (C_g) :

$$g(0) = -2 \bullet$$

• الإنشاء :



ب / المناقشة حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$

حلول المعادلة $g(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ والموازي للمستقيمين (Δ) و (T) .

- من أجل $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل $m = -e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما .
- من أجل $m \in]-e; -2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل $m = -2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب والآخر معدوم .
- من أجل $m \in]-2; 0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل $m \in [0; +\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب تماما .

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا 2019