

التحضير الجيد لبكالوريا 2021

الأستاذ: ميزان محمد

3As

100 تمرين في
المتتاليات العددية
لجميع الشعب العلمية

f : Meziane Maths

@ : Meziane Maths

▶ : Meziane Maths

✉ : meziane.probastat@gmail.com

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021

www.dzexams.com

المجلة الشاملة في المتتاليات العددية

- (I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$.
- (1) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال I .
 - (2) شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - إستنتج من أجل كل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$.
 - (3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ طول الوحدة $2cm$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .
أرسم (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ في المجال I .
- (II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.
- (1) بإستعمال المنحنى (C_f) و (Δ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل مع إظهار خطوات الإنشاء.
 - (2) ضع تخميناً حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .
 - (3) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 < u_n < 2$.
 - (4) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم تقاربها ؟
 - (5) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < 2 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(2 - u_n)$.
 - (6) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < 2 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
 - (7) إستنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

Meziane Maths -2- تمرين رقم

- (1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; \sqrt{6}]$ حيث : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-x^2}}$.
- أ) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; \sqrt{6}]$.
- ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.
- أ) أحسب u_1, u_2, u_3 ثم ضع تخميناً حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .
- ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
- ج) أثبت أن (u_n) متزايدة .
- د) إستنتج أن (u_n) متقاربة مع تحديد نهايتها.
- (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.
- أ) برهن أن (v_n) متتالية حساسية مع تحديد أساسها و حدها الأول .
- ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية (v_n) .
- ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
- د) هل توجد قيمة طبيعية ل n حتى يكون $S_n = 2021$.
- (4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $w_n = e^{v_n}$.
- أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.
- ب) أحسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$.
- ج) من أية رتبة ل n يكون $P_n \leq 2021$.

Meziane Maths -3- تمرين رقم

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = \sqrt{e^{-1} \cdot u_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$.
- (1) أحسب كل من u_2 و u_3 .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$.
- أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول .
- ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$.

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ثم إستنتج تقارب (u_n) .

3) أحسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$.

4) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $t_n = \ln(v_n)$.

أ) حدد طبيعة المتتالية (t_n) .

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$.

تمارين رقم -4- : Meziane Maths

1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول v_0 و أساسها q حيث : $\begin{cases} \ln v_0 + \ln v_2 = 2 \ln 2 \\ e^{-6}(e^{v_0} \times e^{v_1}) = 1 \end{cases}$

أ) أحسب v_1 و v_0 ثم إستنتج قيمة الأساس q .

ب) نضع : $v_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$, عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{9u_n + 10} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq u_n \leq 10$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أنها متقاربة.

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $10 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - u_n)$.

د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0 \leq 10 - u_n \leq v_n$.

هـ) إستنتج نهاية u_n .

تمارين رقم -5- : Meziane Maths

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 4$.

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$, ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

ب) حدد v_n ثم u_n بدلالة n .

ج) إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $S'_n = \frac{2}{u_0 - 2} + \frac{2}{u_1 - 2} + \dots + \frac{2}{u_n - 2}$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمارين رقم -6- : Meziane Maths

1) (u_n) متتالية عددية معرفة بمحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$

أ) برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$ فإن : $u_n \geq 0$.

ب) إستنتج انه من أجل $n \geq 4$ فإن : $u_n \geq n - 2$.

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2) نعرف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = 4u_n - 8n + 24$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

ج) تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = X_n + Y_n$ حيث (X_n) متتالية هندسية و (Y_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس و الحد الأول لكل منهما.

د) إستنتج بدلالة n عبارة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$.
- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n \cdot u_n$.
- (1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.
 - (ب) أكتب v_n بدلالة n .
 - (2) بين أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 5 .
 - (ب) أكتب w_n بدلالة n .
 - (3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
ب) عين u_n بدلالة n .
 - (4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.
ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.
 - (ج) إستنتج نهاية u_n .

- (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ و $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- (1) أ) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$, ثم برهن انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن : $v_n > \frac{1}{2}$.
ب) عين أصغر عدد طبيعي α حيث إذا كان $n \geq \alpha$ فإن : $v_n < \frac{3}{4}$, ثم إستنتج أنه إذا كان $n \geq \alpha$ فإن : $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.
 - (2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 5 المتتالية (S_n) حيث : $S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_n$.
أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5 : $S_n \leq u_5 \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \right]$.
 - (ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 5 : $S_n \leq 4u_5$.
 - (3) بين أن المتتالية (S_n) متزايدة ثم إستنتج انها متقاربة .

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.
- (1) أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geq 3$ فإن : $u_n > 0$.
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geq 4$ فإن : $u_{n+1} > 3n - 4$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 9n + 30$.
أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ مع تحديد حدها الأول .
ب) عبر عن v_n بدلالة n .
 - (ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = 9 \left[3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n - \frac{10}{3} \right]$, ثم إستنتج نهاية (u_n) من جديد .
 - (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.
- (1) أ) عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$.
ب) برهن بالتراجع من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.
 - (ج) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم إستنتج أنها متقاربة .
 - (2) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و تحديد حدها الأول .

- (ب) عبر عن v_n بدلالة n من أجل $n \in \mathbb{N}$.
- (ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n = \frac{n+8}{n+4}$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و ماذا تستنتج ؟
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = e^{\frac{4}{4}} + e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{6}{4}} + \dots + e^{\frac{n+4}{4}}$ أحسب S_n بدلالة n

Meziane Maths -11- تمرين رقم

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

- (1) أحسب u_1 و u_2 .
- (2) بين بالتراجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.
- (3) أ) بين أن : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم إستنتج أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.
- (ب) أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.
- أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.
- (ب) حدد v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n .
- (5) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
- (ب) إستنتج بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \frac{1}{2u_0 + 3} + \frac{1}{2u_1 + 3} + \dots + \frac{1}{2u_n + 3}$.

Meziane Maths -12- تمرين رقم

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

- (1) بين أن $u_n < 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.
- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$.
- أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2.
- (ب) أكتب v_n بدلالة n وإستنتج u_n بدلالة n .
- (ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .
- (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{1}{u_n - 2}$.

Meziane Maths -13- تمرين رقم

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3^n}{3!}$.

- (1) بين أن المتتالية (u_n) حدودها موجبة تماماً.
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- أ) عبر عن v_n بدلالة n .
- (ب) بين من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geq 3$ فإن : $v_n \leq \frac{3}{4}$.
- (ج) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) من أجل $n \geq 3$.
- (3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geq 3$ فإن : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \cdot u_3$.
- (ب) أحسب u_3 و بين أنه مهما كان $n \geq 3$ فإن : $0 < u_n \leq \frac{32}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
- (ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) و ماذا تستنتج ؟
- (4) نعتبر الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.
- أ) أحسب بدلالة n الجداء P_n .
- (ب) إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Meziane Maths -14- تمرين رقم

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث حدها الأول $u_0 = 5$ وأساسها $r = 4$.

(1) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(2) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(3) إذا كان مجموع سبعة حدود متعاقبة من المتتالية (u_n) هو 1995 فما هو الحد الأول من هذه الحدود.

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = (2n+1)2^{u_n}$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{n!2^n}$.

(ب) إستنتج بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

تمرين رقم -15- : Meziane Maths

لتكن المتتالية العددية (u_n) $_{n \in \mathbb{N}}$ والمعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ 3u_{n+1} = 2u_n - 6n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) أحسب كل من u_1 و u_2 .

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ مع α و β عددين حقيقيين.

(أ) عين α و β علما أن : $\begin{cases} v_0 = -20 \\ v_1 = -\frac{40}{3} \end{cases}$

(ب) من أجل α و β المحصل عليهما في السؤال السابق ، بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

(ج) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة u_n .

(3) (أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

(ب) إستنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(4) عين قيمة n الطبيعية حتى يكون $S'_n - S_n = 169$.

تمرين رقم -16- : Meziane Maths

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \frac{eu_n + 1}{u_n + e} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + e}$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq e$.

(3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = (\frac{e-1}{e+1})^{n+1}$.

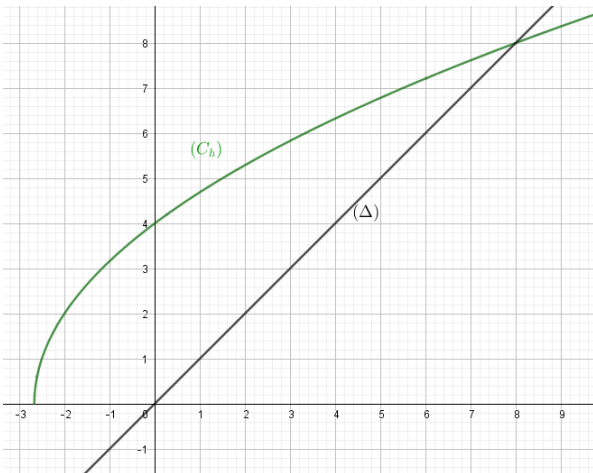
(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، برر لماذا (v_n) متقاربة ؟

(ب) أحسب بدلالة n المجموع : $T_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2021}$

(ج) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(د) أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2021} + 1}$ ، ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمرين رقم -17- : Meziane Maths



(v_n) $_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\ln v_2 - \ln v_3 = \ln 2$ و $\ln \sqrt[3]{v_6} + \ln v_2 = 0$.

(1) عين أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول v_0 ثم أكتب v_n بدلالة n وأدرس تقاربها.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$. لتكن الدالة h المعرفة على المجال $[-\frac{8}{3}; +\infty[$ كما يلي :

$h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C_h) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل).

- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها .
- (3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 8$ ثم إستنتج اتجاه تغير (u_n) و تقاربها .
- (4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : \frac{1}{2}(8 - u_n) < 8 - u_{n+1} < 0$.
- ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < 8 - u_n \leq v_n$, ثم إستنتج نهاية u_n

تمرين رقم -18- Meziane Maths

- (1) (u_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$.
- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 < u_n < 1$.
- ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما , ثم إستنتج انها متقاربة .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n(v_n + 1)$.
- أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .
- ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n = \frac{1}{2^n + 1}$, ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
- أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, S'_n = 2 - v_n$, ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1}$, ثم أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq v_n$.
- ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, \frac{1}{2}S_n \leq S_n \leq S'_n$, ثم عين حصر ل $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمرين رقم -19- Meziane Maths

- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث : $\begin{cases} u_0 \in]0; 1[\\ u_{n+1} = \frac{1}{\pi}u_n + \frac{\pi - 1}{\pi} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$
- (1) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 \leq u_n \leq 1$.
- (2) بين أن (u_n) متزايدة تماما , مستنتجا أنها متقاربة .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $\begin{cases} v_0 = \frac{2\pi - 1}{2\pi} \\ v_n = u_n - 1 \end{cases}$
- أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{\pi}$.
- ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n = 1 + \frac{1}{\pi^n} - \frac{1}{2\pi^{n+1}}$.
- (4) إستنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (5) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, أحسب S_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمرين رقم -20- Meziane Maths

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$
- (1) أ) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4 .
- ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (2) أ) أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n \leq n + 3$.
- ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ثم أثبت صحة التخمين .
- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - n$.
- أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول .
- ب) أوجد عبارة v_n ثم عبارة u_n بدلالة n .
- ج) أحسب نهاية u_n لما $n \rightarrow +\infty$.
- (4) أ) أوجد عبارة S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- ب) نضع : $T_n = \frac{S_n}{n^2}$ أوجد نهاية المتتالية (T_n) .

تمرين رقم -21- Meziane Maths

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

- (1) أ) تحقق من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4}$
- ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$.
- ج) تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 2)(1 - u_n)}{u_n + 4}$ مستنتجا أن (u_n) متزايدة تماما.
- د) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة.
- (2) نعتبر المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
- أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.
- ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$
- ج) إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$

تمرين رقم -22- : Meziane Maths

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$
- (1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 2 \leq u_n \leq 4$
 - (2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .
 - (3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$
 - (4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم -23- : Meziane Maths

- (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 بحيث : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$
- (1) برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -1 \leq u_n \leq 0$.
 - (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .
 - (3) (v_n) متتالية معرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$
 - أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية ، عين أساسها و حدها الأول.
 - ب) عين v_n ثم u_n بدلالة n ; استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة.
 - (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ و $T_n = e^{\frac{u_0}{u_0+1}} \times e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times \dots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$ عين S_n و T_n بدلالة n ; هل المتتالية (T_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

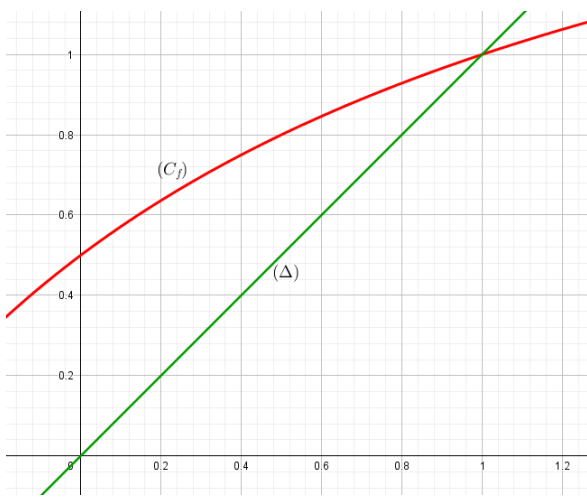
تمرين رقم -24- : Meziane Maths

- لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$
- (1) أ) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$
 - ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -2 < u_n < 1$
 - (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .
 - (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$
 - أ) بين أن المتتالية v_n هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 - ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 - (4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$

- لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين معرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{v_n + 2u_n}{3} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n + u_n}{3} \end{cases}$
- (1) من أجل كل عدد طبيعي n , نعرف المتتالية العددية (L_n) بحيث : $L_n = u_n - v_n$.
 (أ) أثبت أن المتتالية (L_n) هندسية و عين أساسها و حدها الأول .
 (ب) أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n , هل المتتالية (L_n) متقاربة
 (2) أدرس إتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
 - (3) إستنتج بدلالة n عبارة المجموع S_n المعروف بـ : $S''_n = S'_n + S_n$ علما أن : $S'_n = v_0 u_0 - v_0^2 + v_1 u_1 - v_1^2 + \dots + v_n u_n - v_n^2$ و $S''_n = u_0^2 - u_0 v_0 + u_1^2 - u_1 v_1 + \dots + u_n^2 - u_n v_n$.
 - (4) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية العددية (w_n) بحيث : $w_n = u_n + v_n$, أثبت أن المتتالية (w_n) ثابتة, ثم إستنتج قيمة ℓ .

- (1) f دالة عددية معرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$.
- (أ) أدرس إتجاه تغير الدالة f .
 - (ب) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) > 0$.
 - (2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.
 (أ) أحسب الحدين u_1 و u_2 .
 (ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
 (ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة, ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.
 (أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 (ب) عبر عن v_n بدلالة n , ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
 (ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .
 (4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n :
- $$\begin{cases} S_n = (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1) \\ S'_n = (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + \dots + (u_n^2 - n) \end{cases}$$

- (u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$
- (1) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f حيث $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$
 - (2) باستعمال الرسم المحصل عليه, مثل على محور الفواصل و بدون حساب, الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .
 - (3) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
 - (4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 8$
 - (5) تحقق أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. هل هي متقاربة؟ برر اجابتك.
 - ضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 8$
 - (1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
 - (2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (3) أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $Q_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 - (4) أحسب بدلالة n المجموع $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$
 - (5) أحسب بدلالة n الجداء : $\pi_n = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n$



الدالة العددية f ، $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ، المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ، وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها (الشكل المقابل) ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
 (u_n) متتالية معرفة بجدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
 $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) أعد رسم الشكل في ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط الإنشاء ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$ ، ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً وماذا تستنتج ؟

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كإيلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1+u_n}{1-u_n}$.

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 - \frac{2}{v_n + 1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n+2020}$ و $T_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2020} - 1}$.

تمارين رقم -29- : Meziane Maths

دالة معرفة على المجال $]2; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{\ln(x-1) + x - 1}{\ln(x-1)}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) إستنتج أنه من أجل كل x من $]2; +\infty[$ فإن $f(x) \geq e + 1$.

(4) أنشئ (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ على المجال $]2; 10]$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بجدها الأول $u_0 = e^2 + 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq e + 1$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - \ln(u_n - 1))}{\ln(u_n - 1)}$.

(ب) إستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم -30- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2} \end{cases}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

(2) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2} (1 - \sqrt{u_n - 2})$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2} (u_n - 3)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 3 \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \ln(u_n - 2)$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطمب تعيين أساسها وحدها الأول .

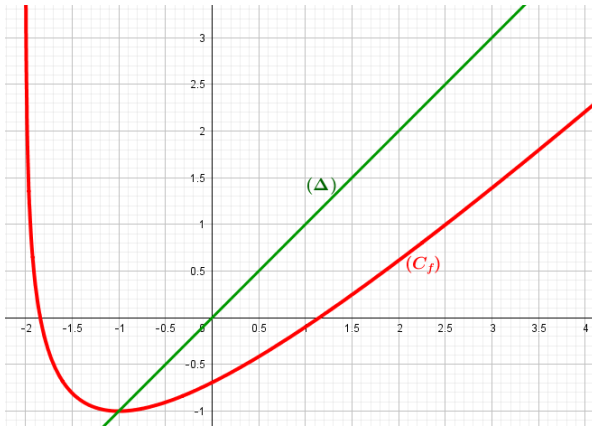
(ب) أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

(5) أحسب المجموع S حيث : $S = v_{1442} + v_{1443} + \dots + v_{2021}$ ثم استنتج الجداء P حيث :

$$P = (u_{1442} - 2) \times (u_{1443} - 2) \times \dots \times (u_{2021} - 2)$$

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$
- (1) أحسب الحدود u_0, u_1, u_2 .
 - (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.
 - (3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة , هل هي متقاربة ؟ علل .
 - (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$.
 - (أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 - (ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (ج) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

- f دالة معرفة على $[2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$
- (1) أحسب $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[2; +\infty[$.
 - (2) (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
 - (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 3$.
 - (2) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.
 - (3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما , هل هي متقاربة ؟
 - (4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n + 2)$.
 - (5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 2 \leq (\frac{9}{10})^n$, ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



- f دالة معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x+2)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل)
- (1) أحسب $f(-1)$ ثم بقراءة بيانية حدد إتجاه تغير الدالة f .
 - (2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 3$, ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.
 - (أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل U_1, U_2, U_3 على محور الفواصل دون حسابها .
 - (ب) ضع تخميناً حول إتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها .

- (3) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq -1$.
- (ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما , واستنتج أنها متقاربة , ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (ج) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ $v_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $V_n = \ln[(U_0 + 2)(U_1 + 2) \times \dots \times (U_{n-1} + 2)]$.
- (4) (أ) بين أن المتتالية أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 3 - U_n$.
- (ب) إستنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(U_0 + 2)(U_1 + 2) \times \dots \times (U_{n-1} + 2)]$.

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما , حدودها موجبة تماما , حدها الأول u_0 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 3 \\ u_1 + u_2 = e(1 + e) \end{cases}$$

(1) أحسب u_1 و u_2 ثم إستنتج قيمة الأساس q .

(2) نضع : $u_3 = e^3$ و $q = e$.

(أ) عبر عن u_n بدلالة n .

(ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(ج) أحسب : $S'_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$.

(د) بين أن المجموع : $S''_n = u_0^3 + u_1^3 + \dots + u_n^3 = \frac{e^{3(n+1)} - 1}{e^3 - 1}$, ثم إستنتج المجموع : $S'''_n = u_0^3 + u_1^3 + \dots + u_{2021}^3$.

تمرين رقم -35- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ب) إستنتج أن (u_n) متقاربة , ثم أحسب نهايتها.

(3) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{1}{2} \ln \sqrt{u_n}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{3}{2}$.

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

تمرين رقم -36- : Meziane Maths

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ، الدالة العددية f المعرفة

على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$ و المنحنى الممثل لها (الشكل

المقابل) ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(1) عين إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$, ثم . ادرس وضعية (C_f) بالنسبة

إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(2) (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 9$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) أعد رسم الشكل في ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل

دون حسابها مبرزاً خطوط الإنشاء.

(ب) ضع تخميناً حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

(ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) , إستنتج أنها متقاربة.

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 6 \leq \frac{2}{7}(u_n - 6)$.

(د) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 6 \leq (\frac{2}{7})^n(u_0 - 6)$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

(ب) إستنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى.

تمرين رقم -37- : Meziane Maths

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{eu_n + 1}$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$.

(1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول.

(2) أكتب v_n بدلالة n .

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + \frac{1}{eu_n - 1}$ ، ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .

(4) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(5) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و S'_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = \frac{e}{eu_0 - 1} + \frac{e}{eu_1 - 1} + \dots + \frac{e}{eu_n - 1}$.

(6) أحسب الجداء P حيث : $P = v_{1962} \times v_{1963} \times \dots \times v_{2021}$.

تمارين رقم -38- : Meziane Maths

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$.

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم إستنتج أنها مقاربة.

ج) إذا كانت : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$ فبين أن العدد l يحقق : $(l - 2)^2 = 0$ ثم أوجد قيمة l .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n(u_n - 2) = 1$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{-1}{2}$ و يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب) أوجد بدلالة n عبارة كل من u_n و v_n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$.

تمارين رقم -39- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب : $a_n = \frac{n}{5^{n-1}}$.

(1) أحسب بدلالة n $\ln(a_n)$ ثم إستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب : $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{n+1}{5n}u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن : $u_n > 0$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) وإستنتج تقاربها.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب) عبر عن u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(5v_1) + \ln(5^2v_2) + \dots + \ln(5^n v_n)$.

تمارين رقم -40- : Meziane Maths

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 4e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 4$.

ب) حدد إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ماذا تستنتج؟

(2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - 2 \ln 2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

أ) عين قيمة العدد الطبيعي n الذي يحقق : $S_n = 6(1 - e^{-2020 \ln 2})$.

ب) عبر بدلالة n عن المجموع T_n حيث : $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$.

تمارين رقم -41- : Meziane Maths

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

أ) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

(2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = u_n^2 - 1$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+1} = v_n$

ب) إستنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ج) أكتب عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$(3) \text{ أحسب بدلالة } n \text{ كل من المجاميع التالية : } \begin{cases} S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \\ T_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n \end{cases}$$

تمارين رقم -42- : Meziane Maths

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n = e^{3n+2}$

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، هل هي متقاربة.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) نعرف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ج) أحسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ و الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

تمارين رقم -43- : Meziane Maths

(I) نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n + 21}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟

(3) احسب $\left(U_{n+1} - \frac{1}{7}U_n\right)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \frac{1}{7}U_n$

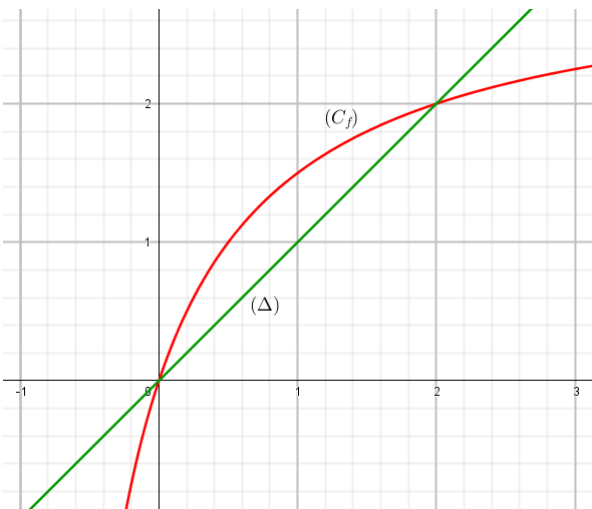
(4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ ، واحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{U_n}{U_n + 18}$

(1) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها q ، ثم احسب حدها الأول (V_0) .

(2) اكتب (V_n) بدلالة n ، ثم بين أن : $(U_n) = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}$ ، ثم احسب مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

تمارين رقم -44- : Meziane Maths



لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) .

(1) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_0 = 1$

و $U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n + 1}$

أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0

U_1 ، U_2 و U_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

د) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم إستنتج أنها متقاربة و عين نهايتها.

(2) نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$

أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة U_n بدلالة n ثم تحقق من نهاية المتتالية (U_n) .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{U_0}{U_0 - 2} + \frac{U_1}{U_1 - 2} + \frac{U_2}{U_2 - 2} + \dots + \frac{U_n}{U_n - 2}$

الدالة f معرفة على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم أرسم (C_f)

(2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ) مثل الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3$ على حامل محور الفواصل دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء

ب) بين بالتراجع أن : $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ماذا تستنتج ؟

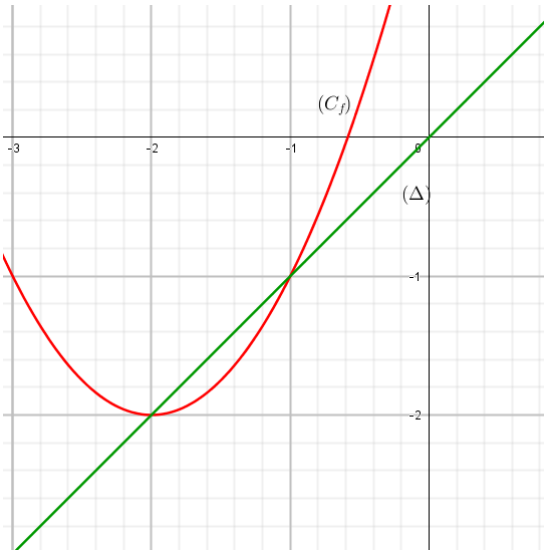
(3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$; ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

(4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$



f دالة معرفة على المجال $[-3; 0]$ بـ : $f(x) = (2+x)^2 - 2$ و (C_f) منحناها البياني المرفق.

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = -\frac{5}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) أ) أعد الرسم على ورقة الاجابة مع تمثيل الحدود U_1, U_2, U_3 على محور الفواصل دون حسابها .

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < U_n < -1$.

ب / ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، واستنتج أنها متقاربة .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \ln(U_n + 2)$.

أ / بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول

ب / اكتب V_n بدلالة n واستنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أ) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times (u_2 + 2) \times \dots \times (u_n + 2)$ ، ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0 = \frac{11}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3U_n - 4$

(1) أحسب U_1 و U_2 .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_n > 2$.

ب) أدرس رتبة المتتالية (U_n) ، هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

(3) نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 4U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

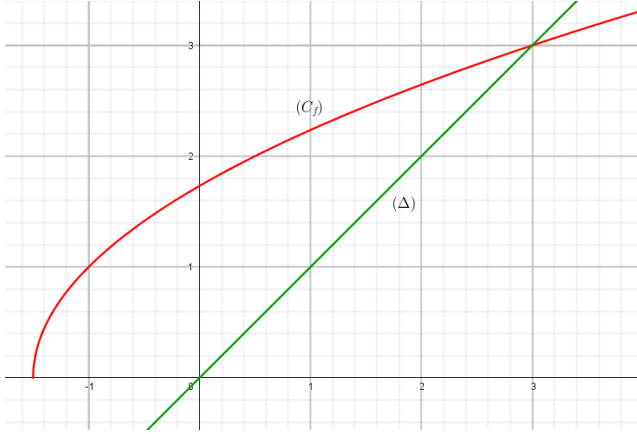
ب) بإستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا ، أكتب عبارة (V_n) بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة (U_n) بدلالة n .

ج) هل المتتالية (U_n) محدودة ؟

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{U_0}{4^0} + \frac{U_1}{4^1} + \frac{U_2}{4^2} + \dots + \frac{U_n}{4^n}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{u_n}{4^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم إستنتج بدلالة n المجموع S_n .

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
 (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, 3]$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{2x + 3}$:
 أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, 3]$ وشكل جدول تغيراتها



ب) بين أنه إذا كان $x \in [0, 3]$ فإن $f(x) \in [0, 3]$
 (2) أ) باستعمال المحنى (C_f) الممثل للدالة f والمستقيم $(\Delta) : y = x$
 مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)
 ب) ما هو تخمينك لإتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟
 (3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3$
 ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
 ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها

(4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$
 ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 3 - u_n \leq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

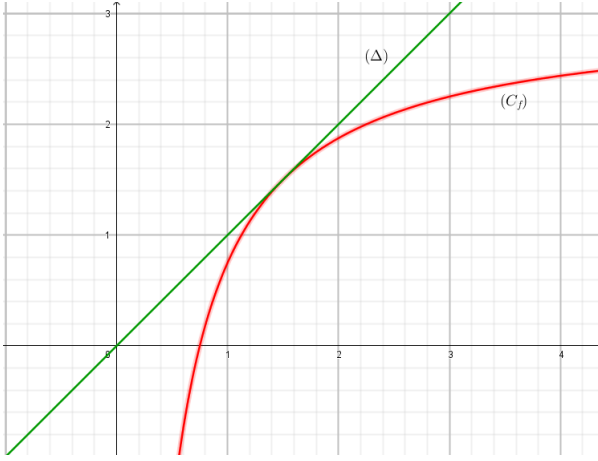
نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$.
 ولتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $V_n = U_n + 6$.
 (1) أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .
 ب) أكتب V_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة U_n بدلالة n .
 نعتبر المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
 (2) أحسب S_n بدلالة n ثم إستنتج S'_n بدلالة n .
 نعرف المتتالية (W_n) من أجل كل عدد طبيعي لدينا : $W_n = \ln(V_n)$ (حيث $\ln$ اللوغاريتم النيبيري) .
 (3) بين أن (W_n) متتالية حسابية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .
 أحسب بدلالة n المجموع $S''_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ، إستنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$

(1) لتكن المتتالية العددية (U_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{5} \\ U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1} \end{cases}$
 (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$
 (2) أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماماً. واستنتج أنها متقاربة.
 (2) لتكن المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$.
 (1) بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها 6 يُطلب تعيين حدها الأول .
 (2) أ) أكتب بدلالة n عبارة V_n .
 ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
 (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$

(1) المتتالية العددية المعرفة بـ : u_0 و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$
 (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

- (2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) .
 (3) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .
 (4) أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.
 ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثمّ عيّنها نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

تمارين رقم -52- : Meziane Maths



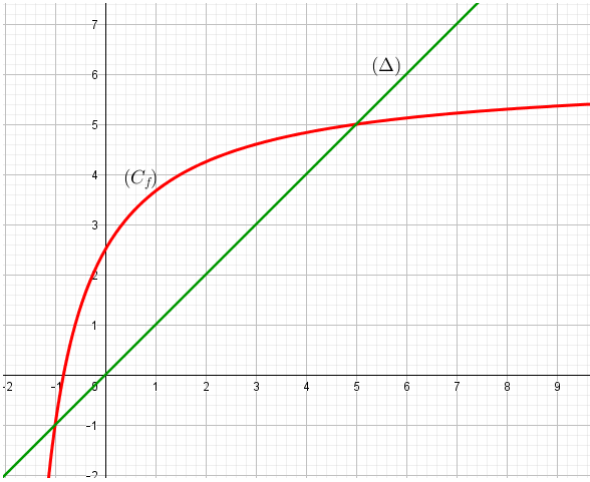
- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = \left] \frac{3}{2}, 3 \right]$ بـ : $f(x) = \frac{12x-9}{4x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) بين أن الدالة f متزايدة تماماً على I .
 (2) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{12U_n - 9}{4U_n}$:
 أ) باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل و دون حساب الحدود U_0 ، U_1 و U_2 مبرزا خطوط الرسم .
 ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .
 (3) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} < U_n \leq 3$.
 ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) و استنتج أنها متقاربة ثم عيّنها نهايتها .
 (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{2}{2U_n - 3}$ و $V_n = \ln(W_n)$.
 أ) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$ ثم أكتب U_n بدلالة n .
 ب) أحسب S_n حيث : $S_n = W_0 \times W_1 \times \dots \times W_n$.

تمارين رقم -53- : Meziane Maths

- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 (1) أحسب u_1 و v_1 .
 (2) بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n .
 (3) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 أ) بين أنّ : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمارين رقم -54- : Meziane Maths

- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$.
 (1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < 2$.
 (2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
 (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$.
 أ) بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثمّ عبّر عن v_n بدلالة n .
 ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .
 (4) أ) بين أنّ : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .
 ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثمّ إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$ ، وليكن (C_f) المنحني الممثل لها، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل).
- تحقق أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.
- (u_n) متتالية معرفة بجدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (1) أ) أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .
- ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 5$.
- (3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة؟
- (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$.
- أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ب) عبر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n .
- ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
- (5) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}$.

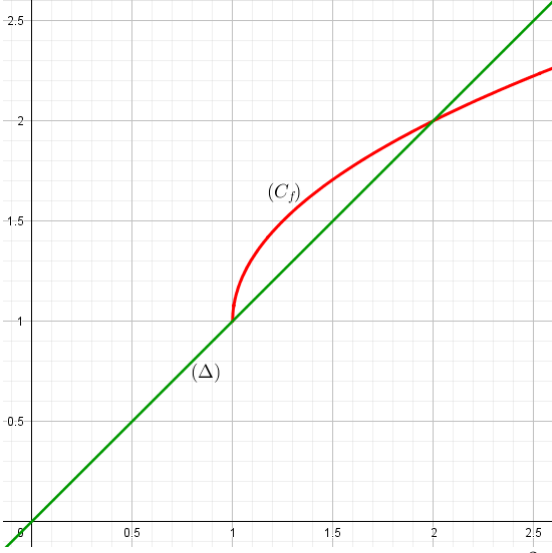
- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3} \end{cases}$.
- 1- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $2 \leq U_n \leq 3$.
- 2- أ) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_{n+1} - U_n = \frac{(3 - U_n)(1 + U_n)}{U_n + \sqrt{2U_n + 3}}$.
- ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .
- ج) هل المتتالية (U_n) متقاربة؟ علل اجابتك.
- 3- أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - U_n)$.
- ب) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$.

- (1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بجدها الاول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2^n$.
- أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 0$.
- ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2^n - u_n$.
- أ) بين أن متتالية (v_n) هندسية اساسها 3.
- ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .
- (3) أ) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ماذا تستنتج؟
- ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
- ج) بين ان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $S_n = 2^n - \frac{1+3^n}{2}$.

- (1) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$.

- أ) بين أنه إذا كانت (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ ، فإن ℓ هو جذر لثلاثي الحدود : $P(x) = x^2 + x - 6$.
- ب) عين جذري الثلاثي الحدود P ، نرمز اليهما بـ α و β حيث $\alpha > \beta$
- (2) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$
- أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم -59- Meziane Maths



- نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كإيلي: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ انظر الشكل.
- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بمحدها الاول $u_0 = \frac{5}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي
- $u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) أ) علم علي محور الفواصل دون حساب الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 .
- ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
- (2) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n < 2$.
- ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها.
- (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بمحدها العام من اجل كل عدد طبيعي n :
- $v_n = e^{-\frac{1}{3} + 2n}$
- أ) بين ان متتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.
- ب) احسب المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$
- ج) استنتج قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1 - e^2} (1 - e^{4036})$

تمرين رقم -60- Meziane Maths

- نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
- $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 1}$
1. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
- $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1}$
2. (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < U_n < \frac{1}{2}$
- (ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، بين أنها متقاربة وعين نهايتها
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :
- $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$
- (أ) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 .
- (ب) أحسب V_n بدلالة n واستنتج أن : $U_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- (ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{u_0}{2u_0 - 1} + \frac{u_1}{2u_1 - 1} + \dots + \frac{u_n}{2u_n - 1}$

تمرين رقم -61- Meziane Maths

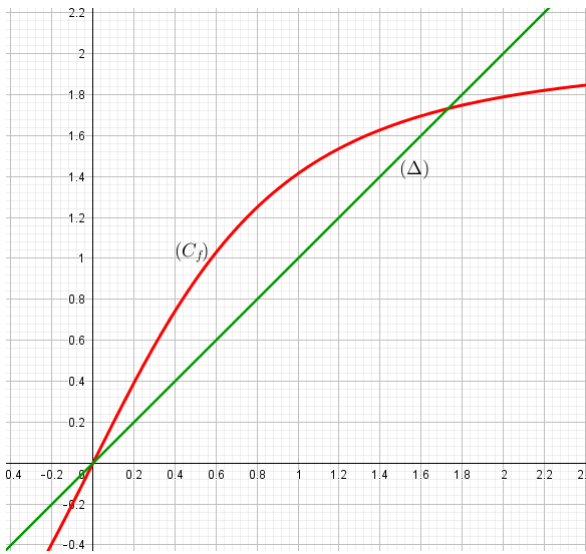
- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_1 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:
- $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$
- (1) أحسب الحدود u_2, u_3, u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون : $u_n \leq n + 3$
- ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:
- $v_n = u_n - n$
- أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .
- ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:
- $u_n = n + (\sqrt{e} - 1)(\frac{2}{3})^{n-1}$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $S_n = (\frac{2}{3})v_1 + (\frac{2}{3})^2v_2 + \dots + (\frac{2}{3})^nv_n$ و $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $T_n = \frac{S'_n}{n^2}$ عبر عن S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

تمارين رقم -62- : Meziane Maths

- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$
- (1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $U_n > 0$.
 ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم إستنتج أنها متقاربة .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n = \frac{u_n}{n}$.
 بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q ، ثم احسب حدها الأول .
- (3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن : $u_n = \frac{n}{2^n}$.
- (4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \ln x - x \ln 2$.
 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمارين رقم -63- : Meziane Maths



- الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ :
- $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.
 ب) بين أنه إذا كان $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$.
- (2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
- أ) باستعمال التمثيل البياني (C_f) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .
- ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
- ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- د) استنتج أن (u_n) متقاربة .
- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.
 أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
 ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
 ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (4) أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)}$

تمارين رقم -64- : Meziane Maths

- لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 3^n - n - 1$.
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \alpha(n+1)$ حيث α عدد حقيقي .
 أ) عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
 ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
- (3) نضع $\alpha = 1$ وليكن $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 أ) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n .
 ب) عين قيمة n حتى يكون : $S_n - T_n = 2043230$.

- لتكن المتتالية العددية (U_n) معرفة كما يلي :
- $$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 1 - \frac{3 + 2u_n}{2 + U_n} \end{cases}$$
- (1) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4 .
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.
- (3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \sqrt{3}$.
- (4) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) وإستنتج أنها متقاربة ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (5) لتكن المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $V_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.
- أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب حساب أساسها q و حدها الأول.
- ب) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.
- ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ مرة أخرى.

- (u_n) المتتالية العددية معرفة ب : $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{8 + u_n^2}$.
- (1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
- (2) نضع فيما يلي : $\alpha = 2$.
- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.
- ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم إستنتج أنها متقاربة.
- (3) لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = 1 - u_n^2$.
- أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب حساب أساسها q و حدها الأول.
- ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
- ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (4) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و S'_n بحيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

- (U_n) متتالية معرفة ب : $U_0 = e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$.
1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > e^2$.
2. أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) . هل هي متقاربة ؟
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \ln(U_n) - 2$.
- (أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- (ب) عبر عن V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n .
- (ج) ما هي نهاية كل من المتتاليتين (V_n) و (U_n) ؟
4. أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

1. لتكن الدالة f المعرفة على $[0, 1]$ ب : $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, 1]$.
- (2) إستنتج أنه إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $f(x) \in [0, 1]$.
- (3) مثل بيانها الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته : $(10cm)$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) باستعمال المنحنى (C) للدالة f عين على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 .
أعط تخميناً حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية u_n .
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$.
- (3) بين أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$, ثم إستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (4) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

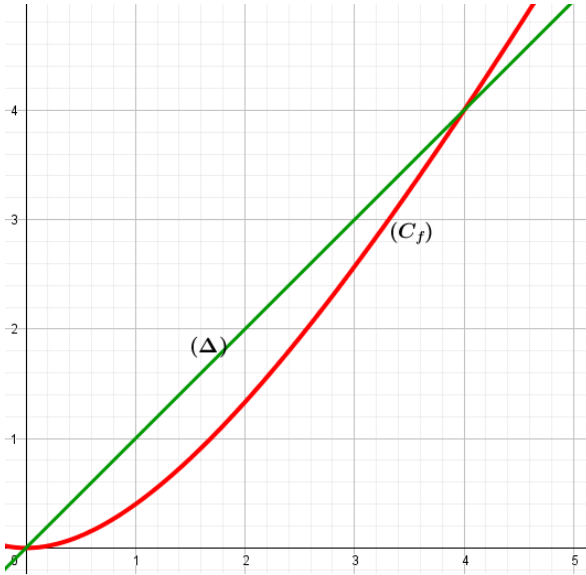
- (1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
- (2) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم عبارة u_n بدلالة n .
- (3) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمارين رقم -69- : Meziane Maths

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = e^3$, و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{2} + \frac{1}{2}}$

- (1) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq 3$.
ب) قارن بين العددين u_n و u_{n+1} ثم إستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل جوابك .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n^2 - 1$.
أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية , يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
ج) أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_n^2 + u_{n+1}^2 + \dots + u_{n+2021}^2$, ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمارين رقم -70- : Meziane Maths



- f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو مبين في الشكل .
- (1) بين أن الدالة f متزايدة تماماً على مجموعة تعريفها .
- (2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = f(u_n)$
- أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها .
- ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

- (3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 3$.
ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .
ج) أستنتج أن (u_n) متقاربة .
- (4) أ) أدرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$, واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.
ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 3(\frac{6}{7})^n$.
ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) لما n يؤول الى $+\infty$.

تمارين رقم -71- : Meziane Maths

نعتبر متتالية الأعداد الطبيعية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 10.u_n + 51$.

- (1) أحسب u_1, u_2, u_3 .
- (2) أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3u_n = 2 \times 10^{n+1} - 17$.
ب) إستنتج من أجل كل عدد طبيعي n كتابة للعدد u_n في النظام العشري .
- (3) أ) بين أن العدد الطبيعي u_2 أولي .
ب) بين أن u_n لا يقبل القسمة على كل من 2, 3, 5 مهما كان العدد الطبيعي n .
- (4) أ) بين أن : $10^6 \equiv 1[7]$ دون إستعمال الحاسبة .
ب) إستنتج من أجل كل عدد طبيعي p فإن : u_{6p+4} يقبل القسمة على 7 .

تمارين رقم -72- : Meziane Maths

- (1) نعتبر كثير الحدود $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 4x - 2016$.
أ) عين العدد الطبيعي a حيث : $P(x) = (x - a)(3x^2 + 31x + 31a + 4)$.
فيما يلي نضع $a = 8$.
- (2) حل عندئذ المعادلة $P(x) = 0$.
- (3) (v_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها q و (u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول $u_0 = 0$ و أساسها r .
أ) عين q علما أن : $3v_3 + 7v_2 + 4u_1 = 2016$.
- (ب) إستنتج كتابة العدد 2020 في النظام ذي الأساس 8 .
- (4) نضع $w_n = v_n + u_n$.
أ) أحسب المجموع $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ بدلالة n .
ب) بين أن : $7S_n - 7 \equiv 0[8]$.
- (5) أ) عين بواقي قسمة 8^n على 13 .
ب) إستنتج باقي قسمة العدد L على 13 حيث : $L = 2020^{1441} + 1441^{2020}$.

تمارين رقم -73- : Meziane Maths

- (1) (u_n) متتالية حسابية متزايدة حدودها أعداد طبيعية تحقق : $\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$ حيث : $\begin{cases} m = PPCM(u_3, u_5) \\ d = PGCD(u_3, u_5) \end{cases}$.
أ) عين الحدين u_3 و u_5 ثم إستنتج u_0 .
- (2) أكتب u_n بدلالة n , هل العدد 2022 هو حد من حدود (u_n) .
- (3) عين الحد الذي إبتداء منه مجموع 5 حدود متتابة من (u_n) يكون مساويا لـ 10080 .
- (4) أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$.
ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$.
ج) إستنتج بدلالة n المجموع : $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1}$.

تمارين رقم -74- : Meziane Maths

- (1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.
أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.4^n$.
ج) بين أن كل من u_n و u_{n+1} أوليين فيما بينهما مهما كان $n \in \mathbb{N}$.
- (2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
أ) حدد طبيعة المتتالية (v_n) مع إيجاد أساسها و حدها الأول .
ب) أوجد المجموع S بدلالة n حيث : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$.
- (3) عين من أجل كل عدد طبيعي n (PGCD) القاسم المشترك الأكبر لكل من العددين $a = 4^{n+1} - 1$ و $b = 4^n - 1$.
- (4) أ) أدرس حسب قيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .
ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد A_n يقبل القسمة على 7 حيث : $A_n = 9S - 6n - 3^{6n+4}$.

θ عدد حقيقي من المجال $0; \frac{\pi}{2}[$

$$(I) \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$

(2) نذكر أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

(1) أحسب u_1 و u_2 بدلالة θ

(ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{2+u_n} + \sqrt{2+u_{n-1}}}$

(ج) برهن بالتراجع أن (u_n) متزايدة

(د) برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N} : u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ ثم أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما و حدودها طبيعية غير معدومة و أساسها q
نضع : $PGCD(u_0; u_2) = d$ و $PPCM(u_0; u_2) = m$

(1) أحسب كل من u_0, u_1 و u_2 علما أن : $m - 8d = 4$

(2) نضع $u_1 = 12$ و $q = 3$

(أ) أكتب u_n بدلالة n

(ب) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(3) (أ) أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7

(ب) إستنتج باقي قسمة العدد α على 7 حيث : $\alpha = 1438^{2020} - 4^{1962}$

(ج) عين الأعداد الطبيعية n حيث تحقق الجملة : $\begin{cases} (n-1)S_n \equiv 0[7] \\ n+2 \equiv 0[6] \end{cases}$

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{2n+1} = \frac{1}{2}u_{2n} \\ u_{2n+2} = 1 + u_{2n+1} \end{cases}$$

(1) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتاليتين (α_n) و (β_n) حيث : $\begin{cases} \alpha_n = 2 - u_{2n} \\ \beta_n = 1 - u_{2n+1} \end{cases}$

(أ) بين أن كل من α_n و β_n متتاليتان هندسيتان يطلب تحديد كل من الأساس والحد الأول لكل منهما

(ب) أكتب كـب من α_n و β_n بدلالة n

(ج) إستنتج عبارة كل من u_{2n} و u_{2n+1} بدلالة n

(د) هل المتتالية (u_n) متقاربة مع التعليل

(3) أحسب بدلالة n كل من المجاميع التالية :

(أ) $S_1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

(ب) $S_2 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$

(ج) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2n} + u_{2n+1}$

(1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) حيث $2x - 25y = 5 \Leftrightarrow (E)$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$

(أ) أحسب u_1, u_2, u_3 و u_4 ما تخمينك حول رقي الآحاد والعشرات للعدد u_n

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+2} \equiv u_n[4]$

(ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $k : u_{2k} \equiv 1[4]$ و $u_{2k+1} \equiv 3[4]$

- (3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2u_n = 5^{n+2} + 1$
 ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n \equiv 26[100]$
 (4) حدد حسب قيم العدد الطبيعي n رقمي الآحاد والعشرات للعدد u_n .
 (5) عين $PGCD(u_{n+1}, u_n)$.

تمارين رقم -79- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

- (1) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 .
 (2) أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$
 ب) إستنتج من أجل كل عدد طبيعي n الكتابة العشرية للعدد u_n .
 (3) بين أن العدد u_2 أولي.
 (4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , u_n لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5.
 (5) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n \equiv 4 - (-1)^n[11]$
 ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n لا يقبل القسمة على 11.
 (6) أ) بين أن : $10^{16} \equiv 1[17]$
 ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن : u_{16k+8} يقبل القسمة على 17.

تمارين رقم -80- : Meziane Maths

- نضع $v_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$
 (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم لدينا : $v_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
 (2) جد ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c بحيث تحقق العلاقة التالية : $\frac{1}{v_k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1}$
 (3) من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$ و $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k}$
 أ) جد الأعداد الحقيقية α, β, γ بحيث يكون لدينا : $u_n = \alpha + \beta(S_n - S_{2n+1}) + \frac{\gamma}{n+1}$
 ب) إستنتج رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة : $w_n = u_n + \frac{\gamma}{n+1}$
 ج) مما سبق إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة.

تمارين رقم -81- : Meziane Maths

- a عدد طبيعي غير معدوم.
 لتكن المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث : $u_n = PGCD(n, a)$
 (1) من أجل $a = 15$ أحسب الحدود الثلاثة الأولى لـ (u_n) .
 (2) من أجل $a = 4$ نعتبر العددين الطبيعيين n و m حيث : $u_n = u_m = 2$
 - بين أن : $u_{n+m} = 4$
 (3) b عدد طبيعي.
 أ) بين أنه من أجل كل عدد صحيح نسبي q فإن : $PGCD(a, b) = PGCD(a, b - aq)$
 ب) أحسب u_1 و u_a
 ج) أثبت أن : $u_{n+a} = u_n$, ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n) .
 (4) نضع $a = 15$, أحسب u_n من أجل : $n = 2002^{2020} + 1441$.

تمارين رقم -82- : Meziane Maths

- نعتبر المتتاليتان (v_n) و (u_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ و حدودها موجبة حيث :
- $$\begin{cases} v_0 = 1 \\ (v_{n+1})^2 = v_n^2 + 2^{n+1} \cdot v_n + 4^n \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4^n \end{cases}$$
- (1) أحسب u_1 .
 (2) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $v_{n+1} = v_n + 2^n$
 (3) عين عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n .

- (4) أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.
- (5) عين حسب قيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للمجموع $(u_n + v_n)$ على 5.
- (6) أ) أحسب بدلالة n الجداء X_n حيث : $X_n = u_2 \times u_3 \times u_4 \times \dots \times u_n$ مع $n \geq 2$.
- ب) برهن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن : $v_n < X_n$.
- ج) بين أن v_n يقسم X_n من أجل كل $n \geq 2$.

تمرين رقم -83- : Meziane Maths

- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (I) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = 3u_n - 4$.
- (1) أوجد قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .
- (2) من أجل قيمة α المحصل عليها أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n .
- (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (4) بإستعمال دستور ثنائي الحد أوجد منشور $(x+1)^n$ حيث x عدد حقيقي، ثم إستنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = v_0 c_n^0 + v_1 + c_n^1 + v_2 c_n^2 + \dots + v_n c_n^n$.
- (II) بإستعمال البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$.
- (III) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $w_n = 2u_n - 3$.
- (1) أوجد قيمة α حتى تكون المتتالية (w_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول w_0 .
- (2) من أجل أي قيمة α المحصل عليها أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n .
- (3) أحسب المجموع S''_n بدلالة n حيث : $S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.
- (4) إستنتج بدلالة n المجموع ψ_n حيث : $\psi_n = (w_0)^2 + (w_1)^2 + (w_2)^2 + \dots + (w_n)^2$.

تمرين رقم -84- : Meziane Maths

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.
- (1) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = 2u_n + \alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$.
- أ) أوجد قيمة α الحقيقية التي من أجلها تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول.
- ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n .
- ج) أحسب نهاية u_n لما $n \rightarrow +\infty$ ، ماذا تستنتج؟
- (2) أحسب بدلالة n المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (3) أ) بإستخدام دستور ثنائي الحد، أوجد منشور $(x+1)^n$.
- ب) إستنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = v_0 c_n^0 + v_1 + c_n^1 + v_2 c_n^2 + \dots + v_n c_n^n$.
- (4) برهن بإستخدام دستور ثنائي الحد أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $L_n = 4^n + 6n + 8$ يقبل القسمة على 9.

تمرين رقم -85- : Meziane Maths

- (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ حيث حدودها أعداد طبيعية.
- (1) أ) تحقق أن : $u_1 + u_5 = 2u_3$.
- ب) أحسب u_3 علما أن : $u_1 + u_3 + u_5 = 150$.
- (2) نضع $d = \text{PGCD}(u_1, u_5)$ و $m = \text{PPCM}(u_1, u_5)$.
- أ) عين العددين u_1 و u_5 علما أن : $m = 6d$.
- ب) إستنتج أن : $u_4 - u_2 = 10$ ثم حدد أساس المتتالية (u_n) .
- ج) أكتب عبارة u_n بدلالة n .
- (3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1}$.
- ب) عين الأعداد الطبيعية n غير المعدومة حتى يكون $2S_n$ يقبل القسمة على 15.

تمرين رقم -86- : Meziane Maths

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{1+\sqrt{x}}$ ونسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

(3) أ) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$ مشكلا جدول تغيرات الدالة f .

(4) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ في المجال $[0; 4]$.

(II) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) بإستعمال (C_f) و (Δ) مثل الحدود u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل دون الحساب.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \geq 1$.

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1) \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{(1+\sqrt{u_n})^2} \right]$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم -87- : Meziane Maths

(I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$, وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ) x عدد حقيقي كفي من $\mathbb{R}$ أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

(3) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(x) - x$.

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)]$

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{-(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$

ج) أدرس إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

(د) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2.7; 2.8]$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(4) أ) عين إحداثي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(II) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) بإستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثل دون الحساب الحدود u_2, u_1, u_0 على حامل محور الفواصل.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n < \alpha$

(3) تحقق أن : $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ثم إستنتج إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

تمرين رقم -88- : Meziane Maths

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$, (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ ثم إستنتج أن f فردية.

(2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(3) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

- (ب) إستنتج من أجل كل x من $]0; +\infty[$ أن : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$.
 (4) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 - \frac{1}{2}x)]$ وأعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.
 (5) أنشئ المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

- (6) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$
 (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq 0$.
 (ب) بين بإستعمال السؤال (3) أن : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
 (ج) بين أن (u_n) متتالية متناقصة ، ماذا تستنتج ؟
 (د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم -89- : Meziane Maths

- (I) f الدالة العدد المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x.e^{x^2-1}$ ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 3Cm).
 (1) بين من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f(x) + f(-x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسياً.
 (ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم إستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$.
 (ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 (ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$.
 (د) أدرس إشارة $f''(x)$ مستنتجاً أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب إحداثياتها.
 (3) (أ) بين أن : $1 - e^{x^2-1} \leq 0$ من أجل $x \in [-1; 1]$ ثم إستنتج إشارة الجداء $x(1 - e^{x^2-1})$ على المجال $]-\infty; +\infty[$.
 (ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على $\mathbb{R}$.
 (4) (أ) بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') متوازيين عند كل من النقطتين فاصلة كل منهما (-1) و (1) .
 (ب) أكتب معادلة لكل من (T) و (T') .
 (5) ارسم كل (T) , (T') , (Δ) و (C_f) .
 (6) ناقش حسابياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = mx$ في $\mathbb{R}$.
 (II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$
 (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 \leq u_n \leq 1$.
 (2) بإستعمال (C_f) و (Δ) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 , u_1 و u_2 دون الحساب ، ثم ضع تخميناً حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
 (3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 (4) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم -90- : Meziane Maths

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 1 + (1 - x)e^x$.
 (1) (أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$.
 (ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$.
 (3) تحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
 (4) تحقق أن : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$.
 (II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 3Cm).
 (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
 (2) إستنتج غتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

(3) أوجد نهايات الدالة f عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$, شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) بين أن $f(\alpha) = \alpha$ و $f(-\alpha) = 0$.

(5) أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 1$, فسر هذه النتيجة بيانيا.

(ب) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$.

(6) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) ل (C_f) عند النقطة التي فصلتها $x_0 = -\alpha$.

(7) أرسم (Δ) , (T) و (C_f) في المعلم السابق.

(8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$.

III (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) بإستعمال (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون الحساب.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \alpha$.

(3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(4) إستنتج تقارب المتتالية (u_n) .

(5) أ) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\alpha - u_{n+1} \leq \frac{\alpha - u_n}{e^{u_n} + 1}$.

(ب) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$.

(ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \alpha - u_n \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(6) إستنتج النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم -91- Meziane Maths

I لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$.

(1) بين أن $g(x) < 0$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$.

(2) غسنتج جدول إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ (لاحظ أن $g(1) = 0$).

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أثبت : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(ب) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(3) أ) بين أن : $f'(x) = (x-2).g(x)$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$.

(ب) بين أن الدالة f منقصة على $]0; 1[$ و على $]2; +\infty[$ و متزايدة تماما على $[1; 2]$.

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ (نقبل $f(2) = 1.25$).

(4) علما أن $f(3) = 0.5$ و $f(4) = -1.9$ برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]3; 4[$.

(5) أنشئ (C_f) في المعلم السابق (نأخذ وحدة الطول $2Cm$).

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = m^2$.

x	1	2
$h(x)$	0	$h(2)$

III (1) إنطلاقا من جدول تغيرات الدالة h (الجدول المقابل) بين أن : $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[1; 2]$.

(2) بين أن 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$ على المجال $[1; 2]$.

IV لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) بين بالتراجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq 2$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(3) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

(2) أدرس إتجاه تغير g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) تحقق أن $g(1) = 0$ ثم بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; e[$.

(4) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; e[\cup]e; +\infty[$ و $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$ ونسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من D_f فإن : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$.

(3) أدرس إشارة $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) أ) بين أنه من أجل كل x من D_f فإن : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$.

ب) برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ يقطع (C_f) في نقطتين فاصلة كل منهما 1 و α .

ج) بين أن : $f(x) - x \leq 0$ من أجل كل $x \in [1; \alpha]$ ثم أرسم (Δ) و (C_f) .

(5) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) حيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

أ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل بإستعمال (Δ) و (C_f) .

ب) برهن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq \alpha$.

ج) برهن أن (u_n) متناقصة تماما مستنتجا أن (u_n) متقاربة.

د) أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$ ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أحسب $f(2)$.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا : $f(x) = 2x \left[1 + \frac{\ln(x^2)}{2x} \right] + \ln(1 + \frac{1}{x^2}) - 2$ ثم أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و الصورة $f(-2)$.

(3) أ) عين عبارة $f'(x)$ ثم حدد إشارتها على $\mathbb{R}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) ليكن (T_β) المستقيم الذي معادلته $y = 2x + \beta$ مع $(\beta \in \mathbb{R})$.

أ) عين قيمة β حيث يكون (T_β) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تحديد إحداثيها ونسمي هذا المماس بـ (Δ) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ) .

ج) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $0.5 < \alpha < 1$.

(5) أرسم كل من (Δ) و (C_f) .

(6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $\ln(x^2 + 1) = m + 2$ (1).

(7) برهن أنه إذا كان λ و γ حلين للمعادلة (1) فإن : $(\gamma - \lambda)(\gamma + \lambda) = 0$.

(II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$ مع $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) أحسب نهاية f_n عند $+\infty$.

(2) بين أن الدالة f_n متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

(3) أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $]0; +\infty[$.

ب) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < \alpha_n < 1$.

(4) حدد الوضع النسبي لكل من $(C_{f_{n+1}})$ و (C_{f_n}) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) إستنتج أن المتتالية (α_n) متزايدة تماما وأن $f_n(\alpha_{n+1})$.

(ج) إستنتج أن (α_n) متقاربة.

(5) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$.
(ب) عين نهاية المتتالية (α_n) .

تمارين رقم -94- : Meziane Maths

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ حيث : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$ ونسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة g في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أحسب نهايات الدالة g على أطراف مجال تعريفها.
 - (2) أوجد $g'(x)$ ثم حدد إشارتها مع إستنتاج إتجاه تغير الدالة g .
 - (3) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.25 < \alpha < 1.5$.
ب) شكل جدول تغيرات الدالة g , مستنتجا إشارة $g(x)$.
 - (4) أ) أوجد معادلة المماس (d) ل (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة α .
ب) أوجد حصر ل β ترتيب نقطة تقاطع (d) مع محور الترتيب.
- (II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ حيث : $f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.
- (1) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.
 - (2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (ج) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ ثم جد حصر للعدد $f(\alpha)$.
 - (3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $\Delta : y = x$.
ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 - (ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
 - (4) أ) أنشئ كل من (Δ) , (T) والمنحنى (C_f) في المعلم السابق.
- ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $mx + \ln x - 1 = 0$.
- (5) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$
- أ) بإستعمال (C_f) و (Δ) مثل الحدود u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل.
 - ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\alpha \leq u_n \leq e$.
 - (ج) برهن أن (u_n) متزايدة تماما ثم إستنتج تقارب (u_n) .
 - (د) أوجد نهاية المتتالية (u_n) .

تمارين رقم -95- : Meziane Maths

f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ حيث : $f(x) = x.e^{-x}$, وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث (وحدة طول محور الفواصل $2Cm$ ووحدة طول محور الترتيب $3Cm$).

- (1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.
- ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (ج) أنشئ المنحنى (C_f) .
- (2) نسمي $f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة للدالة f من الرتبة n .
أ) أحسب $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ و $f^{(n)}(x)$.
ب) برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n)e^{-x}$.
- (3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq 0$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \ln(u_n)$ و $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = v_n - v_{n+1}$

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = v_0 - v_{n+1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

تمرين رقم -96- : Meziane Maths

I) الجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة g حيث : $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

من جدول التغيرات الدالة g :

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة g .

2) حدد إشارة $g'(x)$ مع التعليل (دون إيجاد عبارة $g'(x)$).

3) أ) أوجد نهاية الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف D .

ب) إستنتج معادلات المستقيمات المقاربة لبيان الدالة g .

4) حدد إشارة $g(x)$ على المجال D .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	0^+

II) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x}) \\ f(0) = 0 \end{cases}, x \in]-\infty[\cup]0; +\infty[$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2Cm$).

1) أ) برهن أن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$ على اليمين.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0 = 0$ على اليمين وفسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.

2) أ) أوجد عبارة $f'(x)$ من أجل كل $x \in]-\infty[\cup]0; +\infty[$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها.

3) أ) بوضع $x = \frac{1}{t}$ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر بالنقطة $(-1; 0)$ يطلب تحديد a فاصلة نقطة التماس.

ب) تحقق أن معادلة المماس (T) هي : $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$.

5) أرسم كل من المستقيمات المقاربة (T) والمنحنى (C_f) .

6) نعتبر المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx + m$ مع $m \in \mathbb{R}$.

أ) بين أن (Δ_m) يشمل النقطة $(-1; 0)$ مهما كان $m \in \mathbb{R}$.

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $1 + \frac{1}{x} = e^{\frac{m}{x} + m}$.

III) بين أنه من أجل كل $x \in D^* =]-\infty[\cup]0; +\infty[$ فإن $(-x-1) \in D^*$.

2) نضع $g(x) = f(-x-1)$ بين أن : $g(x) = (x+1)\ln(1 + \frac{1}{x})$.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $f(n) < 1 < g(n)$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\begin{cases} u_n = (1 + \frac{1}{n})^n \\ v_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \end{cases}$

أ) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n < e < v_n$.

ب) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n < \frac{e}{n}$.

ج) إستنتج النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$.

تمرين رقم -97- : Meziane Maths

I) n عدد طبيعي غير معدوم.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f_n(x) = (2x+1)^n \cdot e^x$.

ونسمي (C_{f_n}) التمثيل البياني لـ f_n في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أحسب كل من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- (2) أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f'_n(x) = (2x+1)^{n+1} \cdot e^x \cdot (2x+2x+1)$:
 ب) إستنتج إتجاه تغير $f_1(x)$ (من أجل $n=1$).
- (ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f_n من أجل $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (نميز حالتين n زوجي و n فردي).
- (د) شكل جدول تغيرات الدالة f_n في حالة n زوجي و في حالة n فردي.
- (3) بين أن (C_{f_n}) يشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.
- (4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{f_n}) و $(C_{f_{n+1}})$.
- (5) لتكن النقطة M_n من (C_{f_n}) فاصلتها $x_n = -n - \frac{1}{2}$ عن مجموعة النقط M_n لما n تسمح $\mathbb{N}^*$.
- (6) أ) أكتب معادلة المماس (T_n) للمنحنى (C_{f_n}) عند نقطة منه ذات الفاصلة 0.
 ب) عين قيمة n التي من أجلها (T_n) يشمل $(-1; -4)$ ثم معادلة (T_n) من أجل قيمة n المحصل عليها.
- (7) أنشئ كل من (T_1) و (C_{f_1}) ثم (T_2) و (C_{f_2}) في المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$.
- (8) m وسيط حقيقي حيث : $m \in]-\infty; \frac{1}{2}[$, ناقش بيانها و حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f_2(x) = f_1(m)$ مع العلم أن :
 $f_2\left(\frac{-5}{2}\right) = f_1(0.1)$
- (II) نعتبر المتتالية (α_n) المعرفة بـ : $f'_n(\alpha_n) = 0$ حيث $\alpha_n \neq \frac{-1}{2}$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
- (1) أحسب α_1 و α_2 .
- (2) أوجد α_n بدلالة n ثم حدد طبيعتها وإتجاه تغيرها.
- (3) بملاحظة أن : $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} = \frac{1}{2}$
 - أحسب الجداء P_n حيث : $P_n = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \dots \times \alpha_n$

تمرين رقم 98 - Meziane Maths

- (I) n عدد طبيعي غير معدوم.
- لتكن الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $\begin{cases} f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}} & , x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- و نسمي (C_{f_n}) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ) أدرس إستمرارية f_n عند $x_0 = 0$.
- ب) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f_n عند $x_0 = 0$ من اليمين ثم فسر النتيجة هندسيا.
- (2) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند $+\infty$ و $-\infty$.
- ب) أحسب $f'_n(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم حدد إشارتها وإتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أ) نعتبر $A_n(x_n; y_n)$ نقطة من (C_{f_n}) حيث : $x_n \neq 0$ و $f'_n(x_n) = 0$ عين المحل الهندسي للنقطة A_n لما n يسمح $\mathbb{N}^*$.
- ب) لبن أن المنحنى (C_{f_n}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ_n) معادلته $y = x - n$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
- (ج) أدرس الوضع النسبي لكل من (C_{f_n}) و $(C_{f_{n+1}})$.
- (4) أ) شكل جدول تغيرات $f_1(x)$ (أي من أجل $n=1$).
- ب) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث : $g(x) = f_1(x) - x + 1$
- أوجد $g'(x)$ ثم $g''(x)$.
- أوجد إشارة $g''(x)$ ثم شكل جدول تغيرات $g'(x)$ ثم إستنتج إشارة $g'(x)$.
- شكل جدول تغيرات g ثم إستنتج إشارة $g(x)$.
- إستنتج وضعية (C_{f_1}) بالنسبة للمقارب (Δ_1) .
- أنشئ (C_{f_1}) في المعلم السابق.
- (II) في هذا الجزء نهم بحل المعادلة $f_n(x) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
- (1) تحقق أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n يحقق $f_n(u_n) = 1$ ثم بين أن : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$
- (2) تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $u_n > 1$ و أن u_n حلا للمعادلة $x \ln x = n$ على $]0; +\infty[$
- (3) إعتمادا على رتبة الدالة $x \mapsto x \ln x$ بين أن (u_n) غير محدودة من الأعلى.

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $f_n(u_{n+1}) > 1$ و $f_{n+1}(u_n) > 1$.

(5) بين أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم -99- : Meziane Maths

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \ln(1 + 3e^x)$ ونسمي (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) أدرس إتجاه تغير الدالة f .

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ) برهن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + \ln 3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) حدد الوضعية النسبية بين (C_f) و (d) .

(3) أرسم كل من (d) و المنحنى (C_f) وأرسم كذلك المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(1) أ) مثل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ على محور الفواصل وذلك بإستعمال (C_f) و المستقيم (Δ) .

ب) ضع تخميناً حول رتبة المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) أ) برهن بطريقتين مختلفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n \geq \ln 3$.

ب) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n \geq \ln(3^n)$.

د) إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{2} + e^{u_n}$.

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 3$ مع تحديد حدها الأول.

(2) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n = \ln(3^{n+1} - 1) - \ln 2$.

(3) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n \ln 3} = 1$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = e^{u_0} + e^{u_1} + e^{u_2} + \dots + e^{u_n}$.

تمارين رقم -100- : Meziane Maths

(I) g دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x - 2x \ln x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ حيث : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln(x) \\ f(0) = 0 \end{cases}, x > 0$

و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) برهن أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر (على اليمين).

ب) برهن أن f تقبل الاشتقاق عند 0 لقيم أكبر مع تحديد العدد المشتق من اليمين $f'_d(0)$.

ج) إستنتج معادلة نصف المماس (Δ) لـ (C_f) عند 0.

(3) أ) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) أ) أدرس إشارة $d(x) = x^2 \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) إستنتج الوضع النسبي للمماس (Δ) و (C_f) .

(5) أ) برهن أن $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $[\sqrt{e}; 2]$.

ب) إستنتج أن : $\alpha^\alpha = e$.

ج) بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) عند النقطة ذات الفاصلة α معادلته من الشكل : $y = (-1 - \alpha)x + \alpha(1 + \alpha)$.

(6) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $4Cm$) كل من (Δ) , (T) و المنحنى (C_f) .

III) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

(1) أ) مثل الحدود بإستعمال (C_f) و المستقيم (Δ) u_0, u_1, u_2, u_3 على محور القواصل (مبرزاً خطوط الإنشاء)

ب) ضع تخميناً حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $0 < u_n \leq 1$.

(3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

(4) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.