

دالة أسية نموذجية

I. الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = (1 + x + x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$$

(1) تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $g'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 + 2x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(1 + x + x^2)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2(1 + 2x)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(1 + x + x^2)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2(2x + 1) + (x^2 + x + 1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{2x^3 + x^2 + x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{2x^2(x + 1) + (x + 1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(x + 1)(2x^2 + 1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

ندرس أولا إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x^2 + 1 > 0 \\ x^2 > 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} > 0 \end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$g'(x) > 0$$

نستنتج أن:

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,9 < \alpha < 1$:

لدينا:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$. فهي أيضا مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,9; 1]$.

ولدينا:

$$\begin{cases} g(0,9) = -0.107 \dots \\ g(1) = +0.103 \dots \end{cases}$$

أي:

$$g(0,9) \times g(1) < 0$$

وأيضا:

$$g(0,9) < 0 < g(1)$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,9; 1]$ بحيث:

$$g(\alpha) = 0$$

استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وتعدم من أجل القيمة α ($g(\alpha) = 0$) حيث:

$$-0,107 < g(\alpha) < +0,103$$

ومنه:

• من أجل x من المجال $]0; \alpha]$: $g(x) \leq 0$.

• من أجل x من المجال $]\alpha; +\infty[$: $g(x) > 0$.

نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

• حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

ملاحظة:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $+\infty$ حامل محور الترتيب كمستقيم مقارب عمودي و $x = 0$ معادلة له.

● حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(1) ب) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}x^2e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}(x^2 + x + 1)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-1 + (x^2 + x + 1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \\ &= \frac{(1 + x + x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ من إشارة $g(x)$.

لأن:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$x^2 > 0$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+
$f'(x)$		-	+

ومنه:

● من أجل x من المجال $]0; \alpha[$: $f'(x) \leq 0$

● من أجل x من المجال $]\alpha; +\infty[$: $f'(x) > 0$

نستنتج أن:

● الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$.

● الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(2) تبيان أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = -1$$

نضع:

$$t = -\frac{1}{x}$$

أي:

$$x = -\frac{1}{t}$$

حيث:

عندما x يتوّل إلى $+\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) فإن t يتوّل إلى 0 بقيم أصغر ($t \rightarrow 0$).

فنكتب:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{t} e^t + \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{t} (e^t - 1) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{e^t - 1}{t} \right) \\ &= -1\end{aligned}$$

لأن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

ملاحظة:

يمكن البرهان على هذه النهاية باستعمال العدد المشتق حيث:

$$\begin{cases} u(t) = e^t \text{ و } u'(t) = e^t \\ u(0) = 1 \text{ و } u'(0) = 1 \end{cases}$$

الدالة $t \mapsto e^t$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ونكتب:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(0)}{t - 0} = u'(0) = e^0 = 1$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = -1$$

استنتاج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا كانت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} + x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-\frac{1}{x}} - x) = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

نستنتج أن:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$$

أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $h'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x^2} \end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x^2}$$

إشارة $h'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ من إشارة البسط: $e^{-\frac{1}{x}} - 1$.

لأن:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$x^2 > 0$$

لاحظ أن العبارة $e^{-\frac{1}{x}} - 1$ لا تنعدم على المجال $]0; +\infty[$.

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$e^{-\frac{1}{x}} - 1 < 0$$

أي:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$h'(x) < 0$$

نلخص إشارة $h'(x)$ في الجدول التالي:

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		-

ومنه:

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا:

الدالة h معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

ولدينا أيضا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

فنستنتج أن:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$h(x) > 0$$

نلخص إشارة $h(x)$ في الجدول التالي:

x	0	$+\infty$
$h(x)$		+

(ب) التحقق أن:

$$f(x) - x = (1+x)h(x)$$

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x \\ &= \frac{1-x^2}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x \\ &= \frac{(1-x)(1+x)}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= (1+x) \left(\frac{1-x}{x} + e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= (1+x) \left(\frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= (1+x)h(x) \end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) - x = (1 + x)h(x)$$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا:

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\begin{cases} 1 + x > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

ومنه:

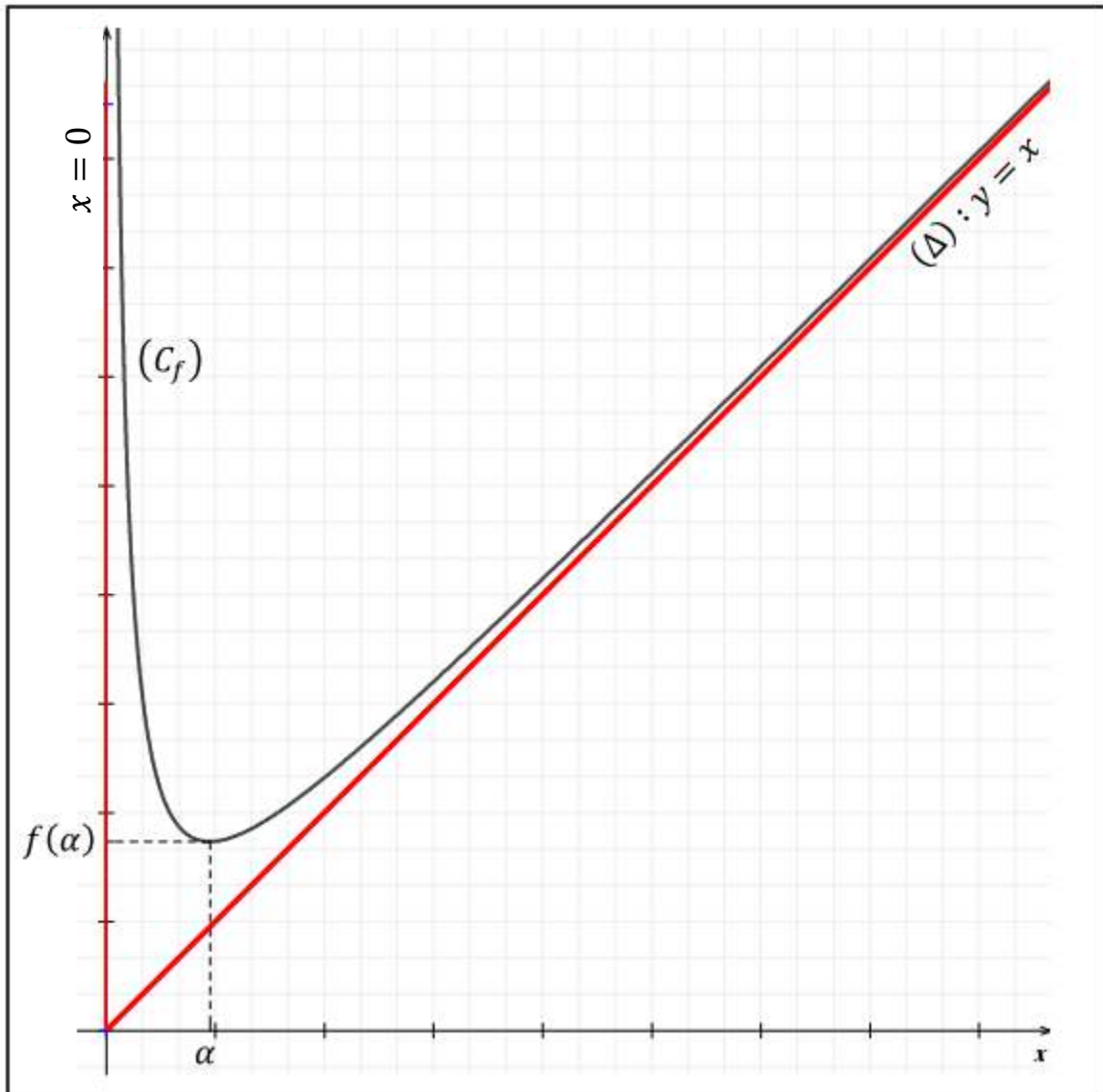
من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) - x = (1 + x)h(x) > 0$$

فنستنتج أن:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقع أعلى المستقيم المقارب المائل (Δ) .

(4) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



(5) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث:

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

(أ) كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \right] - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \left[n + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n} \right] - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \left[n + \frac{n+1}{n} e^{-n} \right] - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1} \\ &= e^{-n} \end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$u_n = e^{-n}$$

تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول u_1 :

تكون المتتالية (u_n) هندسية أساسها q وحدها الأول u_1 إذا كان:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{-(n+1)} \\ u_{n+1} &= e^{-n-1} \\ u_{n+1} &= e^{-1} \times e^{-n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{e} \times e^{-n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{e} \times u_n \end{aligned}$$

ومنه:

المتتالية (u_n) هندسية وأساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول u_1 حيث:

$$u_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(ب) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \right)$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

حيث:

$$v_n = \frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} - \frac{n^2}{n+1} + \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \left[\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}\right] + \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= u_n + \frac{n^2 - 1}{n+1}$$

$$= u_n + \frac{(n+1)(n-1)}{n+1}$$

$$= u_n + (n-1)$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$v_n = u_n + (n-1)$$

فنكتب:

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

$$= (u_1 + 0) + (u_2 + 1) + (u_3 + 2) + \cdots + (u_n + n-1)$$

$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) + (0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

$$= S_1 + S_2$$

حيث:

S_1 هو مجموع n حدا من حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_1 = \frac{1}{e}$.

S_2 هو مجموع n حدا من حدود متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 0.

لدينا:

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}}$$

$$= \frac{1}{e} \times \frac{1 - e^{-n}}{\frac{e-1}{e}}$$

$$= \frac{1 - e^{-n}}{e-1}$$

ومنه:

$$S_1 = \frac{1 - e^{-n}}{e-1}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} S_2 &= 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) \\ &= \frac{n}{2} \times (0 + n - 1) \\ &= \frac{n(n - 1)}{2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$S_2 = \frac{n(n - 1)}{2}$$

نجد:

$$S_n = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1} + \frac{n(n - 1)}{2}$$

=====

=====

جميع الحقوق محفوظة
— BAC —