



الدوال الأسية

لهذه الدوال تطبيقات واسعة ، فالرول الأسية تستعمل على سبيل المثال للتعبير عن النمو والاضمحلال بمرور الزمن ، مثل النمو السكاني غير المحرود أو اضمحلال المواد المشعة . أما الرول اللوغاريتمية فهي أساس مقياس ريختر للزلازل وأساس قياس نسبة الأمحاض في السوائل (مقياس PH). للرول الأسية واللوغاريتمية أيضا دور أساس في الدراسات المالية ، خصوصا في قواعد حساب الفوائد المركبة ومعرفة القمم المستقبلية .

+ لمزيد من الأعمال...



- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوليات شهادة البكالوريا مع الحل
- فروض واختبارات محلولة لكل المستويات

تجدون في هذا الملف

- 1 الدرس
- 2 تطبيقات محلولة
- 3 مسائل ☆☆☆☆
- 4 مسائل ☆☆☆☆
- 5 مسائل ☆☆☆☆
- 6 مسائل ☆☆☆☆
- 7 مسائل ☆☆☆☆
- 8 حلول المسائل

الأستاذ: عبد الحفيظ عادل

1 تعريف الدالة الأسية :

[1]

تعريف: الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق :
 $f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ ونكتب $f(x) = \exp(x)$ أو $f(x) = e^x$

خواص: x و y عدنان حقيقيان و $n \in \mathbb{Z}$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^1 = e \approx 2,71, \quad e^0 = 1$$

$$e^{\ln x} = x : x > 0 \quad \text{ومن أجل كل} \quad \ln e^x = x, \quad e^x > 0, \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

$$x \geq y \text{ يعني } e^x \geq e^y, \quad x \leq y \text{ يعني } e^x \leq e^y, \quad x = y \text{ يعني } e^x = e^y$$

■ دراسة تغيرات الدالة الأسية:

1 مجموعة التعريف لدينا : $f(x) = e^x$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$ إذن $D_f =]-\infty; +\infty[$

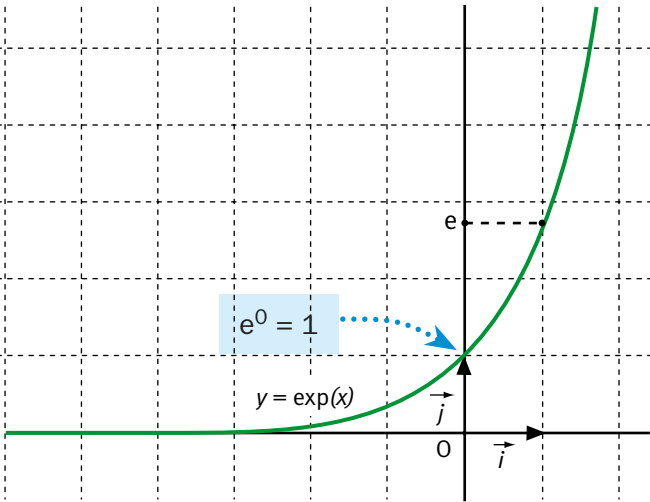
2 النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

3 اتجاه التغير : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = e^x > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

5 التمثيل البياني :

4 جدول التغيرات : [2]

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		+	+
$\exp(x) = e^x$	0	1	$+\infty$



الانتقال
الى الحل

تطبيق 01: بسط العبارات التالية : [3]

$$(1) (e^x)^4 \times e^{-3x} \quad (2) \frac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}} \quad (3) \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} \quad (4) e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$$

الحل:



تطبيق 02:

$$e^{-2x} = 1 \quad (1)$$

$$e^{3x-8} = \frac{1}{e^2} \quad (2)$$

الحل:

تطبيق 03:

$$e^x > -2 \quad (1)$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

2

مہر ہفتہ:

 [1]

الانتقال

➡ إلى الحل



تطبيق 04:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x \quad (7)$$

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad (5)$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad (6)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1} \quad (2)$$

الحل:

مشتقة دالة أسية :

 [1]

نضع $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية .

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على

المجال I وبالتالي : $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

الانتقال

إلى الحل



[4]

أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة

الحل:

[illegible]

4 النهايات الشريرة:

مبرهنة:

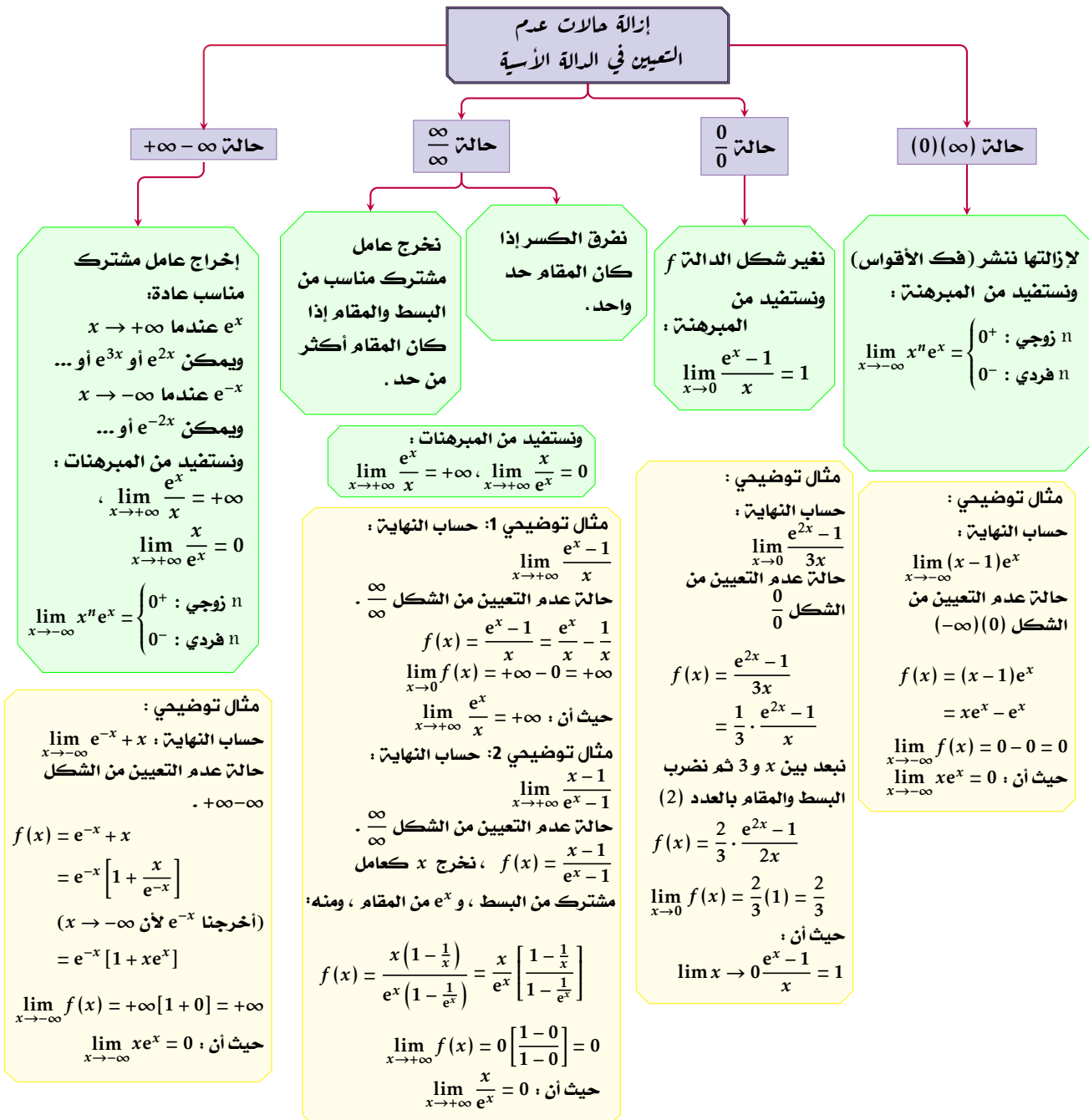
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

[1]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ : \text{زوجي } n \\ 0^- : \text{فردى } n \end{cases}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا:

■ إزالة حالات عدم التعيين:



➔ إلى الحل

[3] : i

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)e^{-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - 7x) \quad (2)$$

[illegible]

5 المعادلات التفاضلية :

- تعريف:**
- المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرسم إليها غالبا بالرمز y ، z ، ...
 - كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى .
 - حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$

[1]

■ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay$

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم
 حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^{ax}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

الانتقال
 إلى الحل

تطبيق 07: [5]

• f_1 حل للمعادلة التفاضلية $y' = y$ و الذي يحقق $f_1(0) = -3$. عيّن عبارة f_1

الحل:

■ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

مبرهنة: a و b عددين حقيقيين مع a غير معدوم
 حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

الانتقال
 إلى الحل

تطبيق 08: [5]

• f_1 حل للمعادلة التفاضلية $y' = 2y + 4$ و الذي يحقق $f_1(0) = 3$. عيّن عبارة f_1

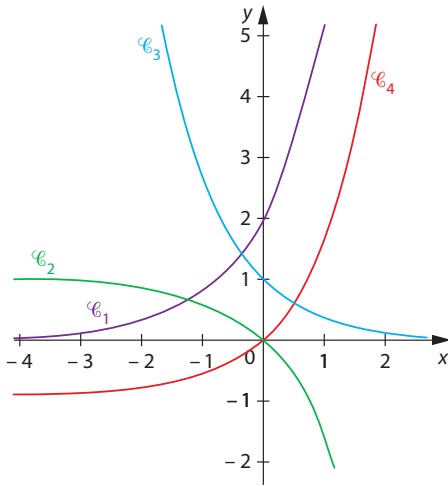
الحل:

6 تحقق من فهمك الجيد للدرس : الانتقال الى الحل

- 18 ليس للمراجعة $e^{x^2-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$ ☐
- 19 الدالة : $x \mapsto e^{x^2-4}$ هي حل للمعادلة $y' = y$ ☐
- 20 $e^{-\frac{1}{2}} < 1$ ☐

6 صل بما يناسب:

- ($\mathcal{C}_1$) $f: x \mapsto 2e^x$
- ($\mathcal{C}_2$) $k: x \mapsto e^{-x}$
- ($\mathcal{C}_3$) $g: x \mapsto 1 - e^x$
- ($\mathcal{C}_4$) $l: x \mapsto e^x - 1$



4 أجب ب "صح" أو "خطأ":

- 1 $e^{-3} < 0$ ☐
- 2 $e^{-5} = -e^5$ ☐
- 3 $\sqrt{e^{2x}} = e^x$ ☐
- 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ☐

5 الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي $x \mapsto e^{3x}$ ☐

- 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ☐

7 إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^x \geq e^2$ ☐

8 إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^x \leq 0$ ☐

9 من أجل كل عدد حقيقي $x: e^x \cdot e^{-x} = 1$ ☐

10 إشارة : $(x-1)e^x$ هي نفس إشارة $x-1$ ☐

11 من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$ ☐

12 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$ ☐

13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ex}{x^3} = +\infty$ ☐

14 $e^x - e = e^{x-1}$ ☐

15 $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$ ☐

16 التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^x$ يقطع محور الفواصل. ☐

17 الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ☐



تطبيق 01: [3]

$$(e^x)^4 \times e^{-3x} = e^{4x} \times e^{-3x} = e^{4x-3x} = e^x \quad 1$$

$$\frac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}} = e^{3x+4} \times e^{-(3x+2)} = e^{3x+4} \times e^{-3x-2} = e^{3x+4-3x-2} = e^2 \quad 2$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = e^x (e^x + e^{-x}) = e^{2x} + e^{x-x} = e^{2x} + 1 \quad 3$$

$$e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}) = 2 \quad 4$$



تطبيق 02: [3]

$$e^{-2x} = 1 \quad 1 \quad \text{تكافئ } e^{-2x} = e^0 \text{ أي } -2x = 0 \text{ ومنه } x = 0 \text{ إذن } S = \{0\}$$

$$e^{3x-8} = \frac{1}{e^2} \quad 2 \quad \text{تكافئ } e^{3x-8} = e^{-2} \text{ ومنه } 3x - 8 = -2 \text{ وبالتالي } S = \{2\}$$

$$e^{x^2+9} = e^{6x} \quad 3 \quad \text{تكافئ } x^2 + 9 = 6x \text{ تكافئ } x^2 - 6x + 9 = 0 \text{ ومنه } S = \{3\}$$

$$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 \quad 4 \quad \text{تكافئ } (e^x)^2 + 5(e^x) - 6 = 0, \text{ بوضع } e^x = X \text{ نحصل على}$$

$$X^2 + 5X - 6 = 0 \text{ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد } X = 1 \text{ أو } X = -6$$

$$\text{ومنه } e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 \text{ تكافئ } e^x = 1 \text{ أو } e^x = -6 \text{ (حالة مرفوضة لأن } e^x > 0 \text{).}$$

$$\text{إذن فقط لدينا } e^x = 1 \text{ ومنه } x = 0 \text{ وأخيرا } S = \{0\}.$$

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \quad 5 \quad \text{تكافئ } e^x - \frac{3}{e^x} + 2 = 0 \text{ تكافئ } e^x - 3e^{-x} + 2 = 0$$

$$\text{بوضع } e^x = X \text{ نحصل على } X^2 + 2X - 3 = 0 \text{ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد}$$

$$X = 1 \text{ أو } X = -3 \text{ ومنه } e^x - 3e^{-x} + 2 = 0 \text{ تكافئ } e^x = 1 \text{ أو } e^x = -3$$

$$(\text{حالة مرفوضة لأن } e^x > 0 \text{). إذن فقط لدينا } e^x = 1 \text{ ومنه } x = 0 \text{ وأخيرا } S = \{0\}.$$



تطبيق 03: [3]

1 $e^x > -2$ دوما محققة لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x > 0$ وبالتالي $S = \mathbb{R}$.

2 $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ لدينا دوما $e^x + 3 > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 3)$ لها نفس إشارة $e^x - 1$.

$(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ تكافئ $e^x - 1 < 0$ تكافئ $e^x < 1$ تكافئ $e^x < e^0$ تكافئ $x < 0$ وأخيرا $S =]-\infty, 0[$.

3 $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0$ تكافئ $e^x - \frac{5}{e^x} + 4 \leq 0$ تكافئ $e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0$

بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + 4X - 5 \leq 0$ ومنه $(X - 1)(X + 5) \leq 0$ وهذه تكافئ

$(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ لدينا دوما $e^x + 5 > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 5)$ لها نفس إشارة $e^x - 1$.

$(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ تكافئ $e^x - 1 \leq 0$ تكافئ $e^x \leq 1$ تكافئ $e^x \leq e^0$ تكافئ $x \leq 0$ وأخيرا $S =]-\infty, 0]$.



تطبيق 04: [4]

1 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \geq 0\}$

وهي محققة دوما لأن $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2 لدينا : $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$

3 لدينا : $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

4 لدينا : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$

5 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \geq 0\}$

ومنه : $e^x - 1 \geq 0$ وعليه : $e^x \geq 1$ وبالتالي : $x \geq 0$ إذن : $D_f = [0; +\infty[$

6 لدينا : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

7 لدينا : $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ حيث : $D_f = \mathbb{R}$

8 لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.



تطبيق 05: [4]

$$f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x} \quad 1$$

$$f'(x) = (1+x)e^{x-1} \quad \text{ومنه} \quad f'(x) = 1.e^{x-1} + xe^{x-1} \quad 2$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad 3$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \quad 4$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} \quad 5$$

$$f'(x) = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x) \quad \text{ومنه} \quad f'(x) = \cos x \cdot e^{\cos x} + \sin x (-\sin x) e^{\cos x} \quad 6$$

$$f'(x) = (\cos^2 x + \cos x - 1) e^{\cos x} \quad \text{وبالتالي} \quad f'(x) = e^{\cos x} [\cos x - (1 - \cos^2 x)] \quad \text{وعليه} \quad 7$$

$$f'(x) = (2x - 4 + x^2 - 4x + 5) e^x \quad \text{وعليه} \quad f'(x) = (2x - 4) e^{3x} + (x^2 - 4x + 5) e^x \quad 7$$

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 1) e^x \quad \text{ومنه} \quad 8$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 1) e^x}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{ومنه} \quad f'(x) = \frac{e^x (x^2 - 1) - 2x \cdot e^x}{(x^2 - 1)^2} \quad 8$$



تطبيق 06: [4] [3]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1) e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = 3(0) - 0 = 0 \quad 1$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - 7x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 \frac{e^x}{x} - 7 \right) = +\infty \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 e^x}{x^2 + 2} = 0 \quad 3$$

つづく

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) \quad 4$$

نضع $X = \frac{1}{x}$ عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $X \rightarrow 0$ نستعمل النهاية الشهيرة $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ نحصل على

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

5 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$ نضرب في العدد الحقيقي الموجب تماما e^{-x}

نحصل على $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ أي $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ وبالتالي حسب مبرهنة النهايات والحصص تكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = e^{-x} \times \frac{(e^{2x} - 1)}{x} \times \frac{x}{\sin x} : x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad 6$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times 1 = 2$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

لدينا كذلك $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{-x} \times \frac{(e^{2x} - 1)}{x} \times \frac{x}{\sin x} \right] = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\left(\frac{1}{x} = t : \text{نضع} \right) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \quad 8$$



[5]

تطبيق 07:

$y' = y$ معناه $y(x) = C'e^x$

لدينا إذن: $f_1(x) = C'e^x$ و $f_1(0) = -3$ وبالتالي : $f_1(x) = -3e^x$



تطبيق 08:

$y' = 2y + 4$ معناه $y(x) = Ce^{2x} - 2$

لدينا إذن: $f_1(x) = Ce^{2x} - 2$ و $f_1(0) = 3$ وبالتالي : $f_1(x) = 5e^{2x} - 2$



تحقق من فهمك الجيد للدرس :

6

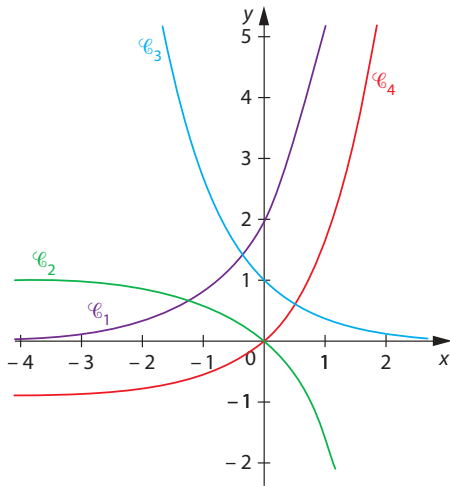
18 ليس للمراجعة $e^{x^2-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$ ☒

19 الدالة $x \mapsto e^{x^2-4}$ هي حل للمعادلة $y' = y$ ☒

20 $e^{-\frac{1}{2}} < 1$ ☒

6 صل بما يناسب:

($\mathcal{C}_1$) $\longrightarrow f: x \mapsto 2e^x$
 ($\mathcal{C}_2$) $\longrightarrow k: x \mapsto e^{-x}$
 ($\mathcal{C}_3$) $\longrightarrow g: x \mapsto 1 - e^x$
 ($\mathcal{C}_4$) $\longrightarrow l: x \mapsto e^x - 1$



4 أجب ب "صح" أو "خطأ":

1 $e^{-3} < 0$ ☒

2 $e^{-5} = -e^5$ ☒

3 $\sqrt{e^{2x}} = e^x$ ☒

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ☒

5 الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي $x \mapsto e^{3x}$

6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ☒

7 إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^x \geq e^2$ ☒

8 إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^x \leq 0$ ☒

9 من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \cdot e^{-x} = 1$ ☒

10 إشارة $(x-1)e^x$ هي نفس إشارة $x-1$ ☒

11 من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$ ☒

12 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$ ☒

13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ex}{x^3} = +\infty$ ☒

14 $e^x - e = e^{x-1}$ ☒

15 $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$ ☒

16 التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^x$ يقطع محور الفواصل.

☒

17 الدالة $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

☒

الانتقال

إلى الحل

سلسلة الدوال الأسية (مصطفى عبد العزيز)

1

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 حدد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

4 بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$ ، وفسر النتيجة هندسياً.

5 بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

6 احسب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل ثم ارسم كلا من (T) و (C_f) .

7 ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x = m+1$

الانتقال

إلى الحل

الديوان الوطني لامتحانات والمسابقات

2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ حيث وحدة الطول هي 1cm .

1 بين أن الدالة f فردية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟

2 أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^{-x} + 1}$

ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3 أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ج) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) .

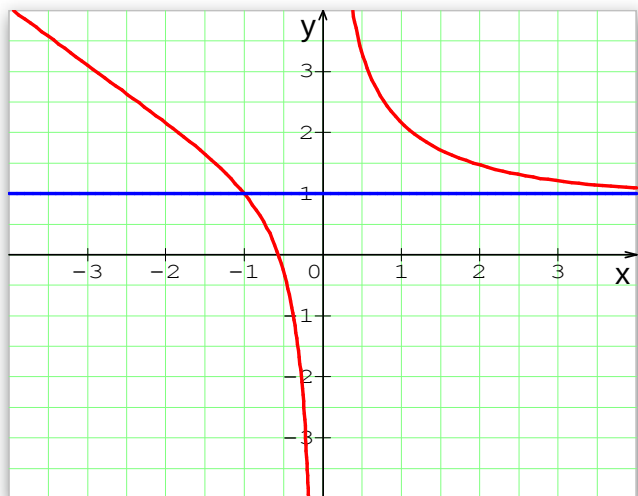
4 أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5 عين معادلة لـ (d) مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

6 أرسم (d) ، (Δ) ، (Δ') و (C) حيث (Δ') هو المستقيم المقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

الجزء A :

المنحني (C) في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
محور الترتيب و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقاربان للمنحني (C).



1 اقرأ بيانيا نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

2 حل بيانيا كل من : أ) $f(x)=1$ ؛ ب) $f(x)>1$

الجزء B :

نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$

1 أ- تحقق أن : $f(x) = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$

ب- نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، جد من جديد إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 أ- ادرس ، حسب قيم x إشارة $(e^x - 1)$

ب- حل المترجحة $\frac{e^x + x}{e^x - 1} > 1$

3 بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$. ماذا تستنتج ؟

4 ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = -x$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$.

3 أ- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادليهما : $x = \alpha$ ، $x = 0$.

ب- أثبت أن : $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$ (حيث ua هي وحدة المساحات).

- I
- 1 (أ) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.
 احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)
 (ب) بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.
 (ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.
- 3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .
- II
- 1 (أ) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; i, j)$.
 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (ب) بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ ، (حيث f' هي مشتقة الدالة f).
 (ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2 (أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 (ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
 (ج) أنشئ المنحنى (C_f) . (تُعطى $f(\alpha) \approx 0.29$)

مسائل المستوى الثاني



الانتقال

الى الحل

علوم تجريبية 2008 الموضوع الأول (07,5 نقط) ★★

1

I نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانياً. (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

2 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

3 بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها.

4 أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

5 أرسم (C_g) .

6 H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان

- عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .

III لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$ باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الانتقال

الى الحل

علوم تجريبية 2019 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

2

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول 2 cm

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

1 أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3 احسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4 ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5 ارسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يُعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6 احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

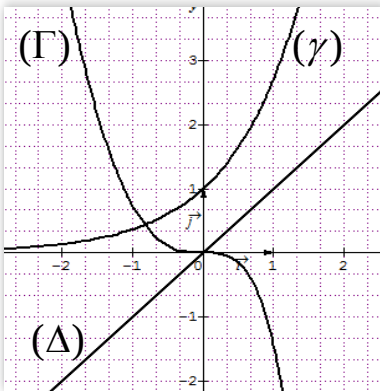
7 h الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أن h دالة زوجية.

ب) من أجل $x \in [0; 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه.

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$: Δ المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x \mapsto e^x$.
بقراءة بيانية:



1 بزر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - x > 0$

2 حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أن $g(0) = 0$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ واحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

2 أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 أ. اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$

ج. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$ ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

4 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1]$ ، ثم تحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

5 أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; i, j)$.

1 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة، ثم احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x) \geq 0$ ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

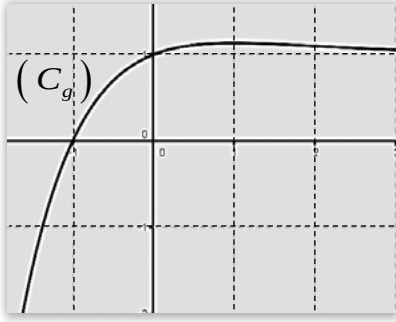
2 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0.7 < \alpha < -0.6$.

3 أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

4 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.



(I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل)

1 احسب $g(-1)$.

2 بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 تَحَقَّقْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِي x غَيْرِ مَعْدُومٍ: $f(x) = x[1 - (1 + \frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أ. بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِي x : $f'(x) = g(x)$

ب. اسْتَنْتِجْ أَنَّ الدالة f متزايدة تماماً على $[-1; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty; -1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3 أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ج. بَيِّنْ أَنَّ (C_f) يقبل مماساً (T) موازياً للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4 أ. بَيِّنْ أَنَّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها α و β

حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ و $-1,9 < \beta < -1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

5 الدالة العددية h معرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ: $h(x) = -|x| + (|x| - 1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بَيِّنْ أَنَّ الدالة h زوجية.

ب. بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِي x مِنَ الْمَجَالِ $[-2; 0]$: $h(x) = f(x)$

ج. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثمّ ارسمه.

مسائل المستوى الثالث



الانتقال

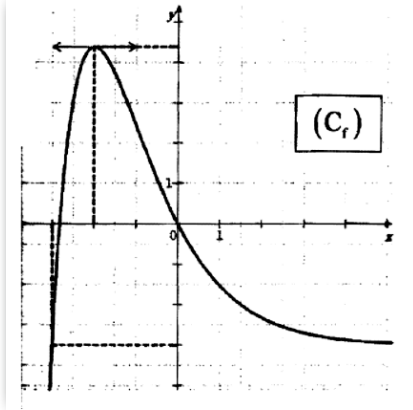
الى الحل

☆☆☆

تسيير واقتصاد 2009 الموضوع الثاني (05 نقاط)

BAC

1



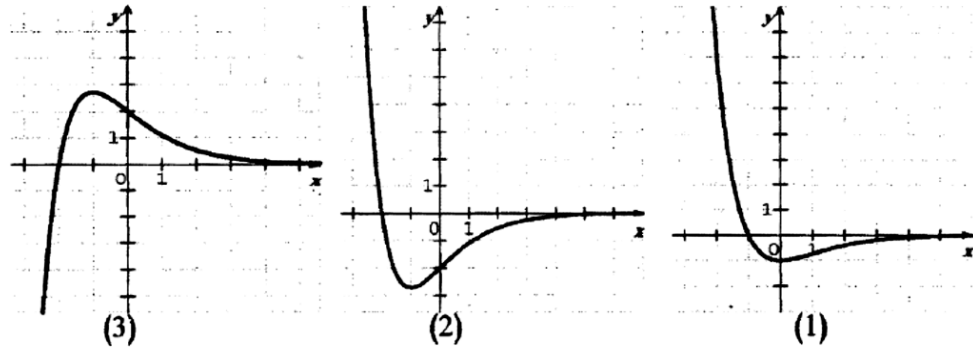
$f(x) = (x + a)e^{-x} + b$ بالعارة: $\mathbb{R}$ على
حيث a و b عدنان حقيقيان وليكن (C_f) تمثيلها البياني في
مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 بقراءة بيانية للمنحنى (C_f) :

أ) عين $f(-3)$, $f(0)$, $f'(-2)$.

ب) عين حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

ج) من بين المنحنيات الثلاثة (1)، (2)، (3) عين، مع التبرير، المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f .



2 أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يتطلب تعيين معادلة له.

د) بين أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين 1,50 و 1,52.

3 نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = (-x - 4)e^{-x}$ وليكن I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^0 f(x) dx$.

أ) احسب $F'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) أعط تفسيرا بيانيا للعدد I مبررا الحصر التالي $4,5 < I < 5$ بإعتبارات بيانية محضة.

ج) احسب العدد I .

الانتقال

الى الحل

☆☆☆

علوم تجريبية 2013 الموضوع الأول (06.5 نقاط)

BAC

2

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

1 f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ ب: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

2 احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد

حصرا للعدد α .

تتو

- 4 أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.
- 5 عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.
- (II) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x - 1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)
- 1 أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2 أ. تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $2f'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$.
- ب. استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.
- ج. تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

الانتقال
إلى الحل

3 رياضيات 2017 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★ BAC

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$.
- 1 أ. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له.
- ب. بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.
- 2 اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.
- 3 الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.
- 4 ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.
- 5 نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x) = m(x - 2) \dots (E)$ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .
- 6 الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكّل جدول تغيرات الدالة g .

الانتقال
إلى الحل

4 رياضيات 2010 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★ BAC

- (I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (3 - x)e^x - 3$.
- 1 ادرس تغيرات الدالة g .
- 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$.
- 3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

تتبع

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

($\mathcal{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، اكتب معادلة (T) مماس ($\mathcal{C}_f$) عند المبدأ O .

2 أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$.

ج- تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عين حصراه.

د- أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3 احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ ($\mathcal{C}_f$) و ($\mathcal{C}$) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$.

بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسياً.

4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين ($\mathcal{C}$) و ($\mathcal{C}_f$).

الانتقال

إلى الحل

★ ★ ★ تقني رياضي 2019 الموضوع الأول (07 نقاط)

5

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x+3)e^x - 1$

و ($\mathcal{C}_g$) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.

بقراءة بيانية

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1; \frac{-1}{2}\right[$

بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقّق أنّ: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

و ($\mathcal{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

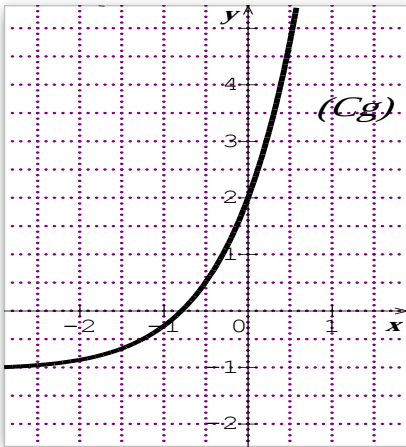
1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 بين أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أنّ ($\mathcal{C}_f$) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادله.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى ($\mathcal{C}_f$) و المستقيم (Δ).

ج) اكتب معادلة لـ (T) مماس ($\mathcal{C}_f$) الموازي للمستقيم (Δ).



4 ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$)

5 احسب $f(x) - g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن الدالة h زوجية .

ب) تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإنّ : $h(x) = f(x-2) + 1$.

ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$.

■ نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 2x + \frac{2e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x) = 0$

2 حل $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

الجزء الثاني:

1 بين انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $f(-x) + f(x) = -3$ ؛ ماذا تستنتج بيانيا ؟

2 (أ) بين انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $f(x) = 2x + \frac{2 - e^x}{e^x - 1}$

- أوجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x$ ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) - أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ج) - حدد إشارة $(1 - e^{-x})$ على $\mathbb{R}$ ثم أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(د) - استنتج أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقارنة من بينها مقارين مائلين (Δ') و (Δ)

- يطلب معادلة كل منهم .

3 (أ) - برهن انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$

(ب) - استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

4 أرسم كل من المنحنى (C_f) و المقاربات .

5 α عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول الحقيقي x حيث

$$(-2 - \ln \alpha)e^{-x} + 1 + \ln \alpha = 0 \rightarrow (1)$$

- أوجد قيم α التي من أجلها المعادلة (1) لاتقبل حلا في $\mathbb{R}$.

(أ) - بيانيا (ب) - حسابيا .

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$.

1 بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9 < \alpha < 1$ ،

و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x) = -1$ (يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3 الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.

أ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.

ب تحقّق أن $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) = 1.73$) .

5 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بعدها العام u_n حيث : $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$.

أ اكتب u_n بدلالة n ثم بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1 .

ب احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.

ب ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيراتها .

2 بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاً α يختلف عن 1 ثم تحقّق أن : $2.79 < \alpha < 2.80$.

3 استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.
(أ) (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانيان في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; i, j)$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3 ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

4 **(أ)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

(ب) ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

(ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t) dt$.

(د) احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

III **1** احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخميناً لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
(أ) $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f .

2 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)]e^{1-x}$.

3 (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

(أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$.

(ب) استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$.

4

BAC

رياضيات 2017 الدورة الاستثنائية الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★★

الانتقال

إلى المحل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1cm$.

I نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 أثبت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما، احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المنحنى (C) .

II ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$.
 وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1 أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيهما.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.

3 M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$.

أثبت أنّه عندما m يسمح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيين معادلة له.

4 ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m \neq 2$ ، الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

5 احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماماً α ، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين

(C) و (C_3) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

(I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي. ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.
- 2 احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).
- 3 (أ) احسب $f'_k(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k .
(ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.
- 4 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$.
- 2 (أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28 < \alpha < -1,27$.
(ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3 g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+1)e^{-2x}$.

- (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ثم استنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.
- (ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = -1$ و $x = 0$.

مسائل المستوى الخامس



الانتقال

إلى الحل

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(نأخذ $1cm$ وحدة الطول على محور الفواصل و $2cm$ وحدة الطول على محور الترتيب) .

1 برهن ان الدالة f تقبل الصفر كنهاية عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$. (يمكنك استبدال المتغير بوضع $t = \frac{1}{2}(x-1)^2$)

2 برهن ان f تقبل الاشتقاق على IR و من اجل كل x من IR لدينا: $f'(x) = x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

3 اوجد إشارة $f'(x)$ على IR ، ثم استنتج اتجاه تغير f .

4 شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة من $(\mathcal{C}_f)$ ذات الفاصلة $(+1)$.

6 برهن ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) تشمل مبدأ المعلم ؛ يطلب تحديد :

(أ) إحداثيتي نقطة التماس لكل واحد منهم (القيم تكون مضبوطة) .

(ب) معامل توجيه لكل مماس (القيم تكون مضبوطة) . ثم أكتب معادلة لكل من (d_1) ، (d_2) و (d_3) .

7 أرسم كل من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) في المعلم السابق .

8 m عدد حقيقي ، نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx$.

(أ) برهن ان (d_m) يشمل نقطة ثابتة يطلب إحداثياها .

(ب) بقراءة بيانية ، اوجد قيم m الحقيقية التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايضة .

الانتقال

إلى الحل

تمارين مقترحة (ساعد أحمد)

2

أولاً : g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (4-2x)e^x - 4$.

1 أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

ثانياً : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن المنحنى (C_f) يقبل عند $-\infty$ وعند $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

2 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

3 استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

تتو

4 أحسب $f(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

5 بين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6 أنشئ المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f) .

ثالثا: (أ) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x - 2 = (e^x - 2x)m$.

(ب) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 2)$.

رابعا: 1 لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = -f(x)$

(أ) أحسب $F'(x)$ بدلالة $f'(x)$ واستنتج إشارة $F'(x)$.

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة F وانشئ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

2 لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

* أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $h'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

3 لتكن u الدالة المعرفة كما يلي : $u(x) = \frac{1}{f(x)}$

(أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة u .

(ب) أحسب $u'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $u'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة u .

4 لتكن v الدالة المعرفة كما يلي : $v(x) = \sqrt{f(x)}$

(أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة v .

(ب) أحسب $v'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $v'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة v .

5 لتكن s الدالة المعرفة كما يلي : $s(x) = \ln f(x)$

(أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة s .

(ب) أحسب $s'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $s'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة s .

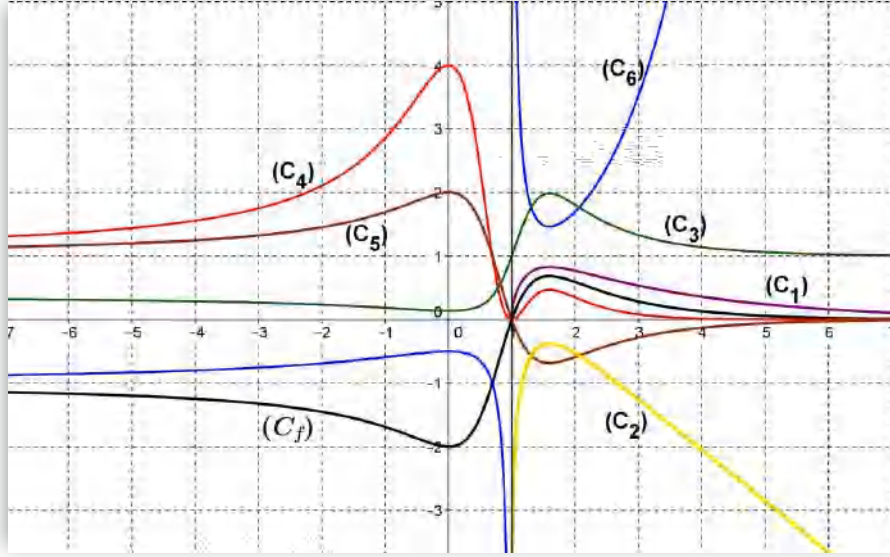
6 لتكن t الدالة المعرفة كما يلي : $t(x) = e^{f(x)}$

(أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة t .

(ب) أحسب $t'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $t'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة t .

خامسا: أرفق كل دالة بتمثيلها البياني

المنحني	(C ₁)	(C ₂)	(C ₃)	(C ₄)	(C ₅)	(C ₆)
هو التمثيل البياني للدالة.....						



الانتقال

الى الحل

تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى) ★★★★★

3

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لتكن الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x) = x^n e^{-x}$.
ولیکن (C_n) تمثيلها البياني في معلم م . م . تعطى التمثيلات (C_1) و (C_2) و (C_3) في الشكل المرفق .
الجزء الأول : في الشكل المعطى مثلنا المنحني (C_k) حيث k عدد طبيعي غير معدوم ورسمنا مماسا له (T_k) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ورسمنا المنحني (C_3) و المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{4}{5}; 0\right)$.

1 أ) عين نهايات الدالة f_1 عند $+\infty$ و $-\infty$

ب) ادرس تغيرات الدالة f_1 ثم حدد تغيراتها

ج) باستعمال المنحني برر ان k هو عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2

2 أ) برهن انه من اجل $n > 1$ فان كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة O ونقطة أخرى يطلب تعيين احداثياتها

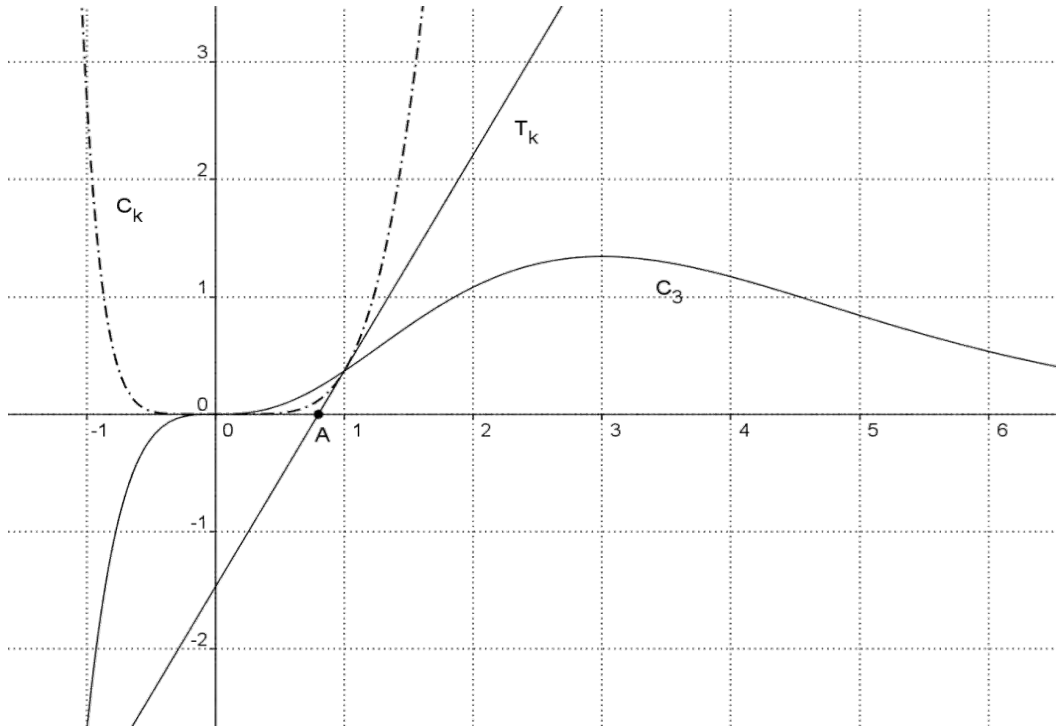
ب) تحقق انه من اجل $n \geq 2$ ومن اجل كل حقيقي x : $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$ فان

3 في الشكل المعطى يبدو ان الدالة f_3 تقبل قيمة حدية كبرى عندما $x = 3$. تحقق من هذا التخمين بواسطة البرهان على ذلك .

4 أ) برهن ان المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right)$

ب) استنتج من خلال معطيات التمرين قيمة العدد الصحيح k

٢٢٢

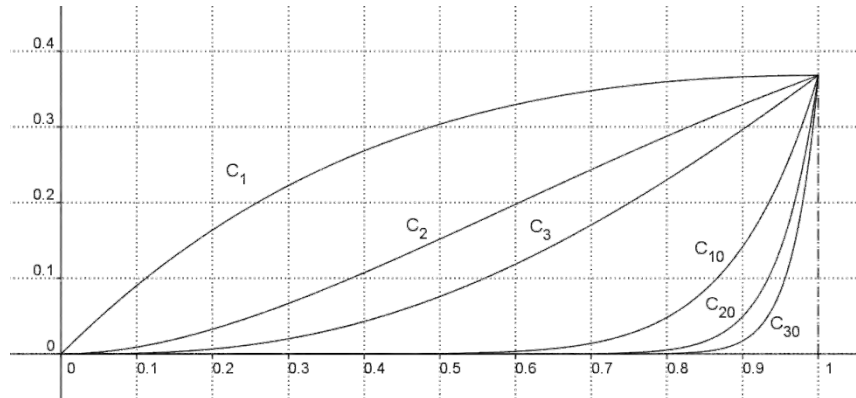


الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1 احسب (I_1)

2 في الشكل المقابل مثلنا الأجزاء من المنحنيات (C_1) و (C_2) و (C_3) و (C_{10}) و (C_{20}) و (C_{30}) في $[0,1]$



أ) بين بذكر تخمين مناسب حول اتجاه تغير المتتالية (I_n)

ب) برهن هذا التخمين

ج) استنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة

د) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2ae^x + 3$.

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 عين حسب قيم الوسيط الحقيقي α عدد القيم الحدية للدالة f_α

2 نسمي ω_α النقطة الحدية في حالة وجودها :

أ) عين بدلالة α إحداثي النقطة ω_α .

ب) عين مجموعة النقط ω_α لما α يسمح $\mathbb{R}_+$.

الجزء الثاني :

نضع في كل ما يأتي : $\alpha = 1$ ، ولنكن f_1 الدالة التي نريد دراستها و (C_1) تمثيلها البياني .

1 أدرس تغيرات الدالة f_1 ، والمستقيمات المقاربة .

2 عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

3 أنشئ كلا من (T) و (C_1) .

4 عائلات المستقيمات المعرفة بـ : $y = mx + 3 - m \ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي .

أ) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) ناقش بياناً و حسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) .

5 نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي : $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ ، و (C') منحناها البياني :

أ) أكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$ ، ثم بين أن (C') و المنحني (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) يطلب تحديد معادلته .

ب) أنشئ المنحني (C') في المعلم السابق .

6 أ) أحسب بـ cm^2 ، $\delta(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C') والمستقيمين :

$$x = \ln 2 , x = \lambda , \lambda < 0$$

ب) أحسب نهاية $\delta(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $-\infty$.

ج) α عدد حقيقي أكبر تماماً من $\ln 2$.

- جد قيمة α حتى تكون مساحة الحيز المحدود بالمنحنيين (C_1) و (C') والمستقيمين :

$$x = \ln 2 , x = \alpha$$

في كل المسألة ، نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.
نرفق بكل عدد حقيقي α الدالة العددية f_α للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f_\alpha(x) = (x - \alpha)^2 e^x$ و (C_α) تمثيلها البياني .

الجزء الأول : نعتبر في هذا الجزء من أجل $\alpha = 0$ الدالة f_0 المعرفة بـ : $f_0(x) = x^2 e^x$

1 احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

2 أ- أثبت أن الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f'_0(x)$.
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f_0 .

3 شكل جدول تغيرات الدالة f_0 ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$.

4 أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$ لدينا : $0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-x-2}$.

5 أثبت أن (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما .

6 اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_0) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7 ليكن x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس للمنحنى (C_0) في النقطة ذات الفاصلة x_0 .
أ- هل يمكن تعيين x_0 حتى يكون (T) يوازي حامل محور الفواصل ؟
ب- هل يمكن تعيين x_0 حتى يكون (T) عمودي على المستقيم (Δ) ؟

8 أرسم كل من (Δ) و المنحنى (C_f) .

9 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عدد و إشارة حلول المعادلة : $2 \ln |x| + x - \ln(m) = 0$.

الجزء الثاني : نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $f_0^{(1)}, f_0^{(2)}, f_0^{(3)}, \dots, f_0^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f_0 .

1 احسب كل من $f_0^{(1)}(x), f_0^{(2)}(x), f_0^{(3)}(x)$.

2 برهن بالتراجع من أجل كل $n \geq 1$: $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) e^x$ حيث a_n و b_n عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

3 تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ b_{n+1} = b_n + a_n \end{cases}$

4 أثبت أن (a_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r .

5 بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

الجزء الثالث : لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x) = |x| \sqrt{e^x}$ و (C_k) تمثيلها البياني .

1 اكتب $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة . ادرس استمرارية الدالة k عند 0 .

2 ادرس قابلية اشتقاق الدالة k على يمين و على يسار 0 ، فسر النتيجة هندسياً .

3 اكتب معادلتى المماسين لـ (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4 بين أنه يمكن اعتبار الدالة k كمركب دالتين عدديتين إحداهما الدالة f_0 .

5 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \sqrt{f_0(x)}$.

6 استنتج اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

7 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x}$ ، فسر النتيجة هندسياً .

8 ارسم (C_k) بيان الدالة h في معلم آخر .

9 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $|x| \sqrt{e^x} + x - m = 0$.

الجزء الرابع : نعتبر الآن عدد حقيقي كفي .

1 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\alpha(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$.

2 اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'_\alpha(x) = (2 + x - \alpha)(x - \alpha)e^x$.

3 ادرس اتجاه تغير الدالة f_α ثم شكل جدول تغيراتها .

4 احسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''_\alpha(x)$ و $f'''_\alpha(x)$.

5 بين بالتراجع على العدد الطبيعي n الغير معدوم أن : $f_\alpha^{(n)}(x) = [(x + n - \alpha)^2 - n] e^x$.

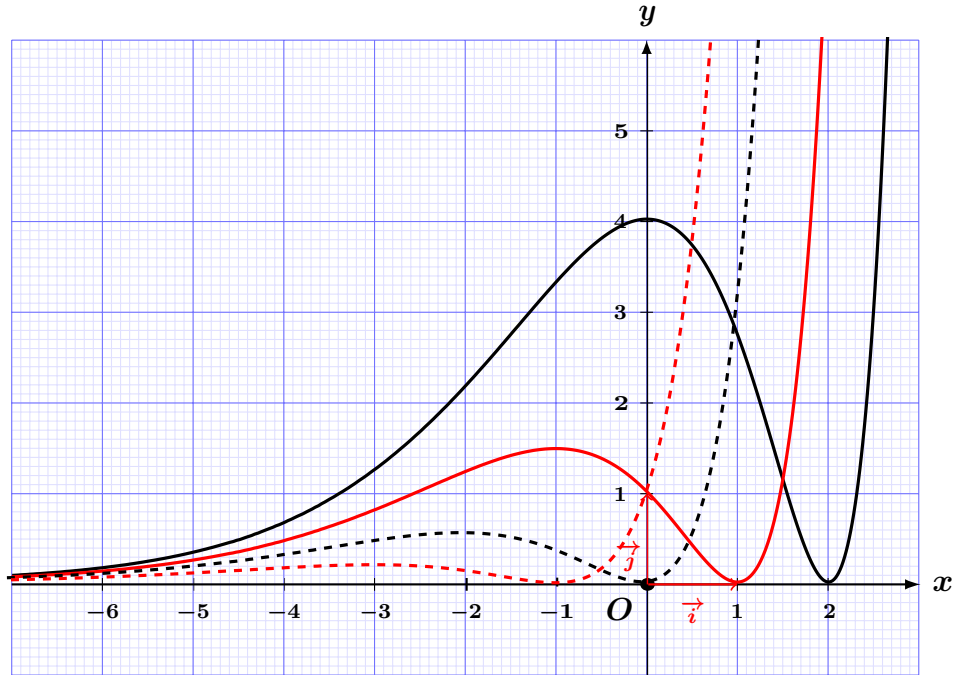
حيث $f_\alpha^{(n)}$ هي الدالة المشتقة النونية للدالة f_α على $\mathbb{R}$.

6 بين أن كل المنحنيات (C_α) تقبل نقطتي انعطاف فاصلتهما x_1 و x_2 يطلب تعيينهما .

7 كيف نختار قيمة α حتى يكون $x_2 < 0 < x_1$.

8 إليك الشكل الموالي الذي يشتمل على أربع منحنيات موافقة لأربع قيم مختلفة للوسيط α .

- تعرف على هذه القيم الأربعة مع التعليق .





سلسلة الدوال الأسية (مصطفى عبد العزيز)

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - 1 = -1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (3 + e^{-x})}{e^x (1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})} = \frac{3}{1} = 3$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3e^x (e^x + 1) - e^x (3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \text{ ولدينا} \\ &= \frac{e^x (3(e^x + 1) - (3e^x - 1))}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x (3e^x + 3 - 3e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ لأن $4e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	3

3. تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 3$ بجوار $+\infty$.

4. تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$.

$$f(x) + f(-x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{e^{-x}(3 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2$$

تفسير النتيجة هندسياً.

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(x) + f(-x) = 2$ معناه $f(-x) = 2 - f(x)$ أي

$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$ وعليه النقطة $\omega(0; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5. تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

(T) معامل توجيهه 1 معناه $f'(x) = 1$.

لنحل المعادلة $f'(x) = 1$

$$\frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 \text{ معناه } f'(x) = 1 \text{ ويكافئ } 4e^x = e^{2x} + 2e^x + 1 \text{ ويكافئ } e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \text{ ويكافئ } (e^x - 1)^2 = 0$$

أي $x = 0$ وبالتالي (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0.

كتابة معادلة المماس (T) .

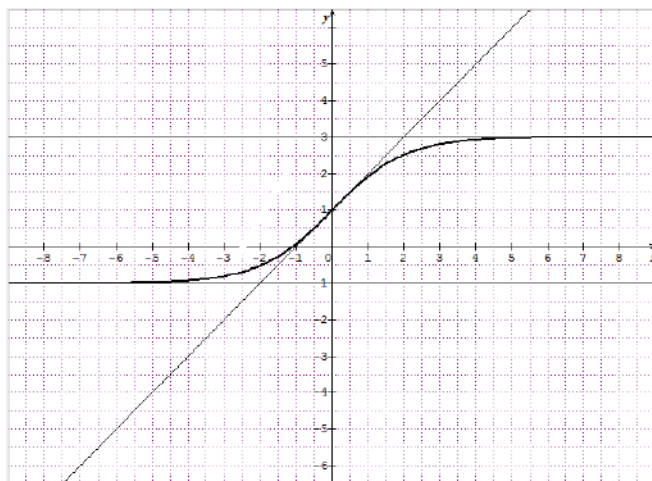
$$y = x + 1 \text{ أي } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

6. حساب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = 0 \text{ وتكافئ } 3e^x - 1 = 0 \text{ وتكافئ } e^x = \frac{1}{3} \text{ أي } x = -\ln 3$$

$$\text{إذن } (C_f) \cap (Ox) = \{B(-\ln 3; 0)\}$$

رسم كلا من (T) و (C_f) .



7. المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

وإشارة حلول المعادلة: $(3 - m)e^x = m + 1$

$$3e^x - me^x = m + 1 \text{ يكافئ } (3 - m)e^x = m + 1$$

$$\text{يكافئ } f(x) = m \text{ أي } 3e^x - 1 = m(e^x + 1)$$

إذا كان $m \leq -1$ أو $m \geq 3$ فإن المعادلة لا تقبل حلاً.

إذا كان $-1 < m < 3$ فإن المعادلة تقبل حلاً وحيداً سالباً

إذا كان $1 < m < 3$ فإن المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً و وحيداً

معدوماً.



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x) + f(-x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - x + 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1} = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{2}{1 + e^x} = \frac{2e^x + 2 - 2e^x - 2}{1 + e^x} = 0$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا إذن $f(x) + f(-x) = 0$

أي $f(-x) = -f(x)$ و منه f فردية.

f فردية إذن المبدأ O للمعلم مركز تناظر (C) .

2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x) = x + 1 - \frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}} + 1} = x + 1 - \frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1 + e^{-x}}{e^{-x}}} = x + 1 - \frac{2}{e^{-x} + 1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{ب})$$

3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x - 1 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{2(e^x + 1) - 2e^x}{e^x + 1}$$

$$\text{أي } f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \quad \text{لدينا (ب)}$$

إذن (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x - 1$.

$$\text{ج) } f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1} \quad \text{لدينا:}$$

$f(x) - (x - 1) > 0$ ، نستنتج أن (C) يقع فوق (Δ) .

$$4. \text{ لدينا } f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \bullet$$

• $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ ، تذكر أن مشتقة الدالة $\frac{1}{u}$ هي $-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

5. معادلة للمماس (d) : $y = f'(0)(x - 0) - f(0)$

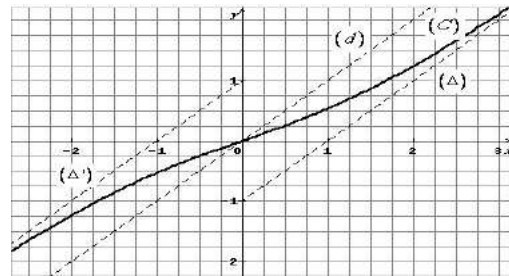
أي $y = 1(x - 0) - 0$ أي $y = x$.

6. معادلة (Δ') :

لدينا $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^{-x} + 1}$ (انظر السؤال 2. أ) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x} + 1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1) = +\infty$$

إذن (C) يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y = x + 1$.



7.

أذكر أن $\ln u$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ ، u هي دالة موجبة تماما على

مجال I و تقبل الاشتقاق على I .

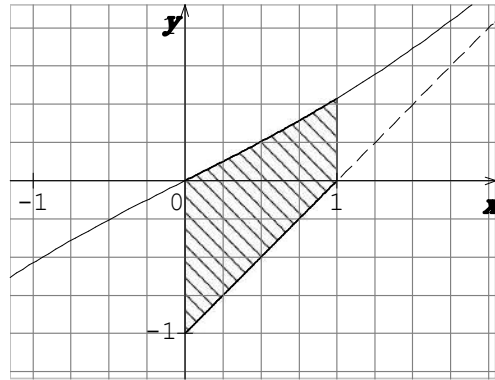
إذن $x \mapsto \ln(e^x + 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \mapsto F(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2\ln(e^x + 1)$ هي دالة أصلية للدالة

مسائل المستوى الأول ★

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \text{ على } \mathbb{R}.$$

(ب) نسمي S مساحة الشطح المطلوب.



$$S = \int_0^1 [f(x) - (x-1)] dx = \left[F(x) - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right]_0^1$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln(e^x + 1) - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 \text{ أي}$$

$$S = [2x - 2 \ln(e^x + 1)]_0^1 = 2 [x - \ln(e^x + 1)]_0^1 \text{ أي}$$

$$S = 2 \left[\ln e^x - \ln(e^x + 1) \right]_0^1 = 2 \left[\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right]_0^1 = 2 \left[\ln \frac{e}{e+1} - \ln \frac{1}{2} \right] \text{ أي}$$

$$S = 2 \left[\ln \left(\frac{e}{e+1} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 2 \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right) \text{ أي } S \simeq 0,76 \text{ cm}^2 \text{ إذن}$$

التمرين 03



الديوان الوطني لامتحانات والمسابقات

الجزء A :

1. * محور الترتيب مستقيم مقارب للمنحني $(C) : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

* المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty *$$

2.

أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع (ع) في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{1}{2}$

إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا هو $-\frac{1}{2}$.

ب) الفواصل x لنقط (ع) التي تقع فوق المستقيم الذي معادلته $y=1$ هي

كل الأعداد الحقيقية من المجموعة $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $f(x) > 1$ هي: $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

الجزء B :

1.

$$\text{أ) } f(x) = \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} \quad \text{أي } f(x) = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}.$$

$$\text{ب) لدينا : } 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

2.

أ) إشارة $e^x - 1$

• $e^x - 1 > 0$ يكافئ $e^x > 1$ و يكافئ $e^x > e^0$ و يكافئ $x > 0$.

• $e^x - 1 > 0$ يكافئ $x < 0$.

ب) حل المترجحة $\frac{e^x + x}{e^x - 1} > 1$

$$\frac{e^x + x - (e^x - 1)}{e^x - 1} > 0 \quad \text{و تكافئ } \frac{e^x + x}{e^x - 1} - 1 > 0 \quad \text{تكافئ } \frac{e^x + x}{e^x - 1} > 1$$

$$\text{أي } \frac{x+1}{e^x - 1} > 0 \quad \text{أي } \frac{e^x + x - e^x + 1}{e^x - 1} > 0$$

لنعين إشارة $\frac{x+1}{e^x - 1}$ باستعمال جدول:

$$x+1 \geq 0 \quad \text{يكافئ } x \geq -1 \quad \text{و } x+1 \leq 0 \quad \text{يكافئ } x \leq -1$$

درسنا سابقا (السؤال 2. أ) إشارة $e^x - 1$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$e^x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{e^x - 1}$	$+$	0	$-$	$+$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x}{e^x - 1} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x + x(e^x - 1)}{e^x - 1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x + xe^x - x}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} \right] \text{ أي}$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0 \text{ إذن}$$

نستنتج أن المنحني الذي يمثل الدالة f يقبل عند $-\infty$ مستقيماً مقارباً

مائلاً (Δ) معادلته $y = -x$.

$$f(x) + x = \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} = \frac{(x+1)e^x}{e^x - 1} \quad 4.$$

إشارة $f(x) + x$ هي إشارة $\frac{x+1}{e^x - 1}$ (السؤال 2.ب)

• عندما $x \in]-\infty; -1[$ أو $x \in]0; +\infty[$ يكون (ع) فوق (Δ) .

• عندما $x \in]-1; 0[$ أو $x \in]0; +\infty[$ يكون (ع) تحت (Δ) .

التمرين 04



مجلة Top Maths في الدوال الأسية

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = e^x - ex - 1$.

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - ex - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ تكافئ $x = 1$.

تتو

مسائل المستوى الأول ★

- من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.
 من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.
 جـ- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(2) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب - كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

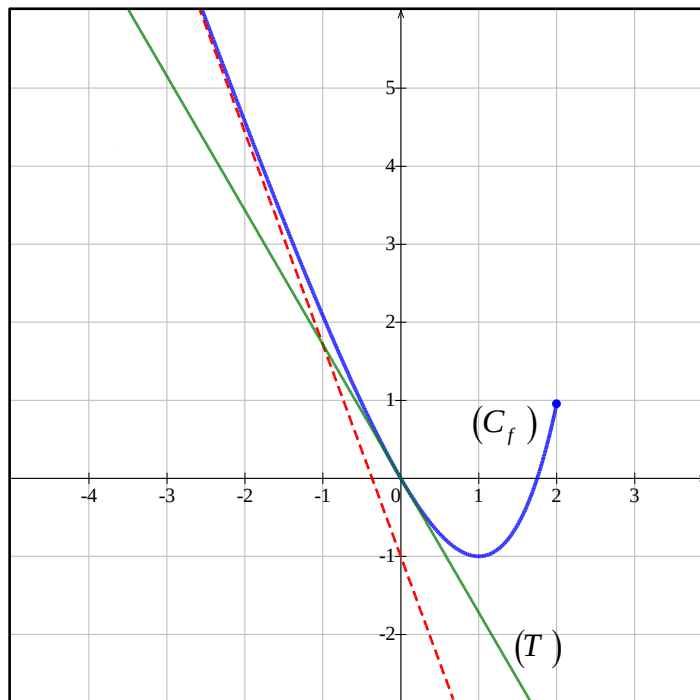
لدينا : $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ و منه $(T): y = (1 - e)x$

جـ- تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1, 75; 1, 76]$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و $[1, 75; 1, 76] \subset [1; +\infty[$ و $\begin{cases} f(1,75) \approx -0,002 \\ f(1,76) \approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,75 < \alpha < 1,76$

د- الرسم :



توضيح

مسائل المستوى الأول ★

3) أ- حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محاور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = 0$.

$$A(\alpha) = -\int_0^{\alpha} f(x) dx = -\int_0^{\alpha} (e^x - ex - 1) dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^{\alpha} = 1 - \left(e^{\alpha} - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha \right)$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua \quad \text{ب- إثبات أن:}$$

لدينا: $f(\alpha) = 0$ ومنه $e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$ أي $e^{\alpha} = e\alpha + 1$ وبالتالي:

$$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين 05



مجلة Top Maths في الدوال الأسية

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

1) أ) الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$.

دراسة إتجاه تغير الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$.

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$		$+ \quad 0 \quad -$	

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

ب- تبين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0) = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

تتبع

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38) \approx -0,02 \\ g(-1,37) \approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$ ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

(1) أ- حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{(2xe^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; 0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

(2) أ- تبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

★ مسائل المستوى الأول

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1} \text{ ومنه } e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \text{ أي } g(\alpha) = 0 \text{ لدينا :}$$

$$\text{أي : } f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$$

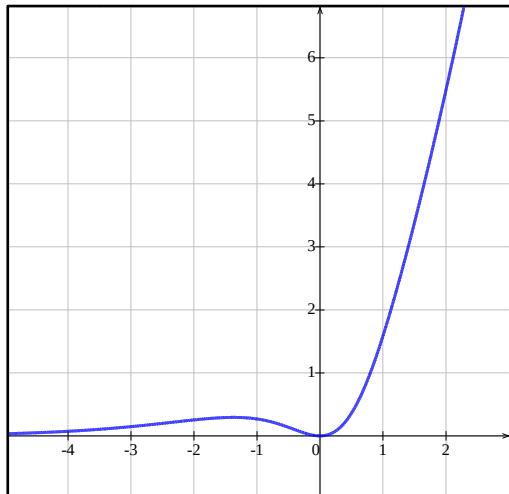
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

$$\text{لدينا : } -1,38 < \alpha < -1,37 \text{ يكافئ } \begin{cases} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38} \end{cases} \text{ ومنه } 0,27 < f(\alpha) < 0,32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \rightarrow$$

التفسير البياني: المنحنى (C_f) والمنحنى الممثل

للدالة "مربع" $(x \mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.
جـ- الرسم :





(I) دالة معرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ ، (C_f) منحنى f
 النقطة A تنتمي إلى (C_f) تعني : $f(-1) = 1$ أي $(-a+b)e^1 + 1 = 1$ *
 معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند A يساوي $-e$ تعني أن $f'(-1) = -e$. **
 f' ترمز للدالة المشتقة للدالة f . من أجل x من المجال $[-2, +\infty[$:
 $f'(-1) = (a-b+a)e^1 = (2a-b)e$ و $f'(x) = (a) \times e^{-x} + (ax+b) \times (-e^{-x}) + 0 = (-ax-b+a) \times e^{-x}$
 من المعادلتين * و ** نستنتج أن $(-a+b) = -1$ و $(2a-b) = -1$ وبالتالي $a = -1$ و $b = -1$
 (II) دالة معرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1 = f(x)$
 (أ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x}) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$. التفسير البياني : المستقيم الذي معادلته $y = 1$

مقارب للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

(ب) دراسة تغيرات الدالة g : * $g(-2) = (2-1)e^2 + 1 = e^2 + 1$
 * الدالة g قابلة للاشتقاق على $[-2, +\infty[$ و $g'(x) = f'(x) = x \times e^{-x}$
 إشارة g' هي إشارة x نستنتج أن الدالة g متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ و متناقصة تماماً على $[-2, 0]$
 * جدول تغيرات الدالة g

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$e^2 + 1$		1

(ج) المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة المشتقة g' تقبل الاشتقاق على $[-2, +\infty[$ و $g''(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$
 المشتقة الثانية g'' تنعدم عند 1 مع تغيير إشارتها نستنتج أن النقطة التي فاصلتها 1 من المنحنى (C_g)

نقطة انعطاف. إحداثيتي I هما $I(1, g(1))$ أي $I(1, -2e^{-1} + 1)$

(د) معادلة المماس عند النقطة I : $y = g'(1)(x-1) + g(1) = e^{-1}(x-1) + 1 - 2e^{-1}$ أي $y = e^{-1}x + 1 - 3e^{-1}$

(و) الدالة العددية المعرفة على $[-2, +\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$
 الدالة H قابلة للاشتقاق على $[-2, +\infty[$ و $H'(x) = (\alpha x + \beta) \times (-e^{-x}) + \alpha \times e^{-x} = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$
 حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة $g(x) - 1$ على المجال $[-2, +\infty[$ يجب : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2, +\infty[$: $H'(x) = g(x) - 1$ أي $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$
 بالمطابقة نجد : $\alpha = 1$ و $\beta = -2$

بما أن $g(x) = g(x) - 1 + 1 = H'(x) + 1$ فإن الدوال الأصلية للدالة g على المجال $[-2, +\infty[$ هي الدوال

$H(x) + x + b$ حيث $x \mapsto b$ عدد حقيقي

البحث عن الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 : $H(0) + 0 + b = 0$ أي $(0-2)e^0 + b = 0$ أي $b = 2$

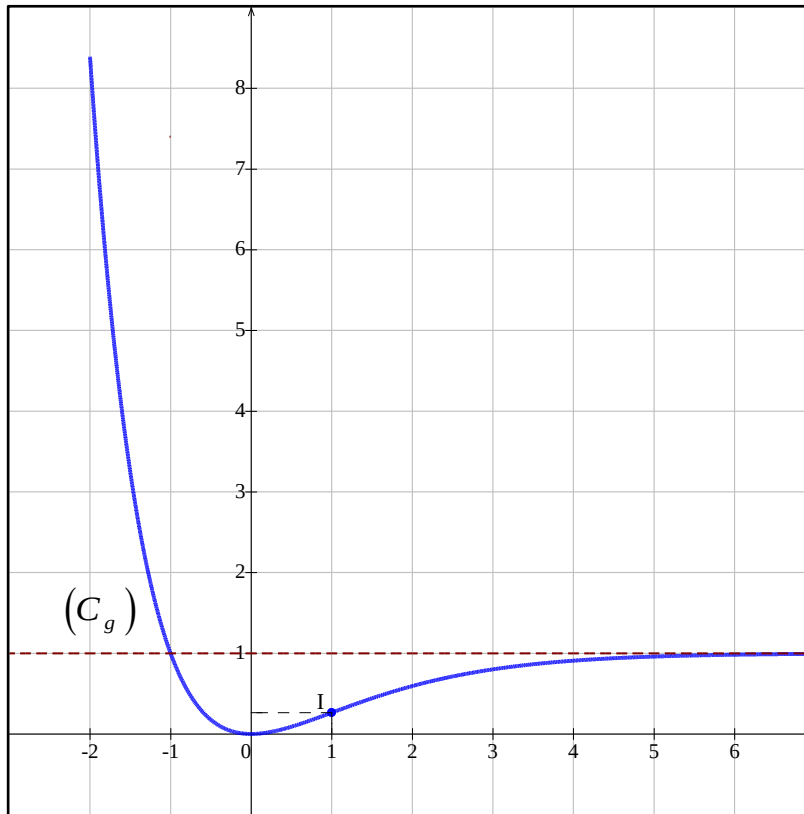
الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 هي الدالة : $x \mapsto (x-2)e^{-x} + x + 2$

مسائل المستوى الثاني ★★

(III) الدالة العددية المعرفة على $[-2, +\infty[$ كما يلي : $k(x) = g(x^2)$
 الدالة k مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على هذا المجال .
 و من اجل كل عدد حقيق x من $[-2, +\infty[$: $k'(x) = 2x \times g'(x^2) = 2x \times (x^2 \times e^{-x^2}) = 2x^3 \times e^{-x^2}$
 إشارة المشتقة $k'(x)$ هي إشارة x إذا الدالة k لها نفس اتجاه تغير الدالة g .
 نستنتج جدول تغيراتها :

x	2	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$-5e^{-4} + 1$	0	$+\infty$

(هـ) رسم المنحنى (C_g)





مجموعة الرياضيات الجزائرية (جمال بورنان)

(1) أ) الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $g'(x) = e^x - e$

$$g'(x) = 0 \quad * \quad \text{ومنه } e^x = e \quad \text{نجد } x=1$$

$$g'(x) > 0 \quad * \quad \text{أي } e^x > e^1 \quad \text{نجد } x > 1. \quad \text{اذن الدالة } g \text{ متزايدة تماما على } [1; +\infty[$$

$$g'(x) < 0 \quad * \quad \text{أي } e^x < e^1 \quad \text{نجد } x < 1. \quad \text{اذن الدالة } g \text{ متناقصة تماما على }]-\infty; 1].$$

(ب) من خلال اتجاه تغير g نستنتج انها تقبل قيمة حدية صغرى وهي 0 ومتناقصة على $] -\infty; 1]$ ثم متزايدة على $[1; +\infty[$ اذن نستنتج ان المنحني دوما فوق محور الفواصل ومنه فالدالة موجبة دوما.

(2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = e^x - ex = g(x) \geq 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2} ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} e \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{1}{2} ex^2 \right) = 0 - (+\infty) = -\infty \quad (3)$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين أي ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2} ex^2 - e^x + ex = -\frac{1}{2} ex^2 + ex = \frac{e}{2} x(-x+2)$$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
ex		0	+	+
$-x+2$		+	0	-
$x(-x+2)$		0	+	-

من خلال الجدول يتضح لنا ان (C_f) يكون فوق (C_g) في المجال $]0; 2[$ وتحت في كل من المجالين $] -\infty; 0[$ و $]2; +\infty[$ ويتقاطعان عند 0 و 2.

(6) حساب المساحة S:

$$S = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 \left(e^x - \frac{1}{2} ex^2 - e^x + ex \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2} ex^2 + ex \right) dx$$

مسائل المستوى الثاني ★★

$$= -\frac{1}{2}e \int_0^2 x^2 dx + e \int_0^2 x dx = -\frac{1}{2}e \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + e \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = -\frac{1}{2}e \left[\frac{8}{3} \right] + e[2] = \frac{-4e}{3} + 2e = \frac{2e}{3} ua$$

$$S = \frac{2e}{3} \times 4 = \frac{8e}{3} cm^2 \quad \text{ووحدة المساحة هي } ua = 2 \times 2 = 4cm^2 \text{ وعليه نجد}$$

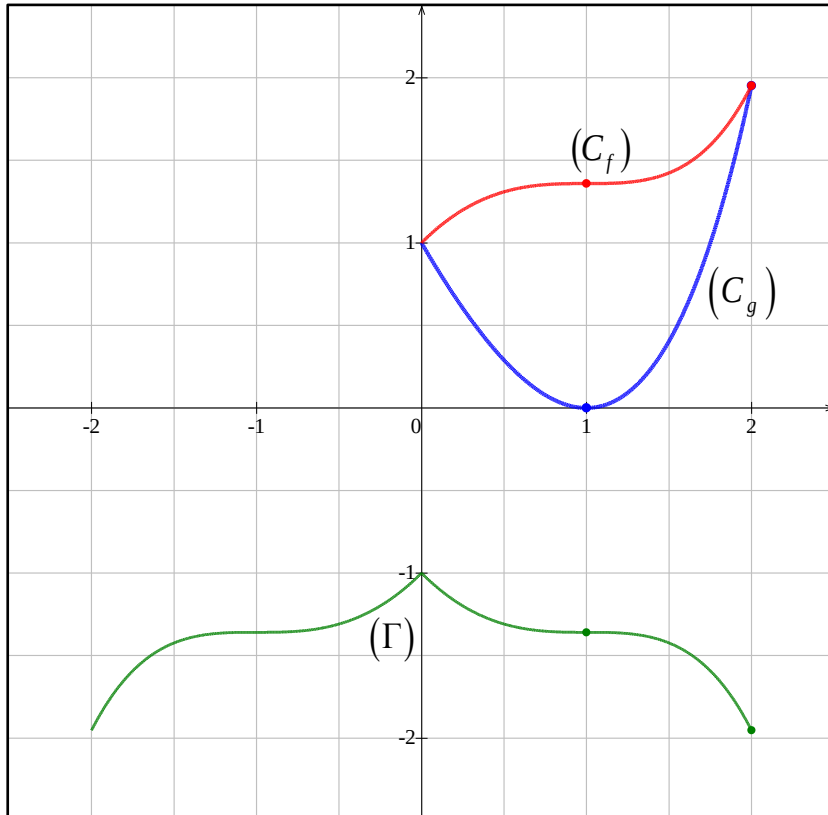
(7) أ) الدالة h معرفة على $[-2; 2]$ وهو مجال متناظر بالنسبة للصفر أي مهما كان $x \in [-2; 2]$ فإن $-x \in [-2; 2]$.

$$h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{-x} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{-x} = h(x) \text{ وعليه فإن الدالة } h \text{ زوجية.}$$

ب) من أجل $x \in [0; 2]$ نجد $h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0$ أي $h(x) = -f(x)$ وعليه فإن

المنحني (Γ) الممثل للدالة h هو نظير المنحني (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[0; 2]$ ، أما الجزء الآخر من المنحني (Γ) في المجال $[-2; 0]$ هو نظير الجزء (Γ) من المجال $[0; 2]$ بالنسبة لمحور الترتيب لأن الدالة h زوجية

الرسم:



مسائل المستوى الثاني ★★

التمرين 03

مجموعة المتميز (جوابيل أحمد أسامة) 

I - ... $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$ و $y = x$ (Δ) و $y = e^x$ (γ)

1. بما أن (γ) يقع فوق المستقيم (Δ) و لا يتقاطعان فإن $e^x - x > 0$.

2. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	0	-

II - لدينا $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$

1. إثبات النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-1 + \frac{2e^x}{e^x} \right] = 1$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{2e^x}{e^x - x} \right] = -1$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2e^x}{e^x - x} \right] = 0$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y = -1$.

مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$.

2. أ- إثبات عبارة المشتقة $f'(x) = \frac{2e^x(e^x - x) - (e^x - 1)2e^x}{(e^x - x)^2}$ أي $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ و هو المطلوب.

ب- إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; 1]$ و متناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-1	$-1 + \frac{2e}{e-1}$	1

3. أ- معادلة المماس (T):

$y = f'(0)x + f(0)$ أي أن $y = 2x + 1$.

ب- إثبات مساواة: $f(x) - (2x + 1) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x} - 2x - 1 = -2x - 2 + \frac{2e^x}{e^x - x} = \frac{(-2x - 2)(e^x - x) + 2e^x}{e^x - x}$

أي $f(x) - (2x + 1) = \frac{-2xe^x + 2x^2 + 2x}{e^x - x}$ أي $f(x) - (2x + 1) = \frac{-2xe^x + 2x^2 - 2e^x + 2x + 2e^x}{e^x - x}$

إذن $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$ و هو المطلوب.

مسائل المستوى الثاني ★★

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضعية	(C_f) يقع فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) يقع تحت (T)

ج-استنتاج الوضعية :

$$f(x)-y = \frac{g(x)}{e^x - x} \quad \text{إشارتها من إشارة } g(x) :$$

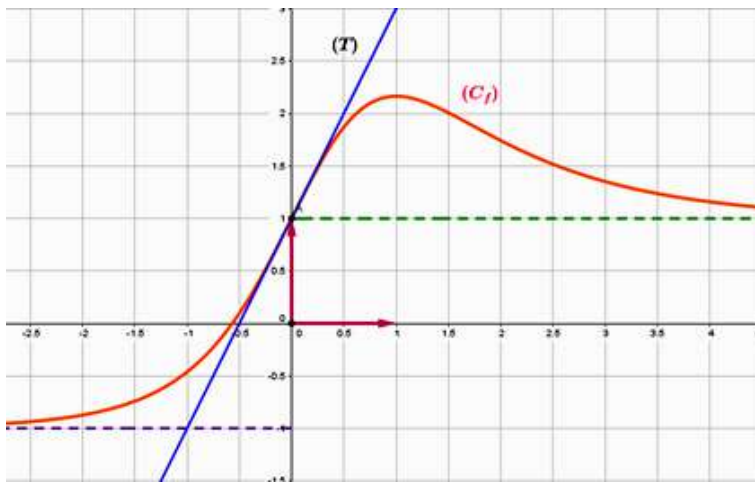
و منه النقطة A هي نقطة الانعطاف لأن المماس (T) اخترق المنحنى (C_f) .

4. مبرهنة القيم المتوسطة $f(-0,5)=0,096$ و $f(-0,6)=-0,04$ بما أن الدالة مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty;1]$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$

5. إنشاء المستقيمين المقاربين و المماس

(T) و المنحنى (C_f) :



التمرين 04



مجموعة المتميز (جوابيل أحمد أسامة)

(1) لدينا الدالة f معرفة $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$.

$$(1) \text{ إثبات أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - x^2e^{1-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 - \left(\frac{x^2}{e^x} \right) e \right] = 2 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) = 0 \text{ بالتزايد المقارن}$$

التفسير الهندسي من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - x^2e^{1-x}] = -\infty$$

(2) أ) إثبات عبارة المشتقة : لدينا $f'(x) = -2xe^{1-x} - x^2(-e^{1-x})$ و منه $f'(x) = x^2e^{1-x} - 2xe^{1-x}$ إذن

$$f'(x) = x(x-2)e^{1-x} \text{ محققة .}$$

تتو

مسائل المستوى الثاني

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f : بما أن $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ اشارتها من إشارة $x(x-2)$ وهو كثير حدود ينعدم عند 0 و 2

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
إشارة $x(x-2)$	+	0	—	+

و منه الدالة متزايدة على المجالين $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$ متناقصة على المجال $[0; 2]$.
جدول تغيراتها

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—	+
$f(x)$	$-\infty$	2	$2 - \frac{4}{e}$	2

(3) كتابة معادلة المماس (T) : هي من الشكل $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و $f(1)=1$ و $f'(1)=-1$ و منه $(T) : y = -x + 2$ أي $y = -(x-1) + 1$

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

(1) ندرس تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}$ لدينا $h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$ اشارتها من إشارة $(x-1)$

و منه h متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ و منه h تقبل قيمة حدية صغرى هي $h(1)=0$
إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) \geq 0$.

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(T) : y = -x + 2$ نحسب الفرق $f(x) - y = 2 - x^2e^{1-x} + x - 2$

و منه $h(x) = f(x) - y = x - x^2e^{1-x} = x(1 - xe^{1-x}) = x.h(x)$ لان $h(x) \geq 0$

و منه (C_f) يقع فوق (T) على المجال $]0; +\infty[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty; 0]$.

(2) إثبات أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة $[-0,7; -0,6]$ و $f(-0,6) = 0,22$; $f(-0,7) = -0,68$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(4) لدينا $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

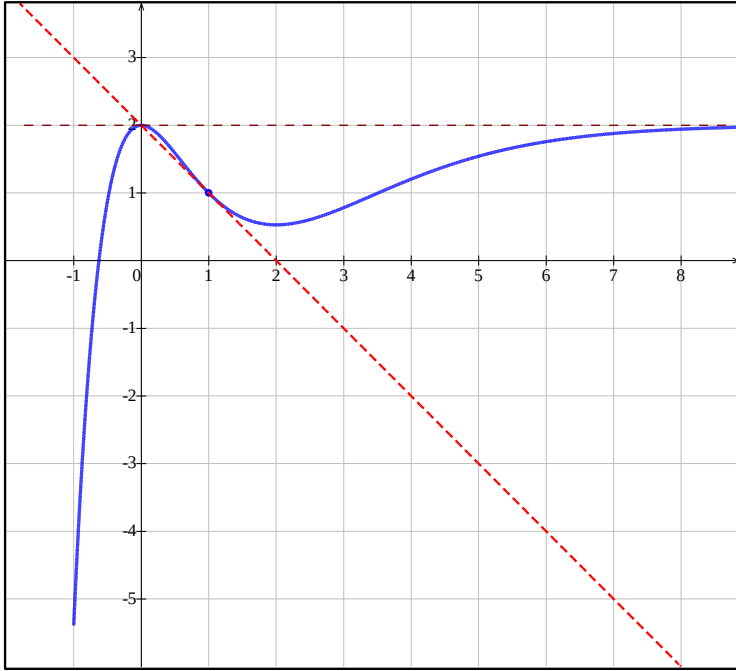
التحقق : $F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2e^{1-x} = f(x)$ و منه الدالة F دالة أصلية للدالة f .

حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الترتيب و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 0$; $x = 1$

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \left[2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} \right]_0^1 = (7 - 2e)u.a \text{ هي}$$

مسائل المستوى الثاني ★★

إنشاء المنحنى (C_f) و المماس (T) :



التمرين 05



علوم تجريبية 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط)

(I) $g(-1) = 0$ / 1
2/ إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) لدينا $f(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$ و منه $f(x) = x \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x-1} \right]$ و منه $f(x) = x \left[1 - \frac{x+1}{x}e^{-x-1} \right]$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

أ/ $f'(x) = g(x)$ أي $f'(x) = 1 + xe^{-x-1}$ و منه $f'(x) = 1 - e^{-x-1} + (x+1)e^{-x-1}$

ب) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ و منه $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-1; +\infty[$ و منه f متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty, -1[$ و منه f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty, -1[$

つづ<

مسائل المستوى الثاني ★★

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$+\infty$

أ / 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-(x+1)e^{-x-1}) = 0$ ، ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب) ندرس إشارة $-(x+1)e^{-x-1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-(x+1)e^{-x-1}$	$+$	0	$-$

ومنه وضعية (C_f) و (Δ) كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	يقطع (C_f) في النقطة $A(-1; -1)$	(C_f) تحت (Δ)

ج) نحل المعادلة $f'(x) = 1$ أي $g(x) = 1 + xe^{-x-1} = 1$ ومنه $xe^{-x-1} = 0$ ومنه $x = 0$ ومنه (C_f) يقبل مماسا (T)

عند النقطة ذات الفاصلة 0 يوازي (Δ) معادلته أي $y = x + \frac{1}{e}$.

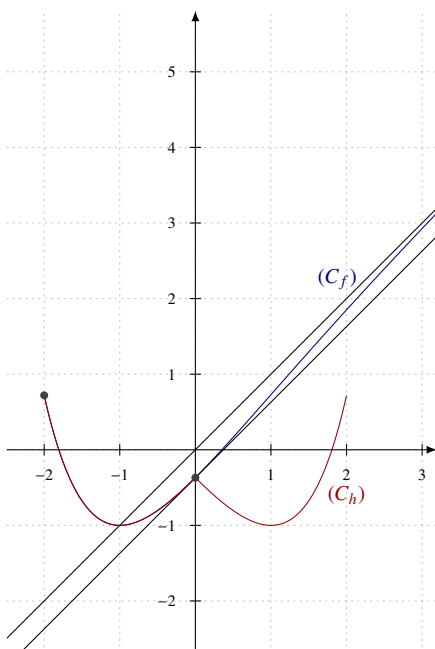
أ / 4 الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1, +\infty[$ و بالأخص المجال $[0.3, 0.4]$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty, -1[$ و بالأخص المجال $[-1.9, -1.8]$ ولدينا $f(0.3) \times f(0.4) < 0$ و أيضا $f(-1.9) \times f(-1.8) < 0$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث $0.3 < \alpha < 0.4$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

أ / 5 من أجل $x \in [-2, 2]$ فإن $-x \in [-2, 2]$ و $h(-x) = h(x)$ ومنه $h(-x) = -|-x| + (|-x| - 1)e^{-|-x|-1}$ لأن $|x| = |-x|$ ومنه h زوجية .

من أجل $x \in [-2, 0]$ لدينا $|x| = -x$ ومنه

$$h(x) = f(x) \text{ أي } h(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$$

ج) على المجال $[-2, 0]$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، ثم نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لنحصل على الجزء الباقي من (C_h)



مسائل المستوى الثالث

التمرين 01



مجلة العبقرى في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: $f(x) = (x + a)e^{-x} + b$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

(1) بقراءة بيانية للمنحنى (C_f) ،

أ) تعيين $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f'(-2)$ ؛

من البيان لدينا: $f(0) = 0$ ؛ $f(-3) = -3$ ؛

و $f'(-2) = 0$ (المماس عند النقطة ذات الفاصلة (2) موازي لمحور الفواصل).

(ب) تعيين حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ؛

من البيان لدينا: f متزايدة تماما على المجال $]-2; -\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-2; +\infty[$ إذن:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$

(ج) المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f هو المنحنى (2) لأن:

• من أجل $x \in]-\infty; -2]$ ، المنحنى (2) يقع فوق محور الفواصل أي: $f'(x) \geq 0$.

• ومن أجل $x \in [-2; +\infty[$ ، المنحنى (2) يقع تحت محور الفواصل أي: $f'(x) \leq 0$.

(2) أ) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$ ؛

من (1) أ) لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -3 \\ f(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$ بحيث $f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x + a) = (1 - x - a)e^{-x}$

$$\begin{cases} (-3 + a)e^3 + b = -3 \dots (1) \\ a + b = 0 \dots \dots \dots (2) \\ (3 - a)e^2 = 0 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \begin{cases} (-3 + a)e^{-(-3)} + b = -3 \\ (0 + a)e^{-0} + b = 0 \\ (1 - (-2) - a)e^{-(-2)} = 0 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

من (3) نجد: $a = 3$ ، وبالتعويض في (2) نجد: $b = -3$ ، إذن: $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$ ؛

(ب) تشكييل جدول تغيرات الدالة f ؛

x	$-\infty$	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	
$f(x)$		$e^2 - 3$		

$-\infty \rightarrow \swarrow \quad \searrow \rightarrow -2 \rightarrow \rightarrow -3$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases} \text{ بحيث، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x + 3)e^{-x} - 3] = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 3)e^{-x} - 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} - 3 \right) = -3 \text{ و}$$

$$f(-2) = (-2 + 3)e^{-(-2)} - 3 = e^2 - 3 \text{ و}$$

(ج) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له:

بما: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ ؛

فإن: المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

つづ<

مسائل المستوى الثالث

د) تبين أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين 1,50 و 1,52؛ لدينا: f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ (لأنها متناقصة تماما على المجال $[-2; +\infty[$)

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \end{cases} \text{ أي: } -2 \in]-3; 0]$$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α .

$$\text{ويمأن: } \begin{cases} f(1,50) \simeq -1,996 \\ f(1,52) \simeq -2,011 \end{cases} \text{ أي: (2- محصور بين } f(1,50) \text{ و } f(1,52))$$

$$\text{فإن: } 1,50 < \alpha < 1,52$$

3) لدينا: $F(x) = (-x - 4)e^{-x}$ و $D_F = \mathbb{R}$ ؛ I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^0 f(x) dx$

أ) حساب $F'(x)$:

$$F'(x) = -1 \times e^{-x} - e^{-x}(-x - 4) = (-1 + x + 4)e^{-x} = (x + 3)e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

$$\text{بمأن } F'(x) = (x + 3)e^{-x} \text{ فإن } F \text{ أصلية للدالة } x \mapsto (x + 3)e^{-x}$$

وبالتالي: $x \mapsto F(x) - 3x$ هي أصلية للدالة f .

ب) إعطاء تفسيراً بيانياً للعدد I :

العدد I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

$$\text{معادلتيهما: } x = 0, x = -2.$$

تبرير الحصر التالي $5 < I < 4$ باعتباريات بيانية محضّة:

ج) حساب العدد I :

$$\text{لدينا: } I = \int_{-2}^0 f(x) dx = [(-x - 4)e^{-x} - 3x]_{-2}^0$$

$$\text{ومنه: } I = [(-0 - 4)e^{-0} - 3(0)] - [(-(-2) - 4)e^{-(-2)} - 3(-2)]$$

$$\text{وعليه: } I = -4 - (-2e^2 + 6) = -10 + 2e^2$$

التمرين 02



مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)

1) حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{لدينا: } f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \text{ والمعرفة على }]-\infty; 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right) = -\infty$$

مسائل المستوى الثالث

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن : المستقيم ذا المعادلة : $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

(2) حساب $f'(x)$ وتبيان أن f متناقصة تماما على $]-\infty; 1[$

لدينا: $f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' + \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$ ومنه: $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \left[1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

$f'(x) < 0$ لأن $1 + e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ و $\frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ منه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty; 1[$

x	$-\infty$	0	α	1
$f'(x)$		-	-	-
$f(x)$	2	e^{-1}	0	∞

(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ حسب مبرهنة القيم

المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha \in]-\infty; 1[$ يحقق $f(\alpha) = 0$

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

في الجدول لدينا: $f(0,21) = 0,016$ و $f(0,22) = -0,005$ من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha \in]0,21; 0,22[$.

(4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

توضيح: كيفية رسم (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

لدينا: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; x \in]-\infty; \alpha] \\ -f(x) & ; x \in]\alpha; 1[\end{cases}$ ومنه $x \in]-\infty; \alpha]$ معناه $(C') = (C)$

$x \in]\alpha; 1[$ معناه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل

(5) تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة معناه المستقيم ذو المعادلة $y = m$ يقطع المنحنى (C') في

نقطتين مختلفتين من البیان نجد أن : $m \in]e^{-1}; 2[$

مسائل المستوى الثالث

(1-II) دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2^*$$

*لدينا: $g(x) = f(2x-1)$ ومنه $g'(x) = 2f'(2x-1)$ وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة

تماما على $]-\infty; 1[$ لأن $f'(2x-1) < 0$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2	$-\infty$

2 (أ) التحقق أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ وأن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2 \cdot \frac{\alpha+1}{2} - 1\right) = f(\alpha) = 0 \text{ من الجواب 3 } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2 \cdot \frac{\alpha+1}{2} - 1\right) = 2f'(\alpha)$$

(ب) استنتاج معادلة (T) المماس لـ g عند الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه: $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + 0$

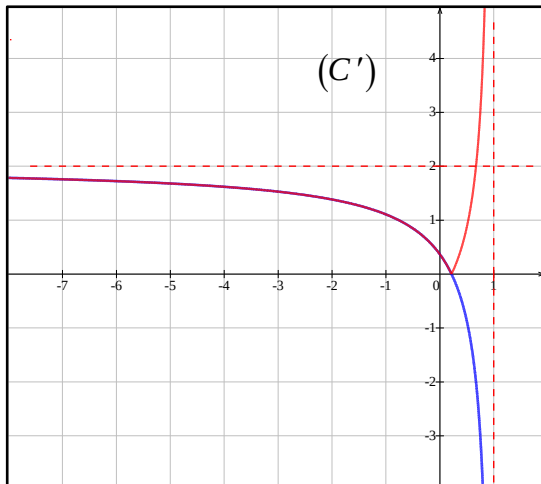
(ج) التحقق أن: $y = \frac{2x}{(\alpha-1)^3} - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2} e^{\frac{1}{\alpha-1}}$ لكن: $f(\alpha) = 0$ معناه $-\frac{\alpha}{(\alpha-1)} = e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

ومنه: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)^3} = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$ وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$$(T): y = 2 \frac{1}{(\alpha-1)^3} \left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{2x}{(\alpha-1)^3} - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

الرسم:



مسائل المستوى الثالث

التمرين 03



مجموعة المتميز (جوايل أحمد أسامة)

$$f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$$

1- أ- حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3)e^{-x+1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3)e^{-x+1} = 0$

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب- إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$

نحسب المشتقة $f'(x) = (-3x^2 + 4x)e^{-x+1} - (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$ و منه $f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 4x)e^{-x+1}$ أي أن $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ محققة.

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2 - 5x + 4)$

لدينا $x(x^2 - 5x + 4)$ له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
إشارة $(x^2 - 5x + 4)$	+	+	0	-	+
إشارة x	-	0	+	+	+
إشارة $f'(x)$	-	0	+	0	+

و منه f متزايدة على المجالين $[0; 1]$ و $[4; +\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty; 0]$ و $[1; 4]$.
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	1	$-32e^{-3}$	0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(2) = -4e^{-1}$ و $f(2) = 0$ و منه معادلة المماس (T) هي $y = -\frac{4}{e}x + \frac{8}{e}$.

3- دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ $h(x) = x^2.e^{-x+2} - 4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x) = 2x.e^{-x+2} - x^2.e^{-x+2} = x(2-x)e^{-x+2}$ إشارة $h'(x)$ إشارة $(2-x)$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0; 2]$ و سالبة على المجال $[2; +\infty[$ و منه الدالة h متناقصة على المجال $[0; 2]$ و متناقصة على المجال $[2; +\infty[$ لدينا $h(2) = 0$ إذن $h(2) = 0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة.

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$:

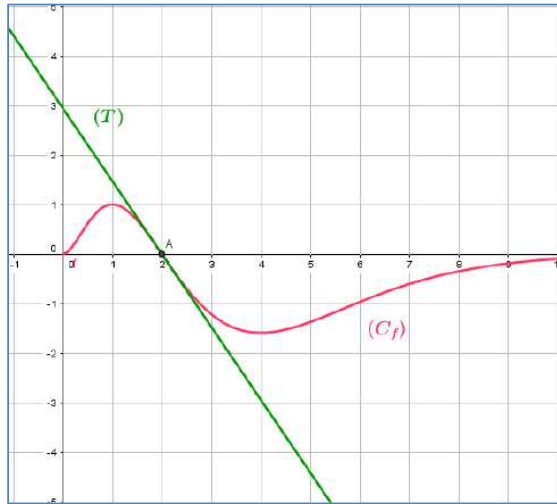
$$f(x) - y = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1} + 4e^{-1}x - 8e^{-1} = -x^3.e^{-x+1} + 2x^2.e^{-x+1} + 4xe^{-1} - 8e^{-1}$$

$$f(x) - y = -x^3.e^{-x+1} + 4x.e^{-1} + 2x^2.e^{-x+1} - 8e^{-1} = -xe^{-1}(x^2.e^{-x+2} - 4) + 2e^{-1}(x^2.e^{-x+2} - 4)$$

مسائل المستوى الثالث

اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[0; 2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $[2; +\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2.

4- رسم المنحنى البياني (C_f) و المماس (T) :



5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x) = m(x-2), \dots, (E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = m(x-2)$.

لما $m \in]-\infty; -\frac{4}{e}]$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m \in]-\frac{4}{e}; 0[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m = 0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m \in]0; +\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t = \frac{1}{x}$

و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} t = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ نجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

المشتقة : هي $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x) = -\frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{x^2} - 5\frac{1}{x} + 4\right) e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x) = \frac{1}{x^5} (-1 + 5x - 4x^2) e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $(-1 + 5x - 4x^2)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

مسائل المستوى الثالث

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1; +\infty[$ و $\left]0; \frac{1}{4}\right]$ و $g(1) = f(1)$, $g\left(\frac{1}{4}\right) = f(4)$

جدول تغيرات الدالة g

x	0	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	0			1	
		</			

التمرين 04



العملاق في الرياضيات (بواب نور الدين)

الجزء I :

1 دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)e^x = -\infty$ و منه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$) و منه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

اتجاه التغير :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = (3-x)' \times e^x + (e^x)' \times (3-x) = (2-x)e^x$ ،

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال

$]-\infty; 2]$ و متناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$e^2 - 3$	$-\infty$

$g(2) = e^2 - 3$

2 تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0) = (3-0)e^0 - 3 = 3 - 3 = 0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.

مسائل المستوى الثالث

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة تماما على $[2.82; 2.83]$ زيادة على ذلك : $g(2.82) \approx 0.06$ و $g(2.83) \approx -0.08$ وبالتالي : $g(2.82) \times g(2.83) < 0$ نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82 < \alpha < 2.83$.
إذن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha \in]2.82; 2.83[$.

3 استنتاج إشارة $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 & \text{ يكافئ } x \in \{0; \alpha\} \\ g(x) < 0 & \text{ يكافئ } x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[\\ g(x) > 0 & \text{ يكافئ } x \in]0; \alpha[\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	$+$	$-$

الجزء II :

1 أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 1$ ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ وبالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \times x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \times x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \times x = 1 \times 0 = 0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ وعددها المشتق عند 0 هو $f'(0) = 0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند المبدأ O :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

لدينا : $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y = 0$

2 أ- تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$:

تذكير : $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$ و $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u^n} = +\infty$ (n عدد طبيعي) .

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^3}\right)} = 0$ **إذن :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$

مسائل المستوى الثالث ★★★

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = 0$$

حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

ب- تبيان أنه من أجل $x \neq 0$ فإن $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(e^x - 1) - (e^x - 1)' \times x^3}{(e^x - 1)^2} = \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2[(3 - x)e^x - 3]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$$

ج- التحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$:

لدينا : $g(\alpha) = 0$ أي : $(3 - \alpha)e^\alpha - 3$ ومنه : $e^\alpha = \frac{3}{3 - \alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha) \text{ إذن : } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha^3}{\frac{3}{3 - \alpha} - 1} = \frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3 - \alpha}} = \alpha^3 \times \frac{3 - \alpha}{\alpha} = \alpha^2(3 - \alpha)$$

تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82 < \alpha < 2.83$ ومنه : $-2.82 < -\alpha < -2.83$ (الضرب في -1)

وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3 - 2.83 < 3 - \alpha < 3 - 2.82$

وبالتالي : $0.17 < 3 - \alpha < 0.18 \dots (1)$

ومن : $2.82 < \alpha < 2.83$ نحصل على : $(2.82)^2 < \alpha^2 < (2.83)^2$

وبالتالي : $7.95 < \alpha^2 < 8.01 \dots (2)$

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35 < \alpha^2(3 - \alpha) < 1.44$

إذن : $1.35 < f(\alpha) < 1.44$

مسائل المستوى الثالث

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

3 أ- حساب $f(x) + x^3$:

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3 = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} : x \neq 0$$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $-x^3$: $x \mapsto -x^3$

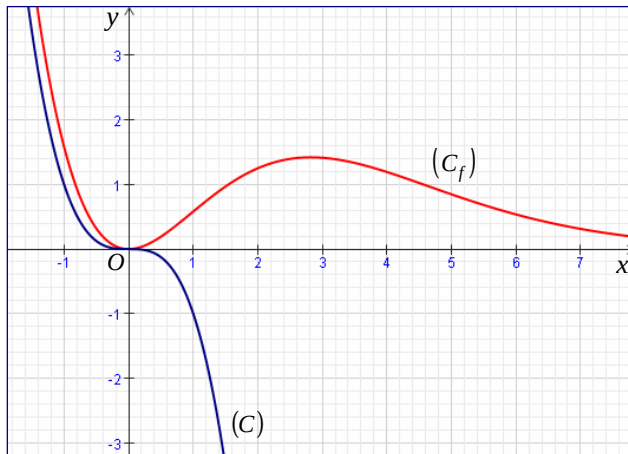
إشارة الفرق $f(x) - (-x^3)$ أي $f(x) + x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x - 1)$ يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :

- إذا كان $x = 0$ يكون $f(x) - (-x^3) = 0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O
- إذا كان $x \neq 0$ يكون $f(x) - (-x^3) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .

ب- تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^3) = 0$:

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3 = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} : \text{لدينا } x \neq 0$$

ونعلم أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} = 0$ إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^3) = 0$.



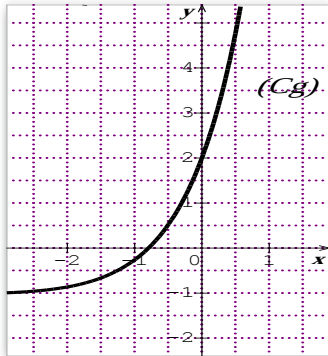
هندسيا : المنحني (C)

هو منحنى مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

4 رسم (C) و (C_f) :

مسائل المستوى الثالث

التمرين 05



كتابة الأستاذ (بعون لقمان)

I. الدالة المعرفة على IR بـ : $g(x) = (x+3)e^x - 1$ ومنحنائها البياني :

أ) بقراءة بيانية : نلاحظ أنّ : $g(-1) < 0$ و أنّ : $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$.

ب) لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على IR إذا فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$ وكذلك لدينا : $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ مع $g(\alpha) = 0$.

التحقق أنّ : $-0.8 < \alpha < -0.7$: لدينا $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[\subset]-0.8; -0.7[$ ومنه g مستمرة ومتزايدة تماما على $] -0.8; -0.7[$ و

$g(-0.8) \times g(-0.7) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.8 < \alpha < -0.7$

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على IR : لدينا من خلال البيان نجد أنّ : $g(x) < 0$ لـ $x < \alpha$ و $g(x) > 0$ لـ $x > \alpha$

و $g(x) = 0$ لـ $x = \alpha$. (يمكن تلخيص الإشارة في جدول) .

II. الدالة المعرفة على IR بـ : $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد

و متجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)(e^x - 1)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+2)(e^x - 1)] = +\infty$

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و :

$$f'(x) = 1 \cdot (e^x - 1) + e^x (x+2) = e^x - 1 + xe^x + 2e^x = (x+3)e^x - 1 = g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على IR :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$: لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+2)(e^x - 1) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x + 2e^x - 2 + x) = -2$$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$. فنجد : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+2)(e^x - 1) + x + 2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x-2)) = 0$ ومنه (C_f) يقبل

تتبع

مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته : $y = -x - 2$.

مسائل المستوى الثالث

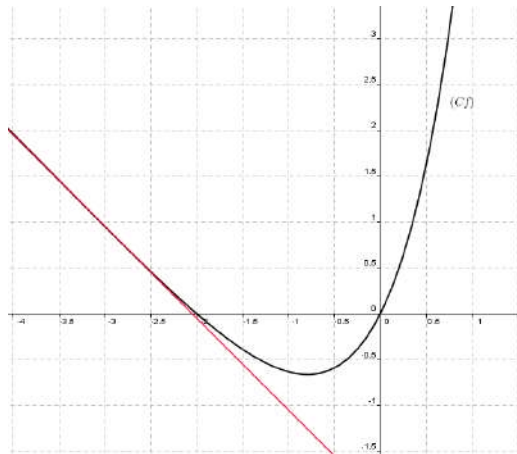
(ب) لدراسة الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$:

$$f(x) - y = (x+2)e^x \text{ ومنه } f(x) - y = [(x+2)(e^x - 1) + (x+2)] = [(x+2)(e^x - 1 + 1)]$$

$$\text{فلخص الوضعية في الجدول التالي : } \begin{cases} e^x > 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} e^x > 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2;0)$	(C_f) فوق (Δ)

(ج) (T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس معامل التوجيه أي : $f'(x_0) = -1$ ومنه $g(x_0) = -1$ بحل المعادلة نجد : $x_0 = -3$. ومنه $(T): y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$ نجد : $(T): y = -x - 2 - e^{-3}$.



الرسم :

5. حساب $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = (x+2)(e^x - 1) - (x+3)e^x - 1 = -e^x - x - 1$$

فنجد أن : $f(x) = f'(x) - e^x - x - 1$.
استنتاج دالة أصلية للدالة f على IR .

$$\text{أي : } F(x) = f(x) - e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$$

ومنه : $F(x) = (x+3)e^x - 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - 2x$. هي دالة أصلية للدالة f على IR .

$$6. \text{ دالة معرفة على } IR \text{ بـ : } h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$$

(أ) h دالة زوجية معناه : D_h متناظرة بالنسبة إلى 0 ومن أجل كل $x \in D_h$ فإن : $h(-x) = h(x)$

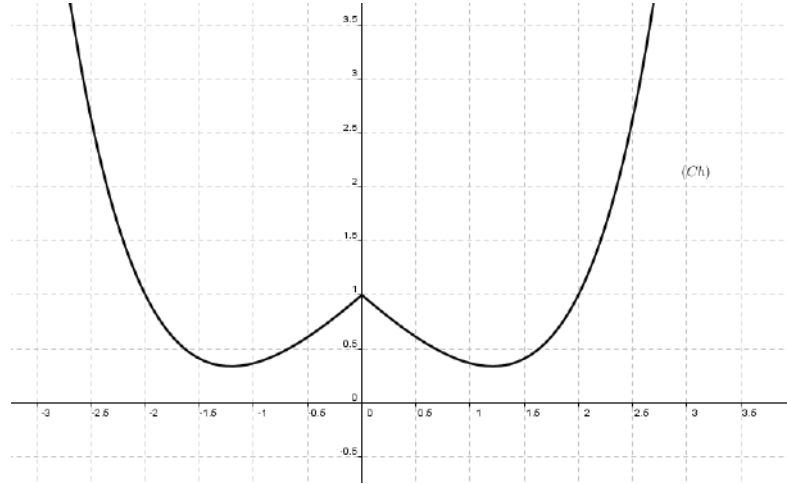
$$h(-x) = |-x|(e^{|-x|-2} - 1) + 1 = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1 = h(x) \text{ ومنه } h \text{ دالة زوجية .}$$

(ب) لدينا من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $h(x) = x(e^{x-2} - 1) + 1$ و $h(x) = (x-2+2)(e^{x-2} - 1) + 1 = f(x-2) + 1$ و هو المطلوب .

مسائل المستوى الثالث

ج) يتم رسم المنحنى (C_h) انطلاقاً من (C_f) على المجال $[0; +\infty[$ وذلك بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ وبما أن

h دالة زوجية أي منحناها البياني مناظر بالنسبة الى محور الترتيب ومنه نكمل الجزء المتبقي من (C_h) بالتناظر بالنسبة الى محور الترتيب .
الرسم :





تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

الجزء الأول :

1- حل المعادلة $g(x) = 0$:

$$g(x) = 0 \text{ تكافئ } 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \quad (1) \leftarrow$$

$$(1) \text{ تكافئ } 2e^{2x} - 4e^x - e^x + 2 = 0 \text{ تكافئ } 2e^x(e^x - 2) - (e^x - 2) = 0$$

$$\text{تكافئ } (e^x - 2)(2e^x - 1) = 0 \text{ تكافئ } \begin{cases} e^x = 2 \\ e^x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x = \ln 2 \\ x = -\ln 2 \end{cases}$$

$$S_{(1)} = \{\ln 2, -\ln 2\} \text{ إذا}$$

2- تحليل $g(x)$ وإشارته :

$$\text{لدينا } g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2 \text{ ومنه } g(x) = (e^x - 2)(2e^x - 1)$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^x - 1$	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
الجداء	+	0	-	+

$$\begin{cases} g(x) < 0 / x \in]-\ln 2; \ln 2[\\ g(x) = 0 / x \in \{-\ln 2, \ln 2\} \\ g(x) > 0 / x \in]-\infty; -\ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[\end{cases} \text{ ومنه نستنتج أن :}$$

الجزء الثاني :

$$- \text{ لدينا الدالة } f(x) = 2x + \frac{2e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}} \text{ معرفة على } \mathbb{R}^* .$$

$$1 - \text{ التحقق انه من أجل كل } x \in \mathbb{R}^* \text{ لدينا } f(-x) + f(x) = -3$$

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= -2x + \frac{2e^x - 1}{1 - e^x} + 2x + \frac{2e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}} \\ &= \frac{2e^x - 1}{1 - e^x} + \frac{2e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} \\ &= \frac{2e^x - 1}{1 - e^x} + \frac{2 - e^x}{e^x - 1} = \frac{-2e^x + 1 + 2 - e^x}{e^x - 1} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ &= \frac{-3(e^x - 1)}{e^x - 1} = -3 \end{aligned}$$

- نستنتج ان (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $(0; -\frac{3}{2})$

$$\text{لأنه من أجل كل } x \in \mathbb{R}^* \text{ لدينا } f(0-x) + f(0+x) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)$$

2- أ)- التحقق انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $f(x) = 2x + \frac{2-e^x}{e^x-1}$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = 2x + \frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = 2x + \frac{2-e^x}{e^x-1}$

- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-e^x}{e^x-1} = -2 \end{cases}$

وبذلك $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-e^x}{e^x-1} = -2$

(ب)- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -1 \end{cases}$

وبذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -1$

(ج)- إشارة $(1-e^{-x})$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^{-x}$	$-$	0	$+$

لدينا $1-e^{-x} = 0$ من أجل $x = 0$ ومنه نستنتج الإشارة

- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^-} 1-e^{-x} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{-x}-1 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -\infty \end{cases}$

- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} 1-e^{-x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^{-x}-1 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = +\infty \end{cases}$

(د)- المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = -2$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x-2) = 0$

ومنه المستقيم (Δ') الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = -1$ فإن

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

- بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ومنه نستنتج أن (C_f) يقبل محور الترتيب كمستقيم مقارب.

(3 - أ) - التحقق من صحة عبارة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \text{لدينا من أجل كل } x: f(x) &= 2x + \frac{2 - e^x}{e^x - 1} \\ f'(x) &= 2 + \frac{-e^x(e^x - 1) - e^x(2 - e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^x - 1)^2 - e^{2x} + e^x - 2e^x + e^{2x}}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 4e^x + 2 - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

ومنه

(ب) - اتجاه التغير وجدول التغيرات:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

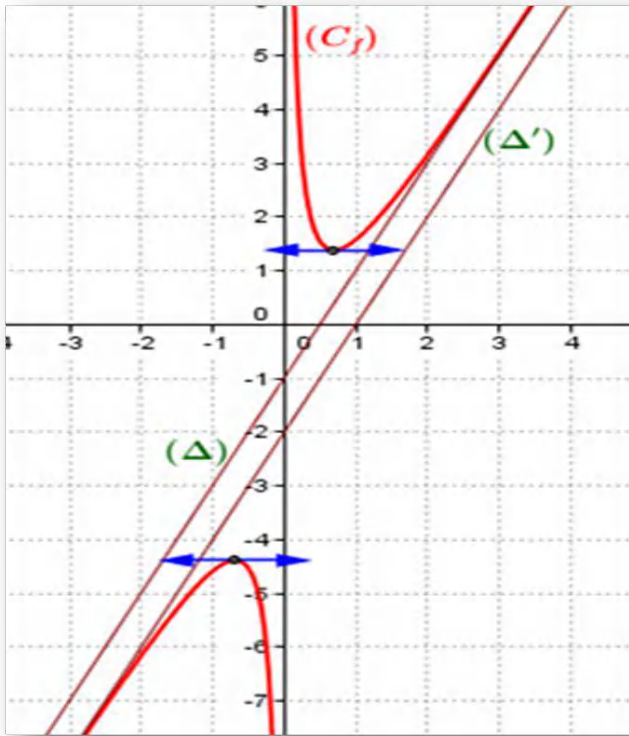
ومنه f متزايدة تماماً في المجال $-\infty; -\ln 2$ والمجال $\ln 2; +\infty$

ومتناقصة تماماً على المجالين $-\ln 2; 0$ والمجال $0; \ln 2$.

- جدول تغيرات الدالة f :

$$\begin{aligned} f(-\ln 2) &= -3 - f(\ln 2) & f(\ln 2) &= 2 \ln 2 - 1 + 1 & \text{لدينا} \\ &= -3 - 2 \ln 2 \approx -4,38 & &= 2 \ln 2 \approx 1,38 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-4,38$	$-\infty$	$1,38$	$+\infty$	



(4) - تمثيل كلا من (Δ) ، (Δ') و (C_f) :

(5) - قيم $\alpha \in]0; +\infty[$

التي من أجلها المعادلة

$$-2 - \ln \alpha e^{-x} + 1 + \ln \alpha = 0 \rightarrow 1$$

لا تقبل حلول :

(أ) - بيانها :

$$(1) \text{ تكافئ } -2e^{-x} - \ln \alpha e^{-x} + 1 + \ln \alpha = 0$$

$$\text{تكافئ } \ln \alpha (1 - e^{-x}) - 2e^{-x} + 1 = 0$$

$$\text{ومنه } \ln \alpha (1 - e^{-x}) = 2e^{-x} - 1$$

$$\text{تكافئ } \frac{2e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}} = \ln \alpha \text{ مع } 1 - e^{-x} \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{2e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}} = 2x + \ln \alpha \\ x \in \mathbb{R}^* \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2x + \ln \alpha \end{cases} \text{ إذا}$$

ومنه حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (d_α) ذو المعادلة $y = 2x + \ln \alpha$

و بذلك (1) لا تقبل حلول عندما المستقيم (d_α) يكون محصور بين المستقيمين المقاربيين (Δ) و (Δ')

$$\text{ومنه } -2 \leq \ln \alpha \leq -1 \text{ فإن } 2x - 2 < 2x + \ln \alpha < 2x - 1$$

$$\text{ومنه } e^{-2} \leq \alpha \leq e^{-1} \text{ وبذلك } \alpha \in [e^{-2}; e^{-1}]$$

(ب) - حسابها :

المعادلة (1) لا تقبل حلول من أجل $-2 - \ln \alpha (1 + \ln \alpha) \geq 0$

$$\text{تكافئ } \begin{cases} -2 \leq t \leq -1 \\ t = \ln \alpha / \alpha > 0 \end{cases} \text{ تكافئ } -2 \leq \ln \alpha \leq -1 \text{ تكافئ } \alpha \in [e^{-2}; e^{-1}]$$

انتهى .



مجموعة الرياضيات الجزائرية (جمال بورنان)

• $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ فإن: $]0; +\infty[$ المجال كل x من أجل أنه تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

لنا $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$ ومنه

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right]' = (1+x+x^2)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' (1+x+x^2) \\ &= (1+2x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} (1+x+x^2) = \frac{x^2(1+2x)e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x^3 + 1 + x + x^2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{2x^2(x+1) + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \boxed{\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

• إستنتاج إتجاه تغير g : وجدنا $(x+1) \left[\frac{(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right]$ $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

بما أنه مهما كان x من $]0; +\infty[$ فإن $\frac{(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$ وأيضا $x+1$ موجب تماما على هذا المجال إذن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

$$g(1) = 3e^{-1} - 1 = \frac{3}{e} - 1 > 0 \quad (2)$$

$$g(0,9) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1 = 2,71 \times 0,32 - 1 \approx -0,13 < 0$$

إذن بما أن الدالة g مستمرة على المجال $]0,9;1[$ و $g(0,9) \times g(1) < 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $g(x) = 0$ حل على الأقل في المجال $]0,9;1[$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال فإن هذا الحل وحيد وهو α .

• إستنتاج إشارة $g(x)$: نستنتج إن $g(x)$ سالب تماما في المجال $]0;\alpha[$ وموجب تماما في المجال $]\alpha; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \quad (II)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \right] = +\infty + 1 \times e^{-\infty} = \boxed{+\infty} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \right] = 0 + (+\infty) \times e^0 = \boxed{+\infty}$$

(ب) تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

لنا $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \right)' = -\frac{1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-1 + x^2 e^{-\frac{1}{x}} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ومنه نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي في المجال $]0; \alpha[$ تكون المشتقة سالبة تماما أي الدالة f متناقصة تماما وفي المجال $]\alpha; +\infty[$ تكون الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$		$+\infty$

$$(2) \text{ تبين أن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = -1$$

بوضع $t = -\frac{1}{x}$ ومنه $x = -\frac{1}{t}$ ولما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 0$ فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{t} e^t + \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-(e^t - 1)}{t} \right) = -\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = -1$$

$Y=x$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ معناه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + (1+x)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}} + \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) \right] = 0 + 1 - 1 = 0$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\bullet \quad h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 - 1 + 1 = 0 \quad (أ)$$

• دراسة اتجاه تغير الدالة h :

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}} \right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

إذن إشارة $h'(x)$ من نفس إشارة $e^{\frac{1}{x}} - 1$

$$h'(x) < 0 \text{ معناه } e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0 \text{ أي } e^{\frac{1}{x}} < 1 \rightarrow e^{\frac{1}{x}} < e^0 \rightarrow -\frac{1}{x} < 0 \text{ إذن الدالة } h \text{ متناقصة تماما}$$

$$\rightarrow x > 0 \rightarrow \boxed{x \in]0; +\infty[}$$

على المجال المعطى أي على مجموعة تعريفها.

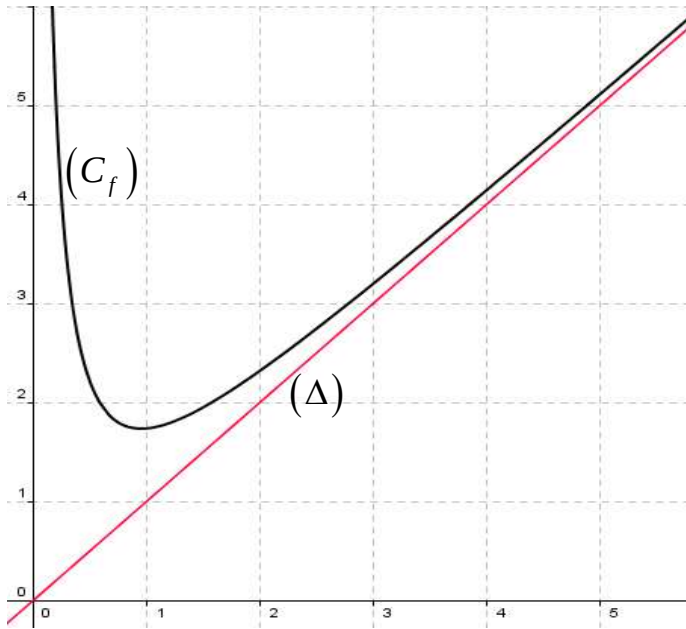
الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ولنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ وعليه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور

الفواصل بشكل تام ومنه مهما كان x من $]0; +\infty[$ فإن $h(x) > 0$.

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x = \frac{1}{x} - x + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \\
 &= \frac{1-x^2}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{(1-x)(1+x)}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \\
 &= (1+x) \left[\frac{1-x}{x} + e^{-\frac{1}{x}} \right] = (1+x) \left[\frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}} \right] = \boxed{(1+x)h(x)}
 \end{aligned}$$

• نستنتج أن $f(x) - x > 0$ إذن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

(4) رسم (Δ) و (C_f) :



$$\begin{aligned}
 (5) \text{ أ } \text{كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : \\
 u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}} \right] - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} \left[n + \left(\frac{n+1}{n}\right) e^{-n} \right] - \frac{n^2}{n+1} \\
 = \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1} \\
 = \boxed{e^{-n}}
 \end{aligned}$$

تتبع

• تبين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q وحدها الأول u_1 :

لنا $u_n = e^{-n}$ ومنه $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e} e^{-n} = \boxed{\frac{1}{e} u_n}$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها

• $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$

• حساب بدلالة n المجموع S_n :

لنا $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\boxed{\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) = u_n + \frac{n^2}{n+1}}$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(u_1 + \frac{1^2}{1+1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2}{2+1} - \frac{1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2}{3+1} - \frac{1}{3+1}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(u_1 + \frac{1^2-1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2-1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2-1}{3+1}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{n^2-1}{n+1}\right) \\ &= \left(u_1 + \frac{(1-1)(1+1)}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{(2-1)(2+1)}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{(3-1)(3+1)}{3+1}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\right) \\ &= (u_1 + (1-1)) + (u_2 + (2-1)) + (u_3 + (3-1)) + \dots + (u_n + (n-1)) \\ &= (u_1 + 0) + (u_2 + 1) + (u_3 + 2) + \dots + (u_n + (n-1)) \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) \\ &= \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}}\right) + \frac{n-1}{2}(1+n-1) = \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{1}{e} \times \frac{e^n - 1}{e-1}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \left(\frac{1}{e} \times \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{e}{e-1}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{1 - e^{-n}}{e-1} + \frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$



(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x+1} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2}{x}} - 1 = -1 \text{ أي}$$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة φ :

$$\varphi'(x) = (2x - 1)e^{-x+1} + (x^2 - x + 1)(-1)e^{-x+1} : x \in \mathbb{R} \text{ ليكن}$$

$$\varphi'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x+1} \text{ أي}$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $e^{-x+1} > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ هي من إشارة $(-x^2 + 3x - 2)$ ؛

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \text{ ومنه } x' = \frac{-3-1}{-2} = 2 \text{ و } x'' = \frac{-3+1}{-2} = 1 \text{ ، وعليه فمن أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من}$$

$$]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[\text{ ، } -x^2 + 3x - 2 < 0 \text{ أي } \varphi'(x) < 0 \text{ ومنه الدالة } \varphi \text{ متناقصة تماما على كل من المجالين }]-\infty; 1[\text{ و }]2; +\infty[$$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1; 2[$ ، $-x^2 + 3x - 2 > 0$ أي $\varphi'(x) > 0$ ومنه الدالة φ متزايدة تماما على المجال $]1; 2[$.

- جدول تغيرات الدالة φ :

x	$-\infty$	1	2	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	$+\infty$	0	$\frac{3}{e} - 1$	0	-1

2. تبين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 :

من خلال جدول تغيرات الدالة φ لدينا من أجل كل $x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[$ ، $\varphi(x) > 0$ و $\varphi(1) = 0$ إذا المعادلة

$\varphi(x) = 0$ تقبل في $]2; +\infty[$ حلا وحيدا وهو 1 .

لدينا الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]2; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-1; \frac{3}{e} - 1[$ إذا يوجد عدد حقيقي وحيد

α من المجال $]2; +\infty[$ حيث $\varphi(\alpha) = 0$ أي α حل للمعادلة $\varphi(x) = 0$.

-تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$:

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

لدينا $\varphi(2,79) \approx 0,000776$ و $\varphi(2,80) \approx -0,00159$ إذا $\varphi(2,80) \times \varphi(2,79) < 0$ ومنه $2,79 < \alpha < 2,80$.

3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $\varphi(1) = \varphi(\alpha) = 0$ ؛ من أجل كل $x \in]1; \alpha[\cup]1; -\infty[$ ، $\varphi(x) > 0$ ، ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $\varphi(x) < 0$.

(II) f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$ و

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} ; (\mathcal{C}_f) \text{ و } (\mathcal{C}_g) \text{ على الترتيب تمثيلهما البيانيان في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}) .$$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^{-x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) e = 0$$

بـدراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = 2e^{-x+1} + (2x - 1)(-1)e^{-x+1} ; \text{ ليكن } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (2 - 2x + 1)e^{-x+1} = (3 - 2x)e^{-x+1}$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x+1} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(3 - 2x)$ ؛

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ } 3 - 2x = 0 \text{ ومعناه } x = \frac{3}{2} ;$$

$$f'(x) > 0 \text{ تكافئ } 3 - 2x > 0 \text{ ومعناه } x < \frac{3}{2} .$$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}]$ ومتناقصة تماماً على المجال $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	0

2. تبين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماساً مشتركاً (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} : x \in \mathbb{R} \text{ ليكن}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \text{ أي}$$

$$f'(1) = (3-2)e^{-1+1} = 1 \text{ و } g'(1) = \frac{-2+2+1}{(1-1+1)^2} = 1 \text{ ومنه}$$

إذا للمنحنيين (C_g) و (C_f) مماسين لهما نفس معامل التوجيه 1 في النقطة ذات الفاصلة 1، ولدينا

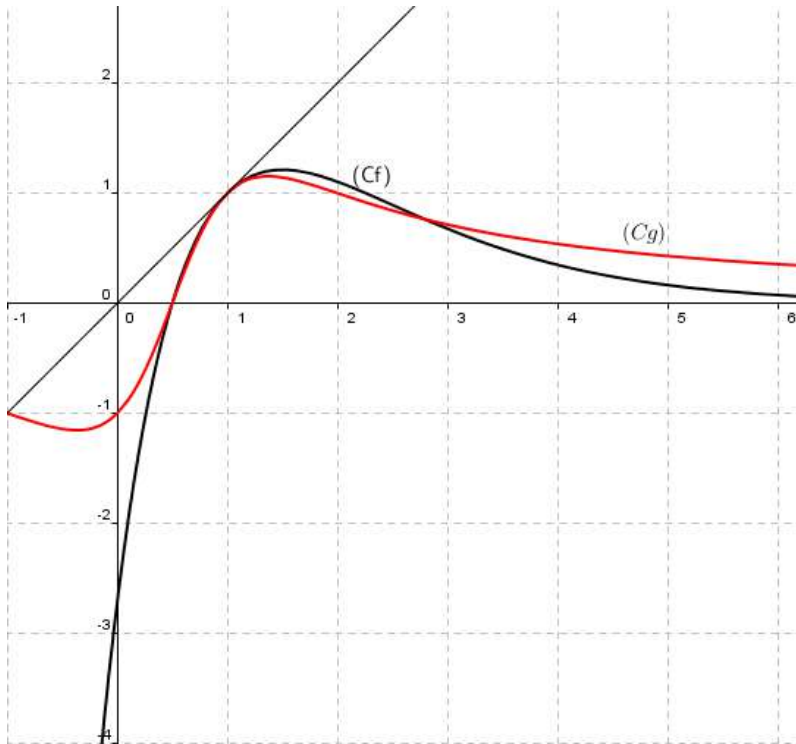
$$g(1) = \frac{2-1}{1^2-1+1} = 1 \text{ و } f(1) = (2-1)e^{-1+1} = 1$$

وهي نقطة التماس ومنه للمنحنيين (C_g) و (C_f) مماسا مشتركا (T) في النقطة $A(1;1)$.

- إيجاد معادلة للمستقيم (T) :

$$y = x - 1 + 1 \text{ أي } y = x$$

3. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) :



تتبع

4. أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$$

$$f(x) - g(x) = (2x-1)e^{-x+1} - \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \quad : x \in \mathbb{R} \text{ ليكن}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)[(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1]}{x^2 - x + 1}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1} \text{ أي}$$

ب- دراسة إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على :

لندرس إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3$ ومنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $x^2 - x + 1 > 0$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+	+	+
$\varphi(x)$	+	+	0	+	-
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$f(x) - g(x)$	-	0	+	+	-

- استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$:

يتقاطعان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في النقط $A(1;1)$ ، $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ و $C(\alpha;f(\alpha))$.

في المجالين $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ و $\left]\alpha; +\infty\right[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل $(\mathcal{C}_g)$ ؛

وفي المجالين $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ و $\left]1; \alpha\right[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أعلى $(\mathcal{C}_g)$.

ج- باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$:

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt \quad : x \in \mathbb{R} \text{ ليكن}$$

نضع $u(t) = 2t - 1$ و $v'(t) = e^{-t+1}$ ومنه $u'(t) = 2$ و $v(t) = -e^{-t+1}$.

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt = \int_1^x u(t)v'(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt = u(t)v(t) - \int_1^x u'(t)v(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt = \left[-(2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x - \int_1^x -2e^{-t+1}dt$$

$$\int_1^x f(t) dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2[e^{-t+1}]_1^x$$

$$\int_1^x f(t) dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2(e^{-x+1} - 1)$$

$$\int_1^x f(t) dt = -(2x+1)e^{-x+1} + 3$$

د- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$:

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = [-(2x+1)e^{-x+1} + 3]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = -5e^{-1} + 3 - [\ln(x^2-x+1)]_1^2$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = (-5e^{-1} + 3 - \ln 3) ua$$

المساحة المطلوبة هي $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ حيث:

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = (-5e^{-1} + 3 - \ln 3) ua \approx 0,0619905 ua$$

(II) 1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (3-2x)e^{-x+1}$ ومنه

$$f''(x) = -2e^{-x+1} - (3-2x)e^{-x+1} = (2x-5)e^{-x+1}$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^{-x+1} - (2x-5)e^{-x+1} = -(2x-7)e^{-x+1}$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^{-x+1} + (2x-7)e^{-x+1} = (2x-9)e^{-x+1}$$

- تخمين عبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. $f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

2. البرهان بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$

$$f'(x) = (-1)^1 [2x - (2+1)] e^{1-x} = -(2x-3)e^{1-x} \text{ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.}$$

نفرض أنه $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ولنبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} [2x - (2n+3)] e^{1-x}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n 2e^{1-x} + (-1)^n [2x - (2n+1)] (-1) e^{1-x} \text{ لدينا}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{1-x} [2x - (2n+1) - 2]$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{1-x} [2x - (2n+3)]$$

ومنه الخاصية وراثية وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

أ- حساب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$:

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n [2 - (2n + 1)] = (-1)^{n+1} (2n - 1)$ ،

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ ، $u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1} (2k - 1) + (-1)^{k+2} (2k + 1)$ ،

$$u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1} (2k - 1 - 2k - 1)$$

$$u_k + u_{k+1} = 2(-1)^{k+2} = 2(-1)^k \text{ أي}$$

ب- استنتاج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = \frac{(u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}) + (u_1 + u_2 + \dots + u_{2n})}{2}$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} &= \frac{u_1 - u_{2n+1} + (u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}) + (u_2 + \dots + u_{2n} + u_{2n+1})}{2} \\ &= \frac{u_1 - u_{2n+1}}{2} + \frac{1}{2} [(u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \dots + (u_{2n} + u_{2n+1})] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [1 - ((-1)^{2n+2} (4n + 1))] + \frac{1}{2} \times 2 [(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2n}]$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = -2n + [(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2n}] = -2n$$

التمرين 04



مجموعة المتميز (جوايل أحمد أسامة)

أ- لدينا $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

$$(1) \text{ حساب النهايات : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{x+1}{e^{\frac{x}{2}}} \right)^2 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty \text{ بالتزايد المقارن ..}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) = 2(1+x)e^{-x} - (1+x)^2 e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-x}$ و منه اشارتها من اشارة $(1-x^2)$ وهي موجبة على المجال $[-1; 1]$ و سالبة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$ و منه f متزايدة على المجال $[-1; 1]$ و متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$.

تتبع

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

جدول تغيراتها

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0

(3) اثبات وجود نقطة الانعطاف: لدينا $f'(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ و منه $f''(x) = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$ و منه اشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 1)$

نحسب المميز $\Delta = 8$ و منه له جذرين هما $x = -1 - \sqrt{2}$ و $x = -1 + \sqrt{2}$

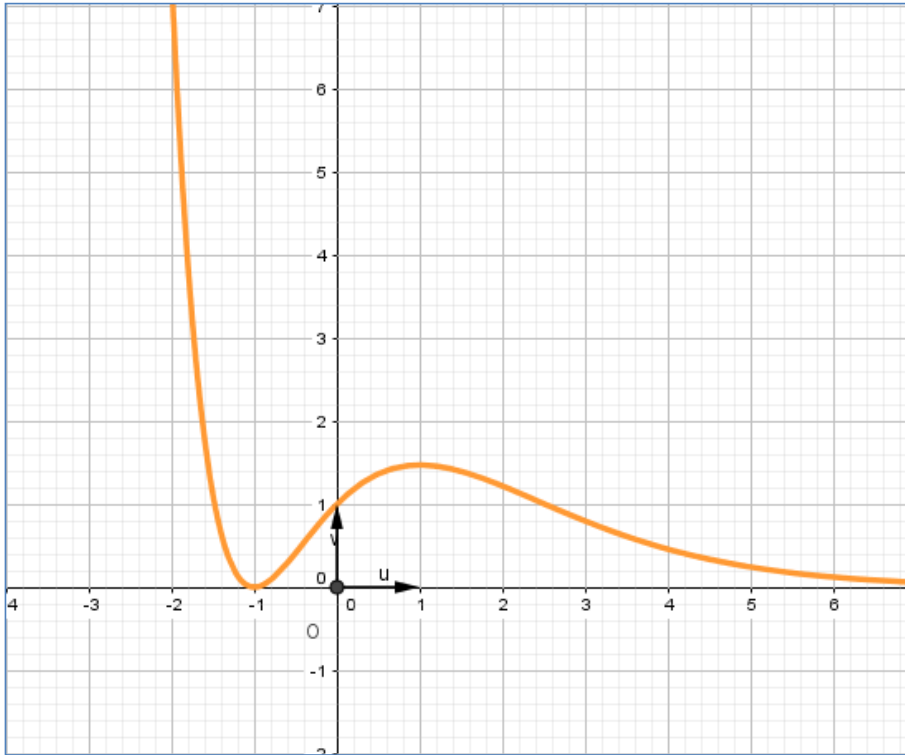
x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
إشارة $f''(x)$	$-$	0	$+$	0

بما f'' تتعدم عند العددين $-1 - \sqrt{2}$ و $-1 + \sqrt{2}$ و تغير اشارتها فإن هما فاصلتي نقطتي انعطاف للمنحنى (C) و

النقطتان هما $A(-1 - \sqrt{2}; 2e^{1+\sqrt{2}})$ و $B(-1 + \sqrt{2}; 2e^{1-\sqrt{2}})$.

حساب $f(-2) = e^2$.

رسم البيان :



تتبع

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

-II لدينا $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$.

(1) اثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω : أي ان احداثياتها لا تتعلق بـ m نعدم المضرب في العبارة في هذا العدد و منه نضع $x=0$ و منه $f_m(0)=1$ أي ان كل المنحنيات تمر من $(0; 1)$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f_m $f'_m(x) = (2x + m - x^2 - mx - 1)e^{-x}$ و منه $f'_m(x) = (-x^2 + (2-m)x + m - 1)e^{-x}$ نحسب المميز $\Delta = (2-m)^2 + 4(m-1) = m^2$ و منه f'_m تقبل جذرين هما $x''=1-m$; $x'=1$ و منه تكون

لما m عدد موجب :

- $f'_m(x)$ موجبة على المجال $[1-m; 1]$ و منه f متزايدة على هذا المجال
- $f'_m(x)$ سالبة على المجالين $[1; +\infty[$ و $]-\infty; 1-m]$ منه f متناقصة على هذين المجالين

لما m عدد سالب :

- $f'_m(x)$ موجبة على المجال $[1; 1-m]$ و منه f متزايدة على هذا المجال
- $f'_m(x)$ سالبة على المجالين $[1-m; +\infty[$ و $]-\infty; 1]$ منه f متناقصة على هذين المجالين .

لما m عدد معدوم : فإن $f'_m(x)$ تتعدم عند 1 و هي موجبة أي ان الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

مما سبق نستنتج أن f تقبل قيمتين حديتين لما $m \neq 1$.

(3) لدينا $f_m(1-m) = [(1-m)^2 + m(1-m) + 1]e^{-1+m}$ أي $f_m(1-m) = [-m+2]e^{-1+m}$ و منه $M_m(1-m; f_m(1-m))$ أي $M_m\left(1-m; \frac{(2-m)}{e^{1-m}}\right)$ بوضع $x=1-m$ و $y = \frac{2-m}{e^{1-m}}$

نجد $y = (1+x)e^{-x}$ و هي معادلة المنحنى الشامل للنقطة M_m لما m يسمح $\mathbb{R}$.

(4) دراسة وضعية (C) بالنسبة للمنحنى (C_m) لدينا $f_m(x) - f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (m-2)e^{-x}$ اشارته من اشارة $(m-2)$: المناقشة

- لما $m > 2$ فإن (C_m) يقع فوق (C) على $\mathbb{R}$.
- لما $m < 2$ فإن (C_m) يقع تحت (C) على $\mathbb{R}$.

(5) حساب مساحة الحيز $A(\alpha)$ $A(\alpha) = \int_0^\alpha [f_3(x) - f(x)]dx = \int_0^\alpha e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\alpha = 1 - e^{-\alpha}$

و منه $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [1 - e^{-\alpha}] = 1$.



كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$

(1) إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تمر بنقطتين ثابتتين :

لدينا : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ أي : $f_{k+1}(x) = (x+1)^2 e^{-(k+1)x}$ و بما أن النقطة ثابتة مهما تغير الوسيط k فسيكون ترتيب النقطة ثابت مهما كان k .

أي : $f_{k+1}(x) - f_k(x) = 0$ أي : $(x+1)^2 e^{-(k+1)x} - (x+1)^2 e^{-kx} = 0$ و منه : $e^{-kx} (x+1)^2 (e^{-x} - 1) = 0$

و عليه : $\begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (e^{-x} - 1) = 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = -1 \\ e^{-x} = 1 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ إذن : جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما

$A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

(2) حساب نهايتي الدالة f_k :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+1)^2 e^{-kx}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-kx}) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)^2 e^{-kx}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-kx}) = 0 \end{cases} \text{ لما } k > 0 \text{ يكون : (*)}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+1)^2] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)^2] = +\infty \end{cases} \text{ لما } k = 0 \text{ يكون : (*)}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+1)^2 e^{kx}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{kx}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)^2 e^{kx}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{kx}) = +\infty \end{cases} \text{ لما } k < 0 \text{ : (*)}$$

(3) أ) حساب $f'_k(x)$ ثم تحديد اتجاه تغير الدالة f_k حسب قيم k :

$$f'_k(x) = (x+1)(-kx - k + 2)e^{-kx} \text{ أي : } f'_k(x) = 2(x+1)e^{-kx} - k(x+1)^2 e^{-kx}$$

(*) من أجل $k = 0$ تكون : $f'_0(x) = 2(x+1)$ هذه الأخيرة موجبة على $[-1; +\infty[$ و سالبة على $]-\infty; -1]$ و منه :

الدالة f_0 متزايدة على المجال $[-1; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty; -1]$.

(*) من أجل $k > 0$: ندرس إشارة المشتقة أي نحل المعادلة $f'_k(x) = 0$ أي : $\begin{cases} x+1=0 \\ -kx - k + 2 = 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{2-k}{k} \end{cases}$

إذن : لما $x \in [-1; \frac{2-k}{k}]$ تكون $f'_k(x) \geq 0$ و عليه الدالة f_k متزايدة على المجال $[-1; \frac{2-k}{k}]$.

لما $x \in]-\infty; -1] \cup [\frac{2-k}{k}; +\infty[$ تكون $f'_k(x) \leq 0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على كل من المجالين :

$$]-\infty; -1] \text{ و } [\frac{2-k}{k}; +\infty[$$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

(*) من أجل $k < 0$: بنفس الطريقة السابقة ، لكن :

لما $x \in]-\infty; -1] \cup \left[\frac{2-k}{k}; +\infty\right[$ تكون $f'_k(x) \geq 0$ و عليه الدالة f_k متزايدة على كل من المجالين : $]-\infty; -1]$ و $\left[\frac{2-k}{k}; +\infty\right[$.

لما $x \in \left[-1; \frac{2-k}{k}\right]$ تكون $f'_k(x) \leq 0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على المجال $\left[-1; \frac{2-k}{k}\right]$.

(ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل $k \in \mathbb{R}_+$: -----

x	$-\infty$	-1	$\frac{-k+2}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$
$f_k(x)$	$+\infty$	$f_k(-1)$	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	0

(4) المناقشة حسب قيم k الوضع النسبي بين المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) : -----

ندرس إشارة الفرق نجد : $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx} \left[\frac{1-e^x}{e^x} \right]$ ، نلاحظ أنّ إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$:

(*) الفرق ينعدم عند 0 و -1 أي أنّ المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين A و B . (س1)

(*) الفرق يكون موجب على $]-\infty; 0]$ أي أنّ المنحني (C_{k+1}) يقع فوق المنحني (C_k) .

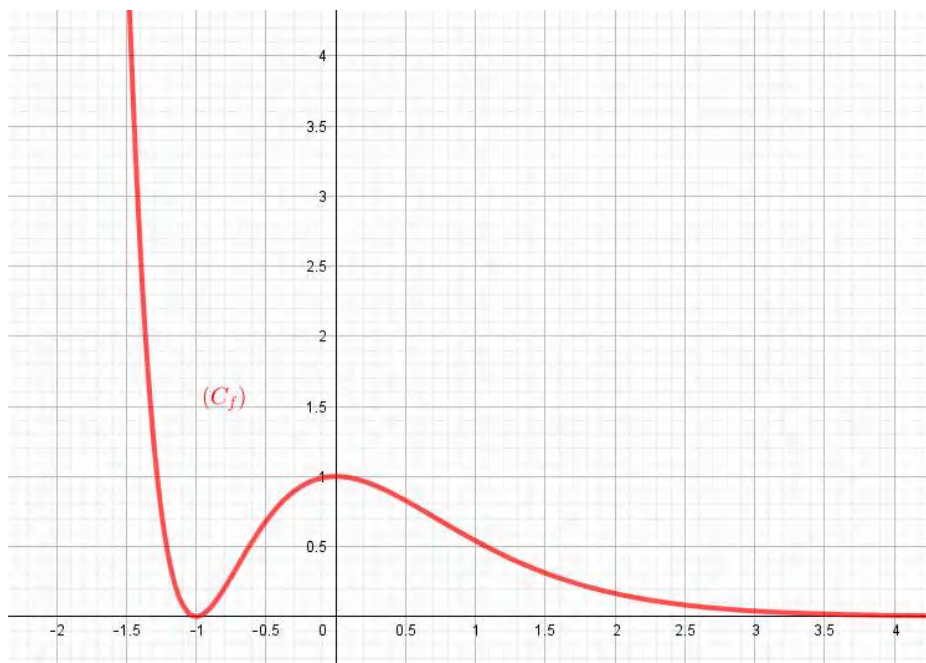
(*) الفرق يكون سالب على $[0; +\infty[$ أي أنّ المنحني (C_k) يقع تحت المنحني (C_{k+1}) .

الجزء الثاني : لدينا $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$.

(1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$: -----

x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{e^3}{4}$	0	1	0

(* إنشاء المنحني (C_f) :



(2 أ) بيان أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x) = 1$ تعني $f(x) - 1 = 0$ ، لنضع : $h(x) = f(x) - 1$.

الدالة h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty, -1]$ و $\begin{cases} h(-1,28) = 0,01 \\ h(-1,27) = -0,08 \end{cases}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن

المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,28 < \alpha < -1,27$.

و من جهة أخرى لدينا : $g(0) = f(0) - 1$ أي : $h(0) = 1 - 1$ و منه : $h(0) = 0$ أي أن الحل الآخر معدوم .

(ب) تعيين قيم m :

لدينا : $\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right|$ أي : $\frac{|x+1|}{e^x} = \frac{|m+1|}{e^m}$ أي : $|x+1|e^{-x} = |m+1|e^{-m}$ أي تصبح :

$(x+1)^2 e^{-2x} = (m+1)^2 e^{-2m}$ ، إذن : $f(x) = f(m)$ ، حلول هذه الأخيرة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f)

مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$ و عليه : قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلا

وحيدا و من خلال ملاحظة البيان نجد أنها محققة لما يكون $m \in]-\infty; \alpha[$.

(3) لدينا : $g(x) = (x+1)e^{-2x}$.

(أ) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$:
 $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$: منه $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} - e^{-2x}$
 إذن : من أجل كل عدد حقيقي تكون $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ محققة .

(*) يمكن الآن إستنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$ أي : $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ و عليه تصبح :

$$G(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c : \text{ أي أن الدالة الأصلية هي } g(x) = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}e^{-2x}$$

(ب) باستعمال الكاملة بالتجزئة حساب مساحة الحيز المستوي :

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \underbrace{(x+1)^2}_{u} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2(x+1) \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) dx = -\frac{1}{2} + \int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 \right) : \text{ أي } \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \right]_{-1}^0$$

$$\text{و منه : } \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 \right) : \text{ أي } \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^2$$

$$\text{إذن : } \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^2 \text{ و عليه : } \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{5}{4} + \frac{e^2}{4} (u.a)$$



تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
1. اثبات ان الدالة f تقبل الصفر كنهاية عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2}(x-1)^2 e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \quad \text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{(x-1)^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \end{array} \right. \quad \text{وبما ان} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ t \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{فان}$$

2. اثبات ان f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = x(x+1)(2-x)e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$:

- بما ان الدوال $x \mapsto x^2$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto -\frac{1}{2}(x-1)^2$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x) = (x^2)' e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} + \left(e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \right)' x^2 = 2xe^{\frac{1}{2}(x-1)^2} + \left[-\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]' e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \times x^2$$

$$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{2}(x-1)^2} - (x-1)e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \times x^2 = [2x - x^2(x-1)]e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

$$= [2x - x^2(x-1)]e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} = x(-x^2 + x + 2)e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} = x(x+1)(-x+2)e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

3. إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتاج اتجاه تغير f :

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $f'(x) = x(x+1)(2-x)e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x+1)(2-x)$

لان من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} > 0$

لدينا $x(x+1)(2-x) = 0$

من اجل $x=0$ او $x=-1$ او $x=2$

وبذلك f متناقصة تماما في المجالين $[-1; 0]$ و $[2; +\infty[$

و متزايدة تماما في المجالين $[0; 2]$ و $]-\infty; -1]$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$(x+1)(2-x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	0	e^{-2}	0	$\frac{4}{\sqrt{e}}$	0

4. شكل جدول تغيرات الدالة f :

$$f(-1) = (-1)^2 e^{\frac{1}{2}(-1-1)^2} = e^{-2}$$

$$f(0) = (0)^2 e^{\frac{1}{2}(0-1)^2} = 0$$

$$f(2) = (2)^2 e^{\frac{1}{2}(2-1)^2} = 4e^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$$

5. معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $(+1)$:

$$\begin{cases} f'(1) = (1)(2)(1)e^{\frac{1}{2}(1-1)^2} = 2 \\ f(1) = (1)^2 e^{\frac{1}{2}(1-1)^2} = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا } (T): y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \text{حيث}$$

$$(T): y = 2x - 1 \quad \text{ومنه}$$

6. اثبات ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) تشمل مبدأ المعلم :

نعلم ان المماس عند النقطة $(a; f(a))$ من $(\mathcal{C}_f)$ له معادلة من الشكل $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

حتى يشمل هذا المماس المبدأ يجب $0 = f'(a)(0-a) + f(a)$ تكافئ $f(a) = a f'(a)$

تكافئ $a^2 e^{\frac{1}{2}(a-1)^2} = a^2(a+1)(2-a)e^{\frac{1}{2}(a-1)^2}$ تكافئ $a^2 = a^2(a+1)(2-a)$ وذلك مهما كان $a \in \mathbb{R}$

$$\text{ومنه } a^2[1 - (a+1)(2-a)] = 0 \quad \text{وبذلك} \quad a^2(a^2 - a - 1) = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ومنه إما } a^2 = 0 \text{ من أجل } a = 0 \text{ أو } a^2 - a - 1 = 0 \text{ من أجل} \\ a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ 0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} \quad \text{إذا } (\mathcal{C}_f) \text{ يقبل ثلاثة مماسات تشمل مبدأ المعلم عند النقط التي فواصلها}$$

أ- إحداثيتي نقطة التماس لكل مماس:

- من أجل $x=0$ فان $f(0)=0$ ومنه النقطة هي المبدأ $(0;0)$.

- من أجل $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ فان $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}$ ومنه النقطة هي $M_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}\right)$

- من أجل $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فان $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}$ ومنه النقطة هي $M_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}\right)$

ب- معامل توجيه لكل مماس ثم معادلة لكل من (d_1) ، (d_2) و (d_3) :

- من أجل $x=0$ فان $f'(0)=0$ ومنه معادلة المماس $(d_1): y=0$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

- من أجل $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

فان $f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}$

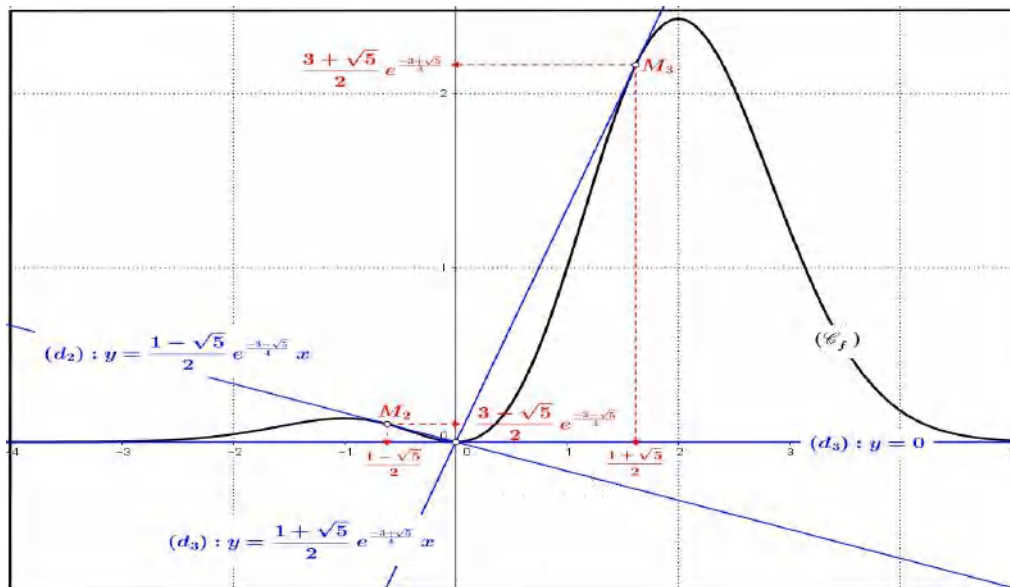
ومنه معادلة المماس $(d_2): y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}} \cdot x$

- من أجل $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

فان $f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}$

ومنه معادلة المماس $(d_3): y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} \cdot x$

7. رسم كل من المنحنى (C_f) و المماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) :



8. m عدد حقيقي ، نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = m x$.

(أ)- إثبات ان (d_m) يشمل نقطة ثابتة :

- بفرض ان $M_0(x_0; y_0) \in (d_m)$ يكافئ $y_0 = m x_0$ ومنه $x_0 - y_0 = 0$ ومنه $x_0 = 0$ ومنه $y_0 = 0$

ومنه مهما كان العدد الحقيقي m فان (d_m) يشمل المبدأ .

(ب)- براءة بيانية ، إيجاد قيم m الحقيقية ، التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع (C_f) في ثلاث نقاط متميزة:

المستقيم (d_m) ميله متغير m ويشمل المبدأ إذا المستقيم (d_m) يدور و مركز دورانه المبدأ

من البيان نستنتج ان لمستقيم (d_m) يقطع (C_f) في ثلاث نقاط متميزة من اجل :

$$m \in \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}} ; 0 \right[\cup \left] 0 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} \right[$$



تماين مقترحة (ساعد أحمد)

أولا: (1) دراسة تغيرات الدالة g :

• النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - 2xe^x - 4) = -4$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 2x)e^x - 4 = -\infty$

• حساب المشتقة: $g'(x) = -2e^x + e^x(4 - 2x) = (-2x + 2)e^x$

• إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $-2x + 2$.

لدينا $g'(x) = 0$ تكافئ $-2x + 2 = 0$ أي $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-4	$2e - 4$	$-\infty$

(2) لدينا $g(0) = (4 - 0)e^0 - 4 = 0$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا معدوما هذا من جهة.

ومن جهة أخرى لدينا g مستمرة على $\mathbb{R}$ ورتيبة تماما على $[1, +\infty[$ و $g(1,5) \times g(1,6) < 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

ثانيا

(1) لدينا $f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}$. نبين أن المنحني (C_f) يقبل عند $-\infty$ وعند $+\infty$ مستقيمين

مقاربين معادلتيهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} \right)}{x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)} = 0$

المنحني (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = -1$$

(C_f) يقبل عند $-\infty$ مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = -1$.

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x) = \frac{2(e^x - 2x) - (e^x - 2)(2x - 2)}{(e^x - 2x)^2} = \frac{-2xe^x + 4e^x - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$$

(3) استنتاج إشارة $f'(x)$ وإنجاز جدول تغيرات الدالة f .

$f'(x)$ لها نفس إشارة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-1	-2	$f(\alpha)$	0	

(4) حساب $f(1)$ ثم استنتاج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

لدينا $f(1) = 0$ ونلخص جدول إشارة $f(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

(5) نبين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ونستنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

$$e^\alpha = \frac{4}{4 - 2\alpha} = \frac{2}{2 - \alpha} \text{ أي } (4 - 2\alpha)e^\alpha - 4 = 0 \text{ أي } g(\alpha) = 0 \text{ لدينا من الجزء الأول}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha - 2}{e^\alpha - 2\alpha} = \frac{2\alpha - 2}{\frac{2}{2 - \alpha} - 2\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\frac{1}{2 - \alpha} - \alpha} = \frac{(\alpha - 1)(2 - \alpha)}{1 - 2\alpha + \alpha^2} \text{ إذن}$$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

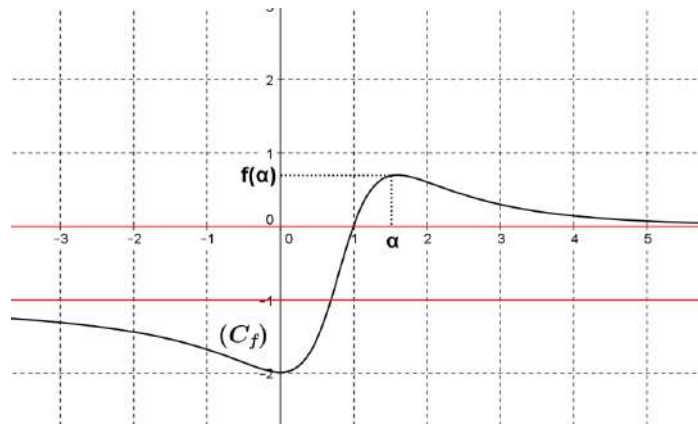
$$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

حصر العدد $f(\alpha)$: لدينا $1,59 < \alpha < 1,60$ وبإضافة -1 نجد $0,59 < \alpha - 1 < 0,60$ نأخذ المقلوب نجد

$$\frac{1}{0,60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,59} \text{ أي } 1,66 < \frac{1}{\alpha-1} < 1,69 \text{ وبإضافة } -1 \text{ نجد } 0,66 < -1 + \frac{1}{\alpha-1} < 0,69$$

$$0,66 < f(\alpha) < 0,69$$

(6) أنشاء المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f) .



ثالثاً:

(7) المناقشة بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة

$$2x - 2 = (e^x - 2x)m$$

$$2x - 2 = (e^x - 2x)m \text{ تكافئ } \frac{2x-2}{e^x-2x} = m \text{ أي } f(x) = m \text{ . حلول المعادلة المطلوبة هي فواصل}$$

نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = m$:

- ❖ إذا كان $m < -2$ المعادلة لا تقبل حلول.
- ❖ إذا كان $m = -2$ للمعادلة حل مضاعف معدوم.
- ❖ إذا كان $-2 < m < -1$ للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة.
- ❖ إذا كان $-1 \leq m \leq 0$ للمعادلة حل وحيد موجب.
- ❖ إذا كان $0 < m < f(\alpha)$ للمعادلة حلين موجبين.
- ❖ إذا كان $m = f(\alpha)$ للمعادلة حل مضاعف $x = \alpha$.
- ❖ إذا كان $m > f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول.

رابعاً:

(1) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = -f(x)$.

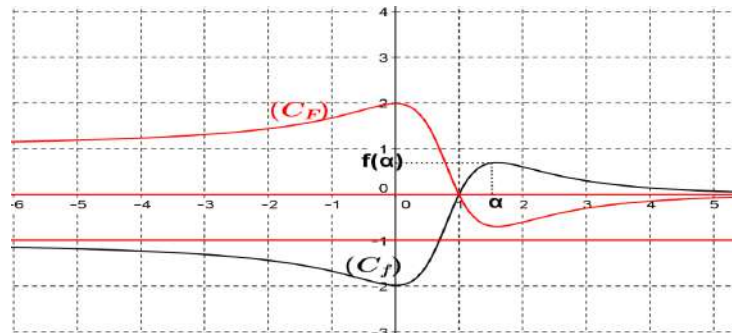
أ) حساب $F'(x)$ بدلالة $f'(x)$ واستنتاج إشارة $F'(x)$.

$F'(x) = -f'(x)$ وإشارة $F'(x)$ هي عكس إشارة $f'(x)$ أي

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-	+

ب) ننجز جدول تغيرات الدالة F وننشئ تمثيلها البياني (C_F) .

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-	+
$F(x)$		2	$-f(\alpha)$	0



(2) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ واستنتاج إشارة $h'(x)$.

لدينا $h(x) = [f(x)]^2$ ومنه $h'(x) = 2f(x) \times f'(x)$.

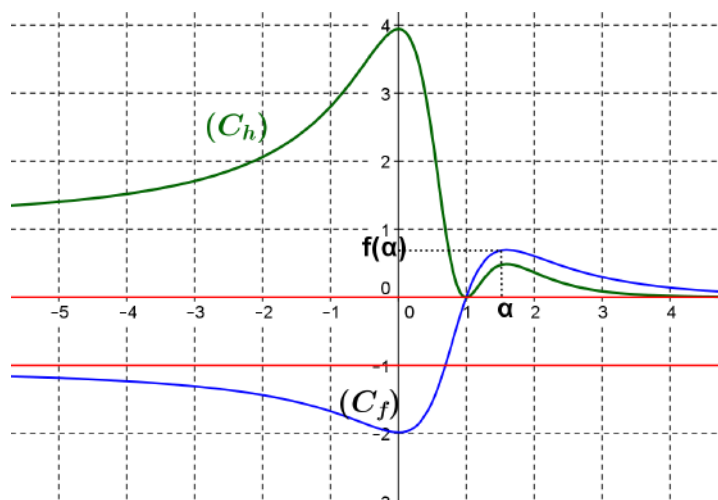
إشارة $h'(x)$ هي إشارة الجداء $2f(x) \times f'(x)$ أي

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	-	0	+	+
$h'(x)$	+	0	-	0	-

(ب) جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$		4	1	$(f(\alpha))^2$	0

(ج) إنشاء (C_h)



(3) لتكن u الدالة المعرفة كما يلي: $u(x) = \frac{1}{f(x)}$

(أ) مجموعة التعريف للدالة u : الدالة u معرفة إذا وفقط إذا كان $f(x) \neq 0$ أي من أجل $x \neq 1$

إذن $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

(ب) حساب $u'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $u'(x)$.

$$u'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} : D_f \text{ من أجل كل}$$

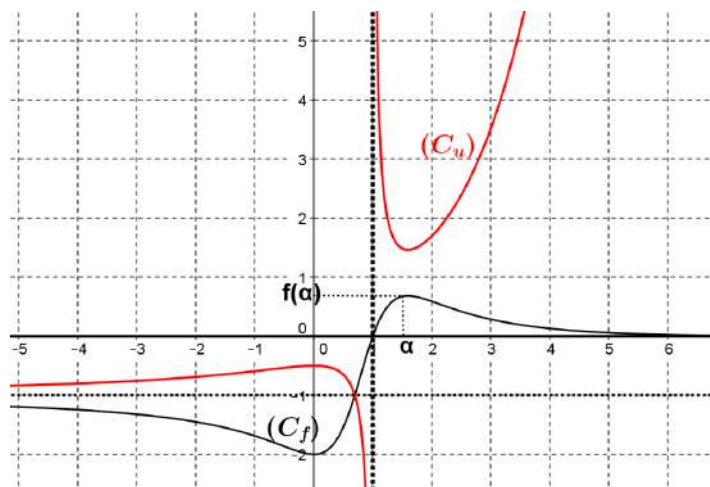
إشارة $u'(x)$ هي إشارة $-f'(x)$ أي

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-	-	+

ج) جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-	-	+
$u(x)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

د) إنشاء (C_u)



4) لتكن v الدالة المعرفة كما يلي : $v(x) = \sqrt{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة v : معرفة إذا وقط إذا كانت $f(x) \geq 0$ أي $D_v = [1, +\infty[$.

ب) حساب $v'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ واستنتاج إشارة $v'(x)$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على المجال $[1, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي v' حيث $v'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

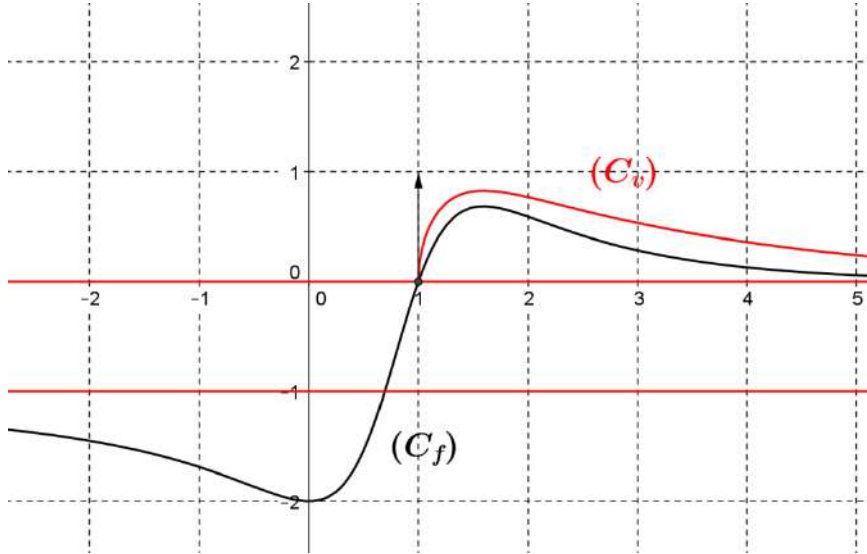
إشارة $v'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة v :

x	1	α	$+\infty$
$v'(x)$	+	0	-
$v(x)$	0	$\sqrt{f(\alpha)}$	0

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

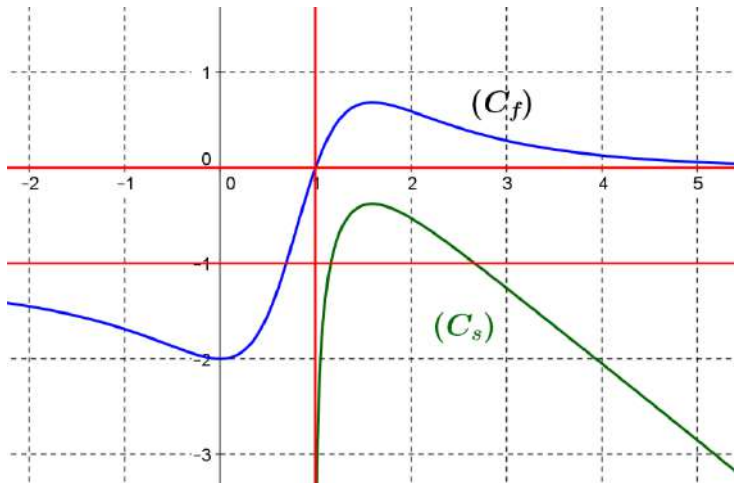
د) إنشاء (C_v)



- 5) لتكن s الدالة المعرفة كما يلي : $s(x) = \ln f(x)$
 أ) مجموعة التعريف للدالة s : s معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x) > 0$ أي $D_s =]1, +\infty[$.
 ب) حساب $s'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $s'(x)$.

الدالة s قابلة للإشتقاق على $]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي s' حيث $s'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

إشارة $s'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.
 ج) جدول تغيرات الدالة s



x	1	α	$+\infty$
$s'(x)$	+	0	-
$s(x)$	$-\infty$	$\ln f(\alpha)$	$-\infty$

د) إنشاء (C_s)

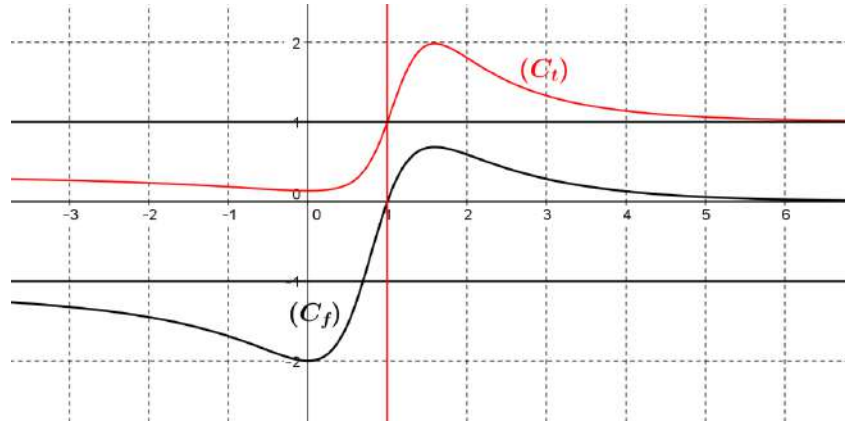
مسائل المستوى الخامس ★★★★★

- (6) لتكن t الدالة المعرفة كما يلي: $t(x) = e^{f(x)}$
 أ) مجموعة التعريف للدالة t : الدالة t معرفة على $\mathbb{R}$.
 ب) حساب $t'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $t'(x)$.
 t قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي t' حيث $t'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.
 إشارة $t'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة t

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$t'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$t(x)$	e^{-1}	e^{-2}	$e^{f(\alpha)}$	1	

د) إنشاء (C_t)



خامسا: ارفاق كل دالة بتمثيلها البياني

(C_6)	(C_5)	(C_4)	(C_3)	(C_2)	(C_1)	المنحنى
(C_u)	(C_F)	(C_h)	(C_t)	(C_s)	(C_v)	هو التمثيل البياني للدالة.....



تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفی)

الجزء الأول : $f_1(x) = xe^{-x}$

(1) (أ) نهاية الدالة f_1 عند $-\infty$: نعلم ان $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$

و نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$: نعلم حسب التزايد المقارن ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f_1 :

$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ ومنه $f_1'(x) > 0$ تعني $(1-x)e^{-x} > 0$ أي $1-x > 0$ اذن $x < 1$

ومن الدالة f_1 متزايدة من اجل $x < 1$ ومتناقصة من اجل $x > 1$ و $f_1'(x) = 0$ من اجل $x = 1$

(ج) المنحنى (C_k) لا يناسب (C_1) (التغيرات غير منسجمة) اذن $k \neq 1$ اذن $k > 1, k \geq 2$

(2) (أ) $f_n(x) = x^n e^{-x}$

ومن $f_n(0) = 0^n \times e^{-0} = 0$ ومنه فان كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة $O(0,0)$

ونلاحظ أيضا ان $f_n(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ أي $B\left(1; \frac{1}{e}\right) \in C_n$ اذن كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة $B\left(1; \frac{1}{e}\right)$

(ب) من اجل $n \geq 2$ فان المشتقة هي : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x}) = x^{n-1}e^{-x}(n-x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

اذن $f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

(3) من اجل كل عدد حقيقي x : $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$ و $f_3'(x) > 0$ من اجل $x^2(3-x)e^{-x} > 0$ أي

$3-x > 0$ اذن $x < 3$ وبالتالي الدالة f_3 متزايدة من اجل $x < 3$ ومتناقصة من اجل $x > 3$

وهذا يعني ان الدالة f_3 تقبل قيمة حدية كبرى عندما $x = 3$

(4) (أ) المماس (T_k) له معادلة من الشكل : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$

حيث $f_k(1) = \frac{1}{e}$ و $f_k'(1) = (k-1)e^{-1} = \frac{k-1}{e}$ اذن : $y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = \frac{k-1}{e}x + \frac{-k+2}{e}$

(T_k) يقطع محور الفواصل عندما $y = 0$ أي $\frac{k-1}{e}x + \frac{-k+2}{e} = 0$ ومنه $x = -\frac{-k+2}{k-1} = \frac{k-2}{k-1}$

اذن (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right)$

(ب) استنتاج قيمة العدد الصحيح k :

من معطيات التمرين المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{4}{5}; 0\right)$ أي $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right) = \left(\frac{4}{5}; 0\right)$

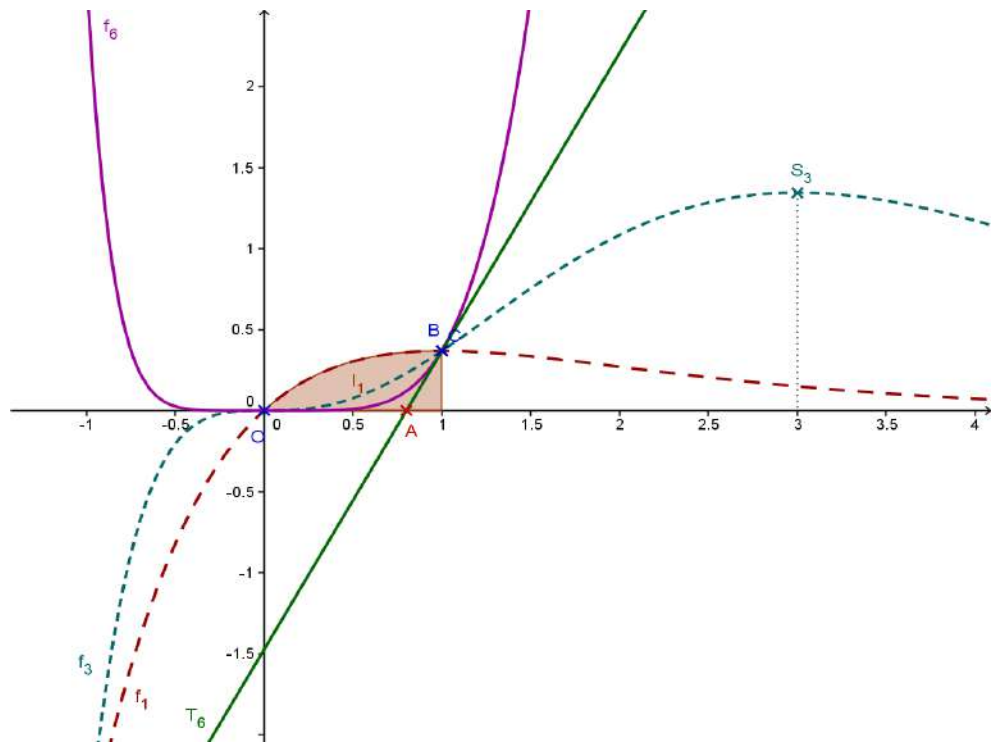
ومن $\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5}$ اذن $5(k-2) = 4(k-1)$ وبالتالي قيمة العدد هي $k = 6$

الجزء الثاني : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

(1) حساب (I_1) : $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ اذن نجد

$$I_1 = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \times 1 dx = \left[(-e^{-1}) - 0 \right] - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left[(e^{-1}) - 1 \right] = 1 - \frac{2}{e}$$



(2) (أ) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (I_n) :

من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان الدالة f_n موجبة على $[0,1]$. اذن يمكن تفسير هندسيا العدد I_n انه

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_n) ومحور الفواصل وبالمستقيمين الذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$

والتمثيلات البيانية (C_1) و (C_2) و (C_3) و (C_{10}) و (C_{20}) و (C_{30}) توحي ان المتتالية (I_n) متناقصة

(ب) برهان هذا التخمين بدراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

ومن خواص التكامل الخطية اذن : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x} dx = \int_0^1 (x-1) x^n e^{-x} dx$

وعلى المجال $[0,1]$ لدينا $(x-1)x^n e^{-x} \leq 0$ اذن $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x} dx \leq 0$ ومنه $I_{n+1} - I_n \leq 0$ وبالتالي $I_{n+1} \leq I_n$

つづ<

وهكذا اذن المتتالية (I_n) متناقصة

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

(ج) $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ وبما ان $f_n(x) \geq 0$ فان $I_n \geq 0$ (محدودة من الأسفل) وبما ان المتتالية (I_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 نستنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة .
(د) حساب $\lim I_n$:

لدينا $0 \leq x \leq 1$ ومنه $-1 \leq -x \leq 0$ و $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0$ وأيضا $x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$ أي ان $x^n e^{-x} \leq x^n$
وبالمرور الى التكامل نجد : $\int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$ ومنه $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
اذن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ وباستعمال النهاية بالمقارنة نجد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ اذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

التمرين 04



كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول :

لدينا : $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$ ، حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مركبة من دالة كثير حدود و دالة أسية ، أي :

$$f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - 2\alpha e^x$$

، القيم الحدية للدالة f_α تحقق : $f'_\alpha(x) = 0$ أي :

$$2e^{2x} - 2\alpha e^x = 0$$

، ومنه : $2e^x(e^x - \alpha) = 0$ ، لدينا : $e^x \neq 0$ إذا : $e^x - \alpha = 0$ أي : $e^x = \alpha$.

وهنا نميز حالتين :

أ- إذا كان : $\alpha \leq 0$ معناه : $e^x = \alpha$ غير محققة وعليه نقول أن لا توجد قيم حدية للدالة f_α لما $\alpha \leq 0$.

ب- إذا كان : $\alpha \geq 0$ معناه : $e^x = \alpha$ تقبل حل وحيد x_α وهو : $\ln e^{x_\alpha} = \ln \alpha$ أي : $x_\alpha \ln e = \ln \alpha$ ، ومنه : $x_\alpha = \ln \alpha$.

أي نقول توجد قيمة حدية للدالة f_α لما $\alpha \geq 0$ وهي : $\omega_\alpha(x_\alpha; f(x_\alpha))$.

(2) لدينا لما $\alpha \geq 0$ ، $\omega_\alpha(x_\alpha; f(x_\alpha))$ هي النقطة الحدية للدالة f_α :

$$\begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = (e^{\ln \alpha})^2 - 2e^{\ln \alpha} + 3 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = f(x_\alpha) = f(\ln \alpha) = 2e^{\ln \alpha} - 2\alpha e^{\ln \alpha} + 3 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x_\alpha = \ln \alpha \\ y_\alpha = -\alpha^2 + 3 \end{cases} \text{ ، ومنه : } \omega_\alpha(\ln \alpha; 3 - \alpha^2) : \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

✓ تعيين مجموعة النقط ω_α لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا إحداثيات ω_α هي x_α و $y_\alpha = f(x_\alpha)$ ، لدينا لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$ فإن x_α يسمح $\mathbb{R}$ و y_α صورة x_α

بالدالة f_α ، إذن نقول : مجموعة النقط ω_α هي المنحني (C_α) منحنى الدالة f_α .

($x_\alpha = \ln \alpha$) ، لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$ فإن x_α يسمح $\mathbb{R}$.

تتبع

الجزء الثاني :

نضع $\alpha = 1$ ، أي : $f_1(x) = 2e^{2x} - 2e^x + 3$ ، أي : $f_1'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$.
 (1) لدينا : $\alpha = 1 > 0$ ومنه : (C_1) يقبل قيمة حدية ω_1 ، حيث : $\omega_1(x_1; f(x_1))$ ، أي : $\omega_1(0; 2)$ ومنه : $\begin{cases} x_1 = \ln 1 = 0 \\ y_1 = f(0) = 2 \end{cases}$.

• $f_1'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$ أي : $f_1'(x) = 2e^x(e^x - 1)$ ، إشارة f_1' من إشارة $(e^x - 1)$ ، أي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f_1(x)$	3	$f_1(0) = 2$	$+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$: أي . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{2x} - 2e^x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 2) + 3 = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 3$: أي ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x + 3) = 3$

و منه : $y = 3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$.

(2) تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$:

$$\begin{cases} f_1'(\ln 2) = 2e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} = (2e^{\ln 2})^2 - 4 = 8 - 4 = 4 \\ f_1(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} + 3 = 4 - 4 + 3 = 3 \end{cases} \quad ، \quad (T): y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$$

و منه : $(T): y = 4(x - \ln 2) + 3$ ، أي : $(T): y = 4x - 4\ln 2 + 3$.

(4) لدينا : $(D_m): y = mx + 3 - m \ln 2$:

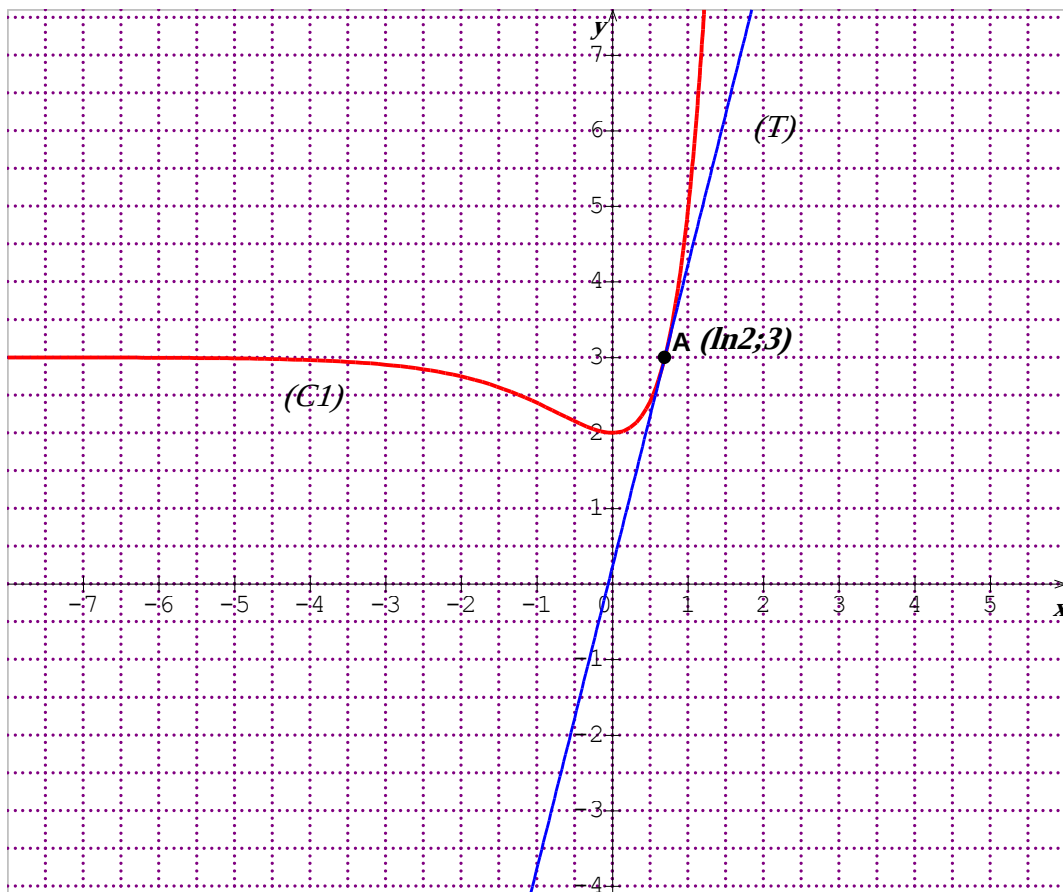
• تبين أن المستقيمت (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها :

$$m(\ln 2 - x) + (y - 3) = 0 \quad \text{ومنه} \quad y - mx - 3 + m \ln 2 = 0 \quad \text{أي} \quad y = mx + 3 - m \ln 2$$

معناه أن : $\ln 2 - x = 0$ و $y - 3 = 0$ ، وعليه : $x = \ln 2$ و $y = 3$ ، ومنه من أجل كل m من $\mathbb{R}$ المستقيمت (D_m)

تشمل نقطة ثابتة ذات الإحداثيات $A(\ln 2; 3)$.

(3) رسم كلا من (T) و (C_1) : باستخدام مبرمج (sine qua non) :



• لنناقش بياناً حسب قيم m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) :
لدينا : (T) هو (D_4) ، كما لدينا : (D_m) هي مستقيمات تشمل نقطة ثابتة لما m يسمح $\mathbb{R}$ ،
ومنه نحن في حالة المناقشة الدورانية :

✓ لما : $m \leq 0$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطة وحيدة هي : $A(\ln 2; 3)$.

✓ لما : $0 < m < 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداها هي $A(\ln 2; 3)$.

✓ لما : $m = 4$ (C_1) يمس (D_m) في النقطة $A(\ln 2; 3)$.

✓ لما : $m > 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداها هي $A(\ln 2; 3)$.

(5) لدينا : $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و $f_1(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$.

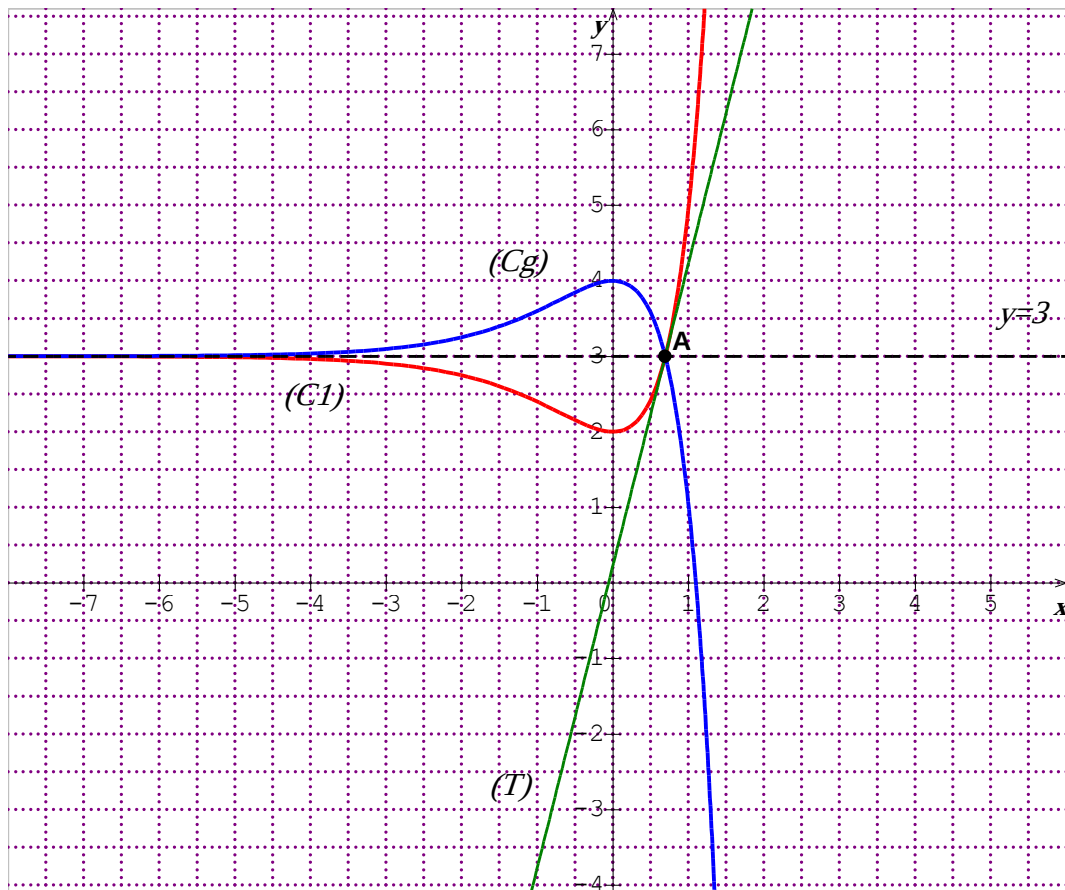
• كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$: $f_1(x) + g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3 + e^{2x} - 2e^x + 3 = 6$ ، وعليه : $g(x) = 6 - f_1(x)$.

لدينا: $g(x) + f_1(x) = 6$ ومنه (C') و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y = \frac{6}{2}$ أي $y = 3$.

ملاحظة: إذا كان لدينا $f(x) + g(x) = 2d$ نقول أن (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم:

$y = \frac{2d}{2}$ أي $y = d$ ، ليكن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة للمستقيم $y = d$ معناه أن:

$$f(x) + g(x) = 2d \text{ ومنه } f(x) + g(x) = f(x) + (2d - f(x))$$





استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)

الجزء الأول

1 حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_0) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب و بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_0) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $-\infty$.

2 -إثبات أن الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

نعلم أن الدالتان $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x^2$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي جدائهما أيضاً دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن f_0 دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حساب $f'_0(x)$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'_0(x) = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$

$$f'_0(x) = x(x+2)e^x \quad \text{إذن:}$$

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة f_0 :

إشارة $f'_0(x)$ هي إشارة $x(x+2)$ ، لأن $e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

الجدول التالي يوضح إشارة $f'_0(x)$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$x(x+2)$	+	0	-	+

✓ إذا كان $x \in]-2; 0[$ فإن $f'_0(x) < 0$ و بالتالي f_0 دالة متناقصة تماماً.

✓ إذا كان $x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ فإن $f'_0(x) \geq 0$ و بالتالي f_0 دالة متزايدة.

3 جدول تغيرات الدالة f_0 :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	0	-	+
$f_0(x)$	0	$f_0(2) = 4e^{-2}$	$f_0(0) = 0$	$+\infty$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

استنتاج مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f_0 تقبل 0 كقيمة حدية صغرى لها من أجل $x = 0$ ، إذن: $f_0(x) \geq 0$ و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$ هي: $S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

[4] إثبات أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$: $0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-x-2}$

لدينا من جدول تغيرات الدالة f_0 على المجال $]-\infty; 0[$: $0 < f_0(x) \leq 4e^{-2}$ منه: $0 < x^2 e^x \leq 4e^{-2}$

نقسم الطرفين على $4x^2$ الموجب نجد: $\frac{e^{-2}}{e^x} \leq \frac{x^2}{4} < 0$ إذن: $0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-2-x}$

[5] إثبات أن (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$: $f'_0(x) = (x^2 + 2x)e^x$

منه: $f''_0(x) = (x^2 + 2x)'e^x + (x^2 + 2x)(e^x)' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$ إشارة $f''_0(x)$ هي من إشارة $(x^2 + 4x + 2)$ ، لأن: $e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

ميز المعادلة $x^2 + 4x + 2 = 0$ هو: $\Delta = 8 > 0$ إذن للمعادلة حلان متمايزان هما: $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ و $x_2 = -2 + \sqrt{2}$ الجدول التالي يوضح إشارة $f''_0(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$x^2 + 4x + 2$	+	0	-	0	+
$f_0''(x)$	+	0	-	0	+

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''_0(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها عند x_1 و x_2 و بالتالي المنحنى (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف هما: $A(x_1; f_0(x_1))$ و $B(x_2; f_0(x_2))$

[6] كتابة معادلة المماس (Δ) عند الفاصلة 0 :

لدينا معادلة المماس من الشكل: $y = f'_0(0)(x - 0) + f_0(0)$ مع: $f'_0(0) = f_0(0) = 0$

إذن: $(\Delta): y = 0$

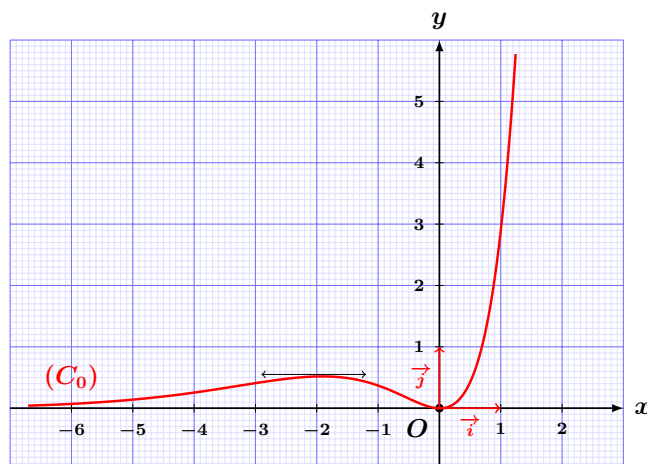
[7] أ-هل يمكن تعيين x_0 ؟

المماس (T) يوازي حامل محور الفواصل معناه: $f'_0(x_0) = 0$ و حسب ما سبق نجد: $x_0 = 0$ أو $x_0 = -2$

ب-هل يمكن تعيين x_0 ؟

يكون المماس (T) عمودي على المستقيم (Δ) معناه (T) يكون يوازي محور الترتيب، في هذه الحالة تكون الدالة f_0 غير قابلة للاشتقاق عند x_0 ، و حسب السؤال 2 لدينا f_0 دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي لا توجد قيمة لـ x_0 .

8 رسم كل من المماس (Δ) وَ المنحني (C_0) :



9 المناقشة البَيانية :

لدينا من أجل كل $x > 0$ و $m > 0$: $2 \ln |x| + x - \ln m = 0$: تكافئ: $\ln x^2 + x - \ln m = 0$: تكافئ: $\ln x^2 + x = \ln m$

$$f_0(x) = m : \text{تکافی} \quad x^2 e^x = m : \text{تکافی} \quad e^{\ln x^2} \times e^x = m : \text{تکافی} \quad e^{\ln x^2 + x} = m : \text{تکافی}$$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_0) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل .

✓ إذا كان $m \in]0; 4e^{-2}[$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، حل موجب و حلين سالبين .

✓ إذا كان $m = 4e^{-2}$ ، المعادلة تقبل حلان ، أحدهما موجب و الآخر مضاعف سالب .

✓ إذا كان $m \in]0; 4e^{-2}[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

$$f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) e^x \text{----- الجزء الثاني}$$

حساب کل من $f_0^{(3)}(x)$ ، $f_0^{(2)}(x)$ ، $f_0^{(1)}(x)$ 1

$$\boxed{f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)e^x} : \text{منه } f_0^{(1)}(x) = f'_0(x) : \text{لدينا}$$
$$\boxed{f_0^{(2)}(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x} : \text{منه } f_0^{(2)}(x) = f''_0(x) : \text{و}$$
$$\boxed{f_0^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x} : \text{منه } f_0^{(3)}(x) = [f''_0(x)]' = (x^2 + 4x + 2)'e^x + (x^2 + 4x + 2)(e^x)' : \text{منه}$$

$f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) \cdot e^x; n \geq 1$ لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل 2

✓ أولاً نقوم بتخمين عبارة $f_0^{(n)}(x)$ بدلالة n ، و حسب السؤال الأول نلاحظ أن :

$$f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + (2 \times 1)x + 0 \times 1)e^x$$

$$f_0^{(2)}(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + (2 \times 2)x + 1 \times 2)e^x$$

$$f_0^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + (2 \times 3)x + 2 \times 3)e^x$$

$b_n = (n-1)n$, $a_n = 2n$: حيث $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1))e^x$: إذن من أجل كل $n \geq 1$ لدينا:

✓ ثانيا نبرهن على صحة التخمين بالتراجع و لتكن الخاصية $p(n)$

نتحقق من صحة $p(1)$: لدينا من أجل $n = 1$ $f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)e^x = f_0'(x)$ ، منه $p(1)$ محققة.

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

-نفرض صحة $p(n)$ أي : $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1)n) e^x$
 -نبرهن على صحة $p(n+1)$ أي : $f_0^{(n+1)}(x) = (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1)) e^x$
 لدينا :

$$\begin{aligned} f_0^{(n+1)}(x) &= [f_0^{(n)}(x)]' \\ &= [(x^2 + 2nx + (n-1)n) e^x]' \\ &= (x^2 + 2nx + (n-1)n)' e^x + (x^2 + 2nx + (n-1)n) (e^x)' \\ &= (2x + 2n) e^x + (x^2 + 2nx + (n-1)n) e^x \\ &= (2x + 2n + x^2 + 2nx + (n-1)n) e^x \\ &= (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1)) e^x \end{aligned}$$

منه $p(n+1)$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \geq 1$ ، التخمين صحيح (الفرضية صحيحة) .

[3] لنتحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ ، $a_{n+1} = a_n + 2$ و $b_{n+1} = b_n + a_n$

لدينا : $a_n = 2n$ منه : $a_{n+1} = 2(n+1)$ و منه : $a_{n+1} = 2n + 2$ أي : $a_{n+1} = a_n + 2$.
 و لدينا : $b_n = (n-1)n$ منه : $b_{n+1} = n(n+1)$ و منه : $b_{n+1} = n^2 + n$ و منه : $b_{n+1} = n^2 - \underbrace{n + 2n}_n$
 و منه : $b_{n+1} = n(n-1) + 2n$ إذن : $b_{n+1} = b_n + a_n$.

[4] إثبات أن (a_n) متتالية حسابية :

لدينا : $a_{n+1} = a_n + 2$ إذن حسب التعريف يتبين أن (a_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

[5] لنبين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $b_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

لدينا : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ و منه : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (2 + 2n)$
 أي : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n(1+n)$ إذن : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_{n+1}$

الجزء الثالث $k(x) = |x| \sqrt{e^x}$

[1] كتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$k(x) = \begin{cases} x\sqrt{e^x} , & x \geq 0 \\ -x\sqrt{e^x} , & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{منه : } |x| = \begin{cases} x , & x \geq 0 \\ -x , & x \leq 0 \end{cases}$$

-دراسة استمرارية الدالة k عند 0 :

لدينا : $k(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0$ منه : $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = k(0) = 0$ ، إذن k مستمرة عند 0

[2] دراسة قابلية اشتقاق الدالة k على يمين و على يسار 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{e^x} = -1 \end{aligned}$$

النتيجة : بما أن النهاية من اليمين تختلف عن النهاية من اليسار فإن k غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

التفسير الهندسي : المنحنى (C_k) يقبل نصفين مماسين عند النقطة $O(0;0)$ و تسعى نقطة زاوية .

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

3 كتابة معادلتى المماسين لـ (C_k) عند الفاصلة 0 :

لدينا معادلة المماس على يمين 0 من الشكل : $y = k'_d(0)(x - 0) + k(0)$ حيث : $k(0) = 0$ و $k'_d(0) = 1$ منه معادلة المماس من يمين 0 هي : $y = x$.

لدينا معادلة المماس على يسار 0 من الشكل : $y = k'_g(0)(x - 0) + k(0)$ حيث : $k(0) = 0$ و $k'_g(0) = -1$ منه معادلة المماس من يسار 0 هي : $y = -x$.

4 لنبين أن الدالة k هي مركب دالتين عدديتين أحدهما الدالة f_0 :

لدينا : $k(x) = |x| \sqrt{e^x}$ منه $k(x) = \sqrt{x^2} \sqrt{e^x}$ و منه $k(x) = \sqrt{x^2 e^x}$ أي : $k(x) = \sqrt{f_0(x)}$ إذن الدالة k هي مركب دالتين ، الأولى هي الدال f_0 و الثانية هي الدالة $\sqrt{x}$ $x \mapsto \sqrt{x}$.

5 لنبين أنه من أجل كل من $\mathbb{R}$ أن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $k(x) = \sqrt{f_0(x)}$ منه $k'(x) = \frac{f'_0(x)}{2\sqrt{f_0(x)}}$ و منه : $k'(x) = \frac{f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}}{2f_0(x)}$ إذن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}$.

6 استنتاج اتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ هي من إشارة $f'_0(x)$ ، و حسب الجزء الأول في السؤال 2-ب نستنتج ما يلي :
✓ إذا كان $x \in]-2; 0[$ فإن $k'(x) < 0$ و بالتالي k دالة متناقصة تماماً .
✓ إذا كان $x \in [0; +\infty[\cup]-\infty; -2]$ فإن $k'(x) \geq 0$ و بالتالي k دالة متزايدة .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$		+	-	+
$k(x)$		$k(-2) = 2\sqrt{e^{-2}}$	$k(0) = 0$	$+\infty$

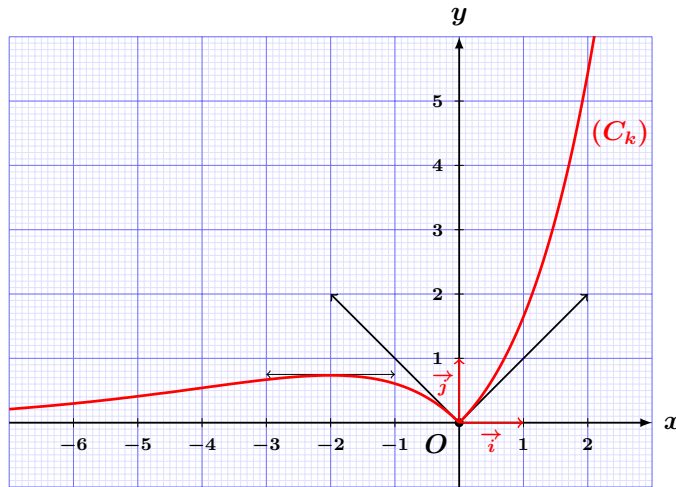
7 حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x}$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

التفسير الهندسي :

المنحنى (C_k) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب .

8 رسم المنحنى (C_k) :



9 المناقشة البيانية :

لدينا : $|x| \sqrt{e^x} + x - m = 0$ منه $|x| \sqrt{e^x} = -x + m$ أي $k(x) = -x + m$
 إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_k) مع المستقيمات الموازية لنصف المماس من يسار 0
 ✓ إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
 ✓ إذا كان $m = 0$ ، المعادلة تقبل حل وحيد معوم .
 ✓ إذا كان $m \in]0; +\infty[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

الجزء الرابع $f_\alpha(x) = (x - \alpha)^2 e^x$

1 حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\alpha(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \alpha)^2 e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2\alpha x e^x + \alpha^2 e^x) = 0$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

2 لنثبت أن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'_\alpha(x) = (2 + x - \alpha)(x - \alpha) e^x$

الدالة f_α معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'_\alpha(x) = [(x - \alpha)^2]' e^x + (x - \alpha)^2 (e^x)'$
 منه : $f'_\alpha(x) = 2(x - \alpha) e^x + (x - \alpha)^2 e^x$ ومنه : $f'_\alpha(x) = [2(x - \alpha) + (x - \alpha)^2] e^x$
 إذن : $f'_\alpha(x) = (x - \alpha)(2 + x - \alpha) e^x$

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f_α :

إشارة $f'_\alpha(x)$ هي من إشارة $(x - \alpha)(2 + x - \alpha)$ لأن $e^x > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.
 لدينا : $f'_\alpha(x) = 0$ تكافئ $(x - \alpha)(2 + x - \alpha) = 0$ أي $x = \alpha$ أو $x = \alpha - 2$

الجدول التالي يوضح إشارة $f'_\alpha(x)$:

x	$-\infty$	$\alpha - 2$	α	$+\infty$
$x - \alpha$		-	0	+
$x + 2 - \alpha$	-	0	+	+
$f'_\alpha(x)$	+	0	-	+

✓ إذا كان $\alpha \in]\alpha - 2; \alpha[$ فإن $f'_\alpha(x) < 0$ وبالتالي f_α دالة متناقصة تماماً.
 ✓ إذا كان $\alpha \in]-\infty; \alpha - 2] \cup [\alpha; +\infty[$ فإن $f'_\alpha(x) \geq 0$ وبالتالي f_α دالة متزايدة.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\alpha - 2$	α	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	+	0	-	+
$f_\alpha(x)$	0	$4e^{\alpha-2}$	0	$+\infty$

4 حساب كل من $f''_\alpha(x)$ و $f'''_\alpha(x)$:

لدينا: $f'_\alpha(x) = (x - \alpha)(2 + x - \alpha)e^x$

منه: $f''_\alpha(x) = [x^2 + (4 - 2\alpha)x + \alpha^2 - 4\alpha + 2]e^x$

و: $f'''_\alpha(x) = [x^2 + (6 - 2\alpha)x + \alpha^2 - 6\alpha + 6]e^x$

5 لنبين بالتراجع على العدد الطبيعي n الغير معدوم أن: $f_\alpha^{(n)}(x) = [(x + n - \alpha)^2 - n]e^x$

-نتحقق من صحة $p(1)$ لدينا من أجل $n = 1$.

$$f_\alpha^{(1)}(x) = [(x + 1 - \alpha)^2 - 1]e^x = (x + 1 - \alpha - 1)(x + 1 - \alpha + 1)e^x = (x - \alpha)(x + 2 - \alpha)e^x$$

أي $f_\alpha^{(1)}(x) = f'_\alpha(x)$ منه $p(1)$ محققة.

-نفرض صحة $p(n)$ أي: $f_\alpha^{(n)}(x) = [(x + n - \alpha)^2 - n]e^x$

-نبرهن على صحة $p(n+1)$ أي: $f_\alpha^{(n+1)}(x) = [(x + n + 1 - \alpha)^2 - (n+1)]e^x$ لدينا:

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(n+1)}(x) &= [f_\alpha^{(n)}(x)]' \\ &= [[(x + n - \alpha)^2 - n]e^x]' \\ &= [(x + n - \alpha)^2 - n]'e^x + [(x + n - \alpha)^2 - n](e^x)' \\ &= 2(x + n - \alpha)e^x + [(x + n - \alpha)^2 - n]e^x \\ &= [2(x + n - \alpha) + (x + n - \alpha)^2 - n]e^x \\ &= \left[\underbrace{(x + n - \alpha)^2 + 2(x + n - \alpha) + 1}_{(x + n - \alpha + 1)^2} - 1 - n \right]e^x \\ &= [(x + n - \alpha + 1)^2 - (n+1)]e^x \end{aligned}$$

تتبع

منه $p(n+1)$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f_\alpha^{(n)}(x) = [(x+n-\alpha)^2 - n] e^x$.

[6] لنبين أن كل المنحنيات (C_α) تقبل نقطتي انعطاف فاصلتهما x_1 و x_2 :

لدينا : $f''_\alpha(x) = 0$ منه : $x^2 + (4-2\alpha)x + \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$ أي : $(x+2-\alpha)^2 - 2 = 0$

منه : $(x+2-\alpha)^2 = 2$ ومنه : $x+2-\alpha = \sqrt{2}$ أو $x+2-\alpha = -\sqrt{2}$

أي : $x = \alpha + \sqrt{2} - 2$ أو $x = \alpha - \sqrt{2} - 2$

الجدول التالي يوضح إشارة $f''_\alpha(x)$:

x	$-\infty$	$\alpha - \sqrt{2}$	$\alpha + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$f''_\alpha(x)$	+	0	-	0	+

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''_\alpha(x)$ ينعدم و يغير من إشارته من أجل $x_1 = \alpha + \sqrt{2} - 2$ و $x_2 = \alpha - \sqrt{2} - 2$

و بالتالي المنحنى (C_α) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A_\alpha(x_1; f_\alpha(x_1))$ و $B_\alpha(x_2; f_\alpha(x_2))$.

[7] دراسة اتجاه تغير الدالة كيف نختار قيمة α حتى يكون $x_1 < 0 < x_2$ ؟

يكون $x_1 < 0 < x_2$ لما $x_1 \times x_2 < 0$ منه : $(\alpha + \sqrt{2} - 2)(\alpha - \sqrt{2} - 2) < 0$ ومنه : $(\alpha - 2)^2 - (\sqrt{2})^2 < 0$

ومنه : $(\alpha - 2)^2 < (\sqrt{2})^2$ أي : $|\alpha - 2| < \sqrt{2}$ و بالتالي : $-\sqrt{2} + 2 < \alpha < \sqrt{2} + 2$.

[8] التعرف على القيم المختلفة للوسيط α :

لدينا من جدول تغيرات الدالة f_α أن المنحنيات (C_α) تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \alpha$

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = -1$ يمثل (C_{-1}) أي $\alpha = -1$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 0$ يمثل (C_0) أي $\alpha = 0$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 1$ يمثل (C_1) أي $\alpha = 1$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 2$ يمثل (C_2) أي $\alpha = 2$.

