



من كتابة الأستاذ

NAAM

سلسلة الأنسب للمراجعة في البكالوريا

الموافقات و القسم في $\mathbb{Z}$

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الشعب : رياضيات ، تقني رياضي

3

AS

$$a \equiv b[n]$$
$$9 \equiv -1[10]$$

$$d = \text{PGCD}(a, b)$$

بكالوريا علوم طبيعة و حياة 2001 — الحل من هنا

التمرين 04

n عدد طبيعي .

1/ أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $7^{1422} - 9^{2001} \times 63$ على 10 .

2/ أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$[10] 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}$$

ب) عتّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون

$$[10] 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0$$

Métropole juin 2011 — الحل من هنا

التمرين 05

الجزء الأول :

تذكير :

مبرهنة بيزو :

a و b عدداً صحيحان أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدداً صحيحان u و v بحيث : $au + bv = 1$.

مبرهنة غوص :

a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة ، إذا كان a يقسم bc و a أولي مع b فإن a يقسم c .

1/ باستعمال مبرهنة بيزو ، أثبت مبرهنة غوص .

2/ p و q عدداً صحيحان أوليان فيما بينهما .

- باستعمال مبرهنة غوص بّين أنه إذا كان $a \equiv 0[p]$ و $a \equiv 0[q]$ حيث a عدد صحيح نسبي فإن : $a \equiv 0[pq]$.

الجزء الثاني :

S مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية n التي تحقق الجملة التالية :

$$\begin{cases} n \equiv 9[17] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$$

1/ (u, v) ثنائية من الأعداد الصحيحة النسبية حيث :

تمرين من إختبارات فصلية — الحل من هنا

التمرين 01

a ؛ b ؛ n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a = 2n + 3$ و $b = 5n - 2$.

1/ بّين أنه إذا كان a و b غير أوليين فيما بينهما فإن : $PGCD(a; b) = 19$.

2/ عتّن قيم n التي من أجلها يكون : $PGCD(a; b) = 19$.

بكالوريا تقني رياضي 2008 — الحل من هنا

التمرين 02

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1/ a و b عدداً طبيعيين حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$.

أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب) بّين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعف للعدد 7 .

ج) عتّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$.

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$.

أ) بّين أن العددين p و q يقبلان القسمة على $n - 5$.

ب) عتّن تبعا لقيم n وبدلالة n : $PGCD(p; q)$.

Nouvelle calédonie 2002 — الحل من هنا

التمرين 03

x و y عدداً طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما ، نضع : $S = x + y$ و $P = xy$.

1/ أ) برهن أن x و S أوليان فيما بينهما وكذلك y و S .

ب) استنتج أن S و P أوليان فيما بينهما .

ج) برهن أن العددين S و P من شفتيتين مختلفتين (أحدهما فردي و الآخر زوجي) .

2/ عتّن القواسم الموجبة للعدد 84 .

3/ عتّن الأعداد الأولية فيما بينها x و y حيث : $SP = 84$.

4/ عتّن عددين طبيعيين a و b يحققان الشرطين التاليين :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ ؛ مع } d = PGCD(a, b)$$

التمرين 08 — Métropole sept 2009 — الحل من هنا

- 1 / أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 .
 ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{10} على 11 .
 ج) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2009} + 2009$ على 11 .
 2 / p عدد طبيعي و n عدد طبيعي غير معدوم نضع $A_n = 2^n + p$
 $d_n = \text{PGCD}(A_n, A_{n+1})$ ،
 أ) بيّن أن : d_n يقسم 2^n .
 ب) أثبت أن شفعية A_n من شفعية p .
 3 / أ) بيّن أن شفعية d_n من شفعية p .
 ب) استنتج $\text{PGCD}(2^{2009} + 2009, 2^{2010} + 2009)$.

التمرين 09 — Amérique du Nord juin 2009 — الحل من هنا

- 1 / لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية التي تنتمي إلى المجال $[1; 46]$.
 1 / نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $23x + 47y = 1 \dots\dots (E)$.
 أ) عيّن حلا خاصا (x_0, y_0) لـ (E) .
 ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) .
 ج) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد x من A حيث $23x \equiv 1[47]$.
 2 / a و b عددان صحيحان .
 أ) أثبت أنه إذا كان $ab \equiv 0[47]$ فإن : $a \equiv 0[47]$ أو $b \equiv 0[47]$.
 ب) استنتج أنه إذا كان $a^2 \equiv 1[47]$ فإن : $a \equiv 1[47]$ أو $a \equiv -1[47]$.
 3 / أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي p من A يوجد عدد صحيح q بحيث : $p \times q \equiv 1[47]$.
 ب) قبل أنه من أجل كل p من A يوجد عدد طبيعي وحيد من A نرمز له بالرمز $\text{inv}(p)$ بحيث : $p \times \text{inv}(p) \equiv 1[47]$.
 مثال : $\text{inv}(3) = 16$ لأن : $3 \times 16 \equiv 1[47]$.
 - عيّن الأعداد الطبيعية p من A التي تحقق $p = \text{inv}(p)$.
 ج) أثبت أن : $46! \equiv -1[47]$.

$$17u + 5v = 1$$

- أ) برر وجود الثنائية $(u; v)$.
 ب) نضع : $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
 - أثبت أن : n_0 عنصر من S .
 ج) أعط مثالا عن عدد n_0 ينتمي إلى S .
 2 / أ) n عدد صحيح نسبي من S .
 - بيّن أن : $n - n_0 \equiv 0[85]$.
 ب) بيّن أن العدد الصحيح n من S إذا وفقط إذا كان n يكتب على الشكل $n = 43 + 85k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين 06 — Amérique du Sud nov 2010 — الحل من هنا

- n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 ، نضع : $A(n) = n^4 + 1$.
 1 / أدرس شفعية $A(n)$ حسب شفعية n .
 2 / أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي n أكبر أو تساوي 2 فإن $A(n)$ غير مضاعف لـ 3 .
 3 / أثبت أنه من أجل كل قاسم d لـ $A(n)$ فإن d أولي مع n و $n^8 \equiv 1[d]$.
 4 / d قاسم لـ $A(n)$ ، أصغر الأعداد الطبيعية غير المعدومة k التي تحقق : $n^k \equiv 1[d]$.
 أ) باستخدام القسمة الإقليدية لـ k على s ، بيّن أن : s يقسم k .
 ب) استنتج أن s قاسم لـ 8 .

التمرين 07 — Pondichéry avril 2010 — الحل من هنا

- a و b عددان طبيعيان يحققان مايلي : $a^2 = b^3$ ، نضع
 $d = \text{PGCD}(a, b)$ ، عددان صحيحان أوليان فيما بينهما حيث
 $a = du$ و $b = dv$:
 1 / أثبت أن : $u^2 = dv^3$.
 2 / استنتج أن : v يقسم u ، ثم بيّن أن : $v = 1$.
 3 / a و b عددان طبيعيان ، أثبت أن : $a^2 = b^3$ إذا وفقط إذا كان كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .
 4 / أثبت أنه إذا كان n مربع عدد طبيعي و مكعب عدد طبيعي فإن :
 $n \equiv 0[7]$ أو $n \equiv 1[7]$.

التمرين 10

تمرين من امتحانات فصلية — الحل من هنا

n عدد طبيعي .

- 1/ أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
- 2/ عتّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7 .
- 3/ عتّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7 .

حل التمرين 1

العودة إلى نص التمرين

1/ $a = 2n + 3$ و $b = 5n - 2$ ، نضع $d = \text{PGCD}(a, b)$ ، و
منه d/a و d/b ، إذن $d/5a - 2b$ و منه : $d/5a - 2b$ أي :
 $d/19$ و منه $d \in \{1, 19\}$ و بما أن a و b غير أوليين فيما بينهما فإن :
 $d = 19$.

2/ $d = 19$ ، إذن $a/19$ و $b/19$ و منه $19/2a$ أي $19/4n + 6$ و
 $19/5n - 2$ و منه $19/5n - 2 - 4n - 6$ أي : $19/n - 8$ و منه
 $n - 8 = 19k$ مع $k \in \mathbb{N}$ أي قيم n التي من أجلها $d = 19$ هي
 $n = 19k + 8$ ، $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 2

العودة إلى نص التمرين

$a = n - 2$ و $b = 2n + 3$.

أ) نضع : $d = \text{PGCD}(a, b)$ ، لدينا d/a و d/b و منه $d/2a$ أي
 $d/2n - 4$ و منه $d/2n + 3 - 2n + 4$ أي $d/7$ و منه قيم d هي
 $1, 7$.

ب) نفرض أن a, b من مضاعفات 7 و ثبت أن $n + 5$ مضاعفات 7 .
 a, b من مضاعفات 7 إذن يوجد عدنان طبيعيان غير معدومين k, k'
حيث $a = 7k$ و $b = 7k'$ مع $b > a$ و منه $b - a = 7(k' - k)$ أي
 $b - a = 7\ell$ و من جهة أخرى $b - a = n + 5$ و منه $n + 5 = 7\ell$
و منه $n + 5$ مضاعف لـ 7 .

نفرض أن $n + 5$ مضاعفات 7 و ثبت أن a, b من مضاعفات 7 .
 $n + 5 = 7k$ و منه $n = 7k - 5$ و منه $a = 7k - 5 - 2$ و $b = 14k - 7$
و منه $a = 7(k - 1)$ و $b = 7(2k - 1)$ أي a و b من مضاعفات 7 .
ج) $\text{PGCD}(a, b) = 7$ و منه $n + 5$ من مضاعفات 7 حسب ب) و

منه $n + 5 = 7k$ أي $n = 7k - 5$ أي $n = 7m + 2$ ، $m \in \mathbb{N}$.
أ) $p = (n - 5)b$ و $q = (n - 5)a$ (يمكن التأكد من ذلك باستخدام
القسمة الإقليدية) و منه $n - 5$ يقسم كلا من p و q .
ب) $\text{PGCD}(p, q) = (n - 5)\text{PGCD}(a, b)$ و منه :
من أجل $n = 7m + 2$ فإن $\text{PGCD}(p, q) = 7(n - 5)$.
من أجل $n \neq 7m + 2$ فإن $\text{PGCD}(p, q) = (n - 5)$.

حل التمرين 3

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) x و y أوليان فيما بينهما .
نفرض بالخلف أن : x و S غير أوليين فيما بينهما ، إذن فهما يقبلان
على الأقل قاسما مشتركا d يختلف عن 1 و منه $d/S - x$ أي d/y
و منه d قاسم مشترك لـ x و y يختلف عن 1 و هذا تناقض لأن x و
 y أوليان فيما بينهما و منه x و S أوليان فيما بينهما ، نفس الطريقة
تستخدم لإثبات أن y و S أوليان فيما بينهما .

ب) x و S أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة بيزو يوجد عدنان
صحيحان u و v حيث $ux + vS = 1$ و أيضا يوجد عدنان صحيحان
 u' و v' حيث $u'y + v'S = 1$ لأن y و S أوليان فيما بينهما .

$$(ux + vS)(u'y + v'S) = 1 \text{ و منه } (ux + vS)(u'y + v'S) = 1$$

$$\text{و منه } uu'xy + uv'xS + u'vyS + vv'S^2 = 1$$

و منه $uu'P + (uv'x + u'vy + vv'S)S = 1$ و منه حسب مبرهنة
بيزو فإن P و S أوليان فيما بينهما حيث $S = x + y$ و $P = xy$.

ج) إذا كان كل من x و y زوجي و هذا غير ممكن لأن x و y أوليان
فيما بينهما .

إذا كان كل من x و y فردي فإن S زوجي و P فردي .

إذا كان x و y من شفتيتين مختلفتين فإن S فردي و P زوجي .
و منه في كل الحالات S و P من شفتيتين مختلفتين .

2/ $84 = 7 \times 12 = 7 \times 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 7$ و منه القواسم الموجبة
لـ 84 هي : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 .

3/ نفرض أن : $S = 2$ و منه $P = 42$ غير ممكن (لأن S و P من
شفتيتين مختلفتين) ، نفس الشيء بالنسبة $S = 6, 14, 42$.

نفرض أن $S = 3$ أي $x = 1, y = 2$ أو العكس فإن $P = 2$ و هذا

1/ a و b أوليان فيما بينهما ، حسب بيزو فإنه يوجد عدنان صحيحان u و v حيث $au + bv = 1$ و منه $acu + bcv = c$ بما أن a/bc فإن a/bvc و $a/acu + bvc$ أي a/c .

$a \equiv 0[p]$ و منه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث $a = pk$ و $b \equiv 0[q]$ و منه يوجد $k' \in \mathbb{N}$ حيث $a = qk'$ و منه $pk = qk'$ لكن p و q أوليان فيما بينهما و p/qk' و منه يوجد $k'' \in \mathbb{N}$ حيث $k' = pk''$ و منه $a = pqk''$ و منه $a \equiv 0[pq]$.

الجزء الثاني :

1/ أ) $17u + 5v = 1$ ن u و v موجودان حسب بيزو لأن 17 و 5 أوليان فيما بينهما .

ب) $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ (ب) $5v = 1 - 17u$ أي $5v \equiv 1[17]$ و منه $9 \times 5v \equiv 9[17]$ و لدينا $17u \equiv 1 - 5v$ و منه $3 \times 17u \equiv 3[17]$ و منه $n_0 \equiv 9[17]$ ، لدينا $17u \equiv 1 - 5v$ و منه $3 \times 17u \equiv 3[17]$ و منه $9 \times 5v \equiv 0[5]$ و لدينا $3 \times 17u \equiv 3[5]$ و منه $n_0 \equiv 3[5]$ ، إذن n_0 عنصر من S .

ج) بتطبيق خوارزمية إقليدس نجد $17 = 3 \times 5 + 2$ و $5 = 2 \times 2 + 1$ و منه $1 = 5 - (17 - 5 \times 3) \times 2$ أي $1 = 17 \times (-2) + 5 \times 7$ و منه $n_0 = 213$.
2/ أ) $n \equiv 9[17]$ و $n_0 \equiv 9[17]$ و منه $n - n_0 \equiv 0[17]$ ، بنفس الطريقة نجد $n - n_0 \equiv 0[5]$ ، بما أن 5 و 17 أوليان فيما بينهما فإن $n - n_0 \equiv 0[17 \times 5]$ (حسب نتيجة سؤال سابق) و منه $n - n_0 \equiv 0[85]$.

ب) لدينا $n - 213 \equiv 0[85]$ أي $n = 213[85]$ لكن $n \equiv 213[85]$ و منه $n = 85k + 43$ ، $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 6 العودة إلى نص التمرين

1/ إذا كان n زوجي فإن $A(n)$ فردي ، وإذا كان n فردي فإن $A(n)$ زوجي .

2/ n عدد طبيعي أكبر أو تساوي 2 .

إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن $n^4 + 1 \equiv 1[3]$.

إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن $n^4 + 1 \equiv 2[3]$.

غير ممكن لأن $P = 28$ ، نفس الكلام بالنسبة إلى $S = 4, 6$.
نفرض أن $S = 42$ فإن $x = 28, y = 14$ أو العكس و منه P أكبر من 2 و هذا غير ممكن لأن $P = 2$.

نفرض أن $S = 21$ فإن $x = 7, y = 14$ أو العكس و منه $P = 98$ غير ممكن .

نفرض أن $S = 7$ فإن $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ و منه $P = 12$ و منه $SP = 84$ و منه الأعداد الأولية فيما بينها x, y حيث $SP = 84$ هي $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$.

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ مع } d = \text{PGCD}(a, b) .$$

يوجد عدنان طبيعيان x و y أوليان فيما بينهما حيث $a = xd$ و $y = yd$ ، بما أن $ab = d^3$ فإن $xy = d$ و لدينا $a + b = 84$ و منه $(x + y)(xy) = 84$ ، اعتمادا على نتيجة السؤال السابق نجد $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ و منه $d = 12$ ، إذن $a = 36, b = 48$ أو $a = 48, b = 36$.

حل التمرين 4 العودة إلى نص التمرين

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	[10]

ب) $63 \equiv 3[10]$ و $9 \equiv -1[10]$ و منه $63 \times 9^{2001} \equiv -3[10]$.
 $7 \equiv -3[10]$ و منه $7^{1422} \equiv 3^{1422}[10]$ ، حسب الجدول السابق فإن $7^{1422} \equiv 9[10]$ و منه

$63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12[10]$ أي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$ و منه باقي قسمة العدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8 .

2/ أ) $3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10]$ و $7 \equiv -3[10]$ و منه $7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$ لأن $2n + 1$ فردي و منه $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n - 1) \times 3^{2n+1}[10]$.

ب) $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ و منه $(n - 1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$ و منه $n - 1 \equiv 0[10]$ أي $n = 10k + 1$ ، $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 5 العودة إلى نص التمرين

الجزء الاول :

$d \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$d^6 \equiv$	0	1	64	729	4096	15625	46656
$n \equiv \dots [7]$	0	1	1	1	1	1	1

ومنه $n \equiv 0[7]$ أو $n \equiv 1[7]$

حل التمرين 8 العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $2009 = 11 \times 182 + 7$ ومنه الباقي يساوي 7.
ب) $2^5 = 32$ ومنه $2^5 \equiv 10[11]$ أي $2^5 \equiv -1[11]$ ومنه $2^{10} \equiv 1[11]$ ومنه الباقي يساوي 1.
ج) $2^{100} \equiv 1[11]$ ولدينا $2^{100} = (2^{10})^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1[11]$ ولدينا $2^{2009} = 2^{10 \times 200 + 9} = (2^{10})^{20} \times 2^9 \equiv 1^{20} \times 2^9 \equiv 2^9 \equiv -1[11]$ ومنه $2^{2009} \equiv -1[11]$ ولدينا $2^9 = 2^5 \times 2^4 \equiv -1 \times 5 \equiv -5[11]$ ومنه $2^{2009} + 2009 \equiv -5 + 7[11] \equiv 2[11]$ أي الباقي هو 2.

2/ أ) كل قاسم لـ A_n و A_{n+1} يقسم الفرق بينهما لكن $A_{n+1} - A_n = 2^n$ ومنه d_n يقسم 2^n .
ب) $A_n = 2^n + p$ ، عدد طبيعي زوجي ومنه شفعية A_n من شفعية p .
3/ أ) من نتيجة السؤال السابق A_n و A_{n+1} لهما نفس شفعية p ومنه :

– إذا كان p فردي فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه قاسمهما المشترك الأكبر أيضا نفس النتيجة إذا كان p زوجي ومنه d_n له نفس شفعية p .
ب) A_{2009} و A_{2010} فرديان لأن 2009 فردي ومنه d_n أيضا فردي وجدنا أن d_n يقسم 2^n ، كل قواسم 2^n زوجية إلا العدد 1 نستنتج أن $d_n = 1$ ومنه العددان $2^{2009} + 2009$ و $2^{2010} + 2009$ أوليان فيما بينهما .

حل التمرين 9 العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ حل خاص لـ (E) لأن $-2 \times 23 + 47 \times 1 = 1$.
ب) (x, y) حل لـ (E) ، لدينا $\begin{cases} 23x + 47y = 1 \\ -2 \times 23 + 47 \times 1 = 1 \end{cases}$ ومنه

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن $n^4 + 1 \equiv 2[3]$.
ومنه n ليس مضاعف لـ 3.

3/ d قاسم لـ $A(n)$ ومنه يوجد عدد طبيعي k حيث $n^4 + 1 = kd$ ومنه $kd - n^3 \times n = 1$ ومنه حسب بيزو فإن d و n أوليان فيما بينهما ومنه كل قاسم لـ $A(n)$ أولي مع n .
 d قاسم لـ $A(n)$ ومنه $n^4 + 1 \equiv 0[d]$ ومنه $n^4 \equiv -1[d]$ ومنه $n^8 \equiv 1[d]$.

4/ أ) $n^k \equiv 1[d]$ حسب القسمة الإقليدية لـ k على s توجد ثنائية وحيدة (q, r) حيث $k = sq + r$ مع $0 \leq r < s$ ومنه $n^k = (n^s)^q \times n^r$ لكن $n^s \equiv 1[d]$ و $n^r \equiv 1[d]$ لكن $n^k \equiv 1[d]$ ومنه $n^r \equiv 1[d]$ لكن $r < s$ أصغر عدد طبيعي يحقق $n^r \equiv 1[d]$ ومنه $r = 0$ ومنه s يقسم k .
ب) وجدنا سابقا أن $n^8 \equiv 1[d]$ ومنه s يقسم 8 لأن s يقسم k .

حل التمرين 7 العودة إلى نص التمرين

1/ لدينا $a^2 = b^3$ و $a = du, b = dv$ حيث $d = \text{PGCD}(a, b)$ ومنه $(du)^2 = (dv)^3$ ومنه $d^2 u^2 = d^3 v^3$ ومنه $u^2 = dv^3$.
2/ وجدنا $u^2 = dv^3$ ومنه u و v أوليان فيما بينهما ومنه v يقسم u ، $\text{PGCD}(u, v) = 1$ لكن v يقسم u أي $v = 1$ ومنه $u^2 = dv^3$.

3/ نفرض أن $a^2 = b^3$ ، و $a = du$ ، $b = dv$ ، وجدنا $v = 1$ ومنه $u^2 = d$ و $b = d$ ومنه $b = u^2$ و $a = du = u^3$ ومنه كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي.
نفرض أن كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي أي $m^3 = a$ و $b = m^2$ ومنه $a^2 = m^6$ و $b^3 = m^6$ ومنه $a^2 = b^3$ ، نستنتج أن $a^2 = b^3$ معناه كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي.

4/ $n = a^2 = b^3$ ، من نتيجة السؤال السابق يوجد عدد طبيعي d حيث $a = d^3$ و $b = d^2$ ومنه $n = d^6$.

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الـمـلف مـوجـود فـي : [f](#) elite of latex and python

أو $a \equiv 1[47]$ و منه $a + 1 \equiv 0[47]$ أو $a - 1 \equiv 0[47]$

$$a \equiv -1[47]$$

3/ أ) من أجل كل p من A يكون أولي مع 47 لأن 47 أولي و منه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان q و m حيث $pq + 47m = 1$

$$pq \equiv 1[47] \text{ و منه } pq \equiv 1[47]$$

ب) $p = \text{inv}(p)$ و منه $p^2 \equiv 1[47]$ و منه $p \equiv 1[47]$ أو $p \equiv -1[47]$

$$p \equiv 1[47] \text{ أو } p \equiv -1[47]$$

ج) من أجل كل p من A حيث $2 \leq p \leq 45$ يوجد $\text{inv}(p)$ حيث

$$p \times \text{inv}(p) \equiv 1[47] \text{ حسب نتيجة سؤال سابق لكن}$$

$$45! \equiv 1[45] \text{ و منه } 45! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 45$$

لدينا $46! = 46 \times 45!$ و منه $46! \equiv 46[47]$ أي $46! \equiv -1[45]$



العودة إلى نص التمرين

حل التمرين 10

سهل يترك للقارئ

$23(x+2) = 47(1-y)$ ، بتطبيق غوص نجد 23 يقسم $47(1-y)$ و

23 و 47 أوليان فيما بينهما و منه 23 يقسم $1-y$ و منه $1-y = 23k$

أي $y = 1 - 23k$ ، بالتعويض نجد $x = 47k - 2$ و منه حلول (E) هي

$$\{(47k - 2, 1 - 23k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ج) $23x \equiv 1[47]$ و منه يوجد عدد صحيح y حيث $32x = 1 - 47y$

أي $23x + 47y = 1$ ، حسب نتيجة السؤال السابق فإن $x = 47k - 2$

و $y = 1 - 23k$ لكن $1 \leq x \leq 47$ و منه $1 \leq 47k - 2 \leq 47$

منه $3 \leq 47k \leq 47$ و منه $k = 1$ أي $x = 45$ و منه العدد الطبيعي

الوحيد x من A الذي يحقق $23x \equiv 1[47]$ هو 45 .

2/ أ) $ab \equiv 0[47]$ و منه 47 يقسم ab ، لكن 47 أولي و منه فهو

يقسم إما a أو يقسم b و منه $a \equiv 0[47]$ أو $b \equiv 0[47]$.

ب) $a^2 \equiv 1[47]$ و منه $a^2 - 1 \equiv 0[47]$ و منه

$(a - 1)(a + 1) \equiv 0[47]$ حسب نتيجة السؤال السابق فإن

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

من كتابة الأستاذ : NA4M