

تقويم تشخيصي
للسنوات النهائية "الشعب العلمية"

التمرين

نعتبر نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) (أ) اثبت أن المستقيم $y = -x$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) ارسم المنحنى (C_f) .

(5) ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x الآتية:

$$x^2 + (m - 1)x - m + 1 = 0$$

(6) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي θ الآتية: $\sin^2 \theta + (m - 1)\sin \theta - m + 1 = 0$ حيث

$$\theta \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

(7) لتكن g دالة معرفة على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ بـ $g(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin x - 1}{-1 + \sin x}$

اثبت أن الدالة g متزايدة تماماً على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

حل التمرين

(1) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x) = \frac{2x - x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x(2 - x)}{(x - 1)^2}$

بما أن $(x - 1)^2 > 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x - x^2$ ، وهي موضحة في الجدول الآتي:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

ومنه الدالة f متزايدة من أجل $x \in [0, 1[\cup]1, 2]$ ، ومتناقصة من أجل $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ ، و جدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		-3		$-\infty$

(3) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ وعليه المستقيم

$(\Delta): y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

(ب) لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ، ندرس إشارة $f(x) + x = \frac{-1}{x+1}$ ، وهي موضحة في الجدول:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{-1}{x+1}$	+		-

إذن: (C_f) فوق المستقيم (Δ) من أجل $x < 1$ ، و (C_f) تحت المستقيم (Δ) من أجل $x > 1$.

(4) التمثيل البياني للدالة f موضح في الرسم

(5) لدينا $-x^2 + x - 1 = (x-1)m$ تكافئ $x^2 + (m-1)x - m + 1 = 0$

ومنه، من أجل $x \neq 1$ ، نجد أن $f(x) = m$ ، وعليه حلول المعادلة هي فواصل نقاط

تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = m$ ، أي:

• إذا كان $m \in]-\infty, -3[$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين موجبين.

• إذا كان $m = -3$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا.

• إذا كان $m \in]-3, 1[$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

• إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.

• إذا كان $m \in]1, +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين سالبين.

(6) بوضع $x = \sin \theta$ نحصل على (من الجواب السابق):

• إذا كان $m \in]-\infty, -3[$ فإن $x > 1$ ، وعليه المعادلة لا تقبل حلول.

• إذا كان $m \in]-3, 1[$ فإن x غير موجود، وعليه المعادلة لا تقبل حلول.

• إذا كان $m \in]1, \frac{3}{2}[$ فإنه يوجد عدنان حقيقيان $0 < x_1 < 1$ و $-1 < x_2 < 0$ ، وعليه المعادلة تقبل أربع حلول $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ حيث $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = x_1$ و $\sin \theta_3 = \sin \theta_4 = x_2$.

• إذا كان $m > \frac{3}{2}$ فإنه يوجد عدد حقيقي $x_3 < 1$ ، وعليه المعادلة تقبل حلين θ_5 و θ_6 حيث $\sin \theta_5 = \sin \theta_6 = x_3$.

(7) بما أن الدالة $\sin x$ متزايدة تماما على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ والدالة f متزايدة على صورة المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ أي متزايدة

تماما على المجال $]0, 1[$ فإن الدالة g (تركيب الدالة $\sin$ متبوعة بالدالة f) متزايدة تماما على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.