

مجلة الرائد في الرياضيات

الحلول

الجزء الثاني

العلوم التجريبية

الجزء الثالث

تقني رياضي

الجزء الرابع

رياضيات

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook

الجزء الثاني: بكاوريات جزائية

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 16: دورة 2019 الموضوع (1)

1-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 1$

المتتالية (u_n) معرفة بجدها الأول $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 > 1$ محققة لأن $u_0 = 13$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 1$ ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} > 1$

لدينا: $u_n > 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > 1$ وأخيرا $u_{n+1} > 1$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انهما متقاربة

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}(u_n - 1)$

بأن $u_n > 1$ من البرهان السابق فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل ومنه المتتالية متقاربة (مبرهنة)

2) اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول

(v_n) حسابية أساسها q معناه $v_{n+1} - v_n = q$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1} - 1) - \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{5}(u_n - 1) + \frac{4}{5} - 1}{u_n - 1}\right) = \ln\frac{1}{5}$

ومنه: (v_n) حسابية أساسها $\ln\frac{1}{5}$ وحدها الاول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(12)$

3) كتابة v_n بدلالة n وإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = v_0 + n.r$

وعليه $v_n = \ln(12) + n \ln\frac{1}{5} = \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n + \ln(12) = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 1)$

$$u_n = e^{v_n} + 1 = e^{\ln(\frac{12}{5^n})} + 1 = 1 + \frac{12}{5^n} \text{ أي } (u_n - 1) = \frac{12}{5^n} \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{5^n} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{5^n} = 1$$

$$(4) \text{ تبين انه من أجل كل عدد طبيعي } n: (u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n+1}{2}}}\right)^{n+1}$$

$$\text{نضع: } P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$$

$$\text{لدينا من الجواب السابق: } u_n - 1 = \frac{12}{5^n}$$

$$P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \frac{12}{5^0} \cdot \frac{12}{5^1} \cdot \dots \cdot \frac{12}{5^n} = \frac{12 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 12}{5^{0+1+2+\dots+n}} = \frac{12^{n+1}}{5^{\frac{(n+1)n}{2}}} = \left(\frac{12}{5^{\frac{n+1}{2}}}\right)^{n+1} \text{ ومنه}$$

التمرين 17: دورة 2019 الموضوع (2)

1-أ) اثبات أن f متزايدة تماماً على المجال $[4; 7]$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $[4; 7]$ ب: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ إشارة $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[4; 7]$.

ب) استنتاج أنه من أجل كل $x \in [4; 7]$ فإن: $f(x) \in [4; 7]$

من أجل كل $x \in [4; 7]$ فإن: $f(x) \in [f(4); f(7)]$ لأن f متزايدة على المجال $[4; 7]$.

ومنه: $f(x) \in \left[-4; -\frac{13}{12}\right]$ لأن $f(4) = \sqrt{6} + 4$ و $f(7) = 7$

وعليه $f(x) \in [\sqrt{6} + 4; 7]$ لأن $f(x) \in [4; 7]$ محتوى في المجال $[\sqrt{6} + 4; 7]$

2) البرهان انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$: $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$:

$$f(x) - x = \sqrt{x+2} - x + 4 = \frac{(\sqrt{x+2} - (x-4))(\sqrt{x+2} + (x-4))}{(\sqrt{x+2} + (x-4))}$$

$$= \frac{x+2 - (x-4)^2}{(\sqrt{x+2} + (x-4))} = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$$

استنتاج أنه من أجل كل $x \in [4; 7]$ فإن: $f(x) - x > 0$

لدينا من أجل كل $x \in [4; 7]$ فإن: $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$

وعليه إشارة افرق $f(x) - x$ هي حسب إشارة $-x^2 + 9x - 14$ لأن المقام موجب

$$-x^2 + 9x - 14 = 0 \text{ معناه } x = 2 \text{ أو } x = 7$$

ومنه $-x^2 + 9x - 14 > 0$ من أجل $x \in [2; 7[$ وعليه $f(x) - x > 0$ من أجل كل $x \in [4; 7[$

3-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 4 \leq u_n < 7$

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $4 \leq u_0 < 7$ محققة لأن $u_0 = 4$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $4 \leq u_n < 7$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $4 \leq u_{n+1} < 7$

لدينا: $4 \leq u_n < 7$ ومنه $f(4) \leq f(u_n) < f(7)$ لأن f متزايدة

وعليه $4 \leq u_{n+1} < 7$ حسب الجواب 1-ب)

ومنه الخاصية $4 \leq u_n < 7$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم تبين أنها متقاربة

لدينا: $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n - 14}{u_n - 4 + \sqrt{u_n + 2}} > 0$ حسب الاستنتاج من الجواب 2

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً لأن $u_{n+1} - u_n > 0$

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى بالعدد 7 ومتزايدة.

4-أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

$$7 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{u_n + 2} = \frac{(3 - \sqrt{u_n + 2})(3 + \sqrt{u_n + 2})}{3 + \sqrt{u_n + 2}} = \frac{(3)^2 - u_n - 2}{3 + \sqrt{u_n + 2}} = \frac{(7 - u_n)}{3 + \sqrt{u_n + 2}}$$

$$\frac{(7 - u_n)}{3 + \sqrt{u_n + 2}} \leq \frac{(7 - u_n)}{4} \text{ تكافئ } 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$$

لدينا: $3 + \sqrt{u_n + 2} \geq 4$ ومنه: $\frac{1}{3 + \sqrt{u_n + 2}} \leq \frac{1}{4}$ ومنه $\frac{(7 - u_n)}{3 + \sqrt{u_n + 2}} \leq \frac{(7 - u_n)}{4}$ لأن $u_n < 7$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

باستعمال المتباينة $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

من أجل $n=0$: $7 - u_1 \leq \frac{1}{4}(7 - u_0)$ ، ومن أجل $n=1$: $7 - u_2 \leq \frac{1}{4}(7 - u_1)$

..... ومن أجل $n-1$: $7 - u_n \leq \frac{1}{4}(7 - u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $7 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - u_0)$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n : $7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (1).....

ومنه جهة أخرى لدينا: $u_n < 7$ ومعناه $7 - u_n > 0$ (2).....

من التوطنتين (1) و (2) نستنتج أن: $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (7 - u_n) = 0$ نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$

التمرين 18: دورة 2018 الموضوع (1)

1- أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 > -2$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n > -2$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} > -2$

لدينا: $u_n > -2$ ومنه $u_n + 5 > 3$ ومنه: $\frac{u_n + 5}{9} > \frac{1}{3}$ أي $\frac{9}{u_n + 5} < 3$

وعليه $-\frac{9}{u_n + 5} > -3$ وأخير $1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$ أي $u_{n+1} > -2$

ومنه الخاصية $u_n > -2$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج انما مقاربة .

المتتالية (u_n) متناقصة تماما معناه ان الفرق $u_{n+1} - u_n$ سالب تماما من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5} = \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

من الجواب أ) نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2

ومن الجواب ب) المتتالية (u_n) متناقصة تماما وعليه نستنتج ان المتتالية (u_n) مقاربة (مبرهنة)

2- اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

(v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ معناه $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n + 5} + 2} = \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)}$ لأن $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5} = \frac{u_n - 4}{u_n + 5}$

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3}$

ومن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول هو $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

(3) التعبير بدلالة n عن v_n و u_n وأحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا $v_n = v_0 + nr$ ومنه $v_n = \frac{1}{3}(n+1)$

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ ومنه $u_n + 2 = \frac{1}{v_n}$ وعليه $u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{3}{n+1} - 2 = \frac{-2n+1}{n+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2n+1}{n+1} = -2$$

(4) تبين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 \cdot v_0 + u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ ومنه لدينا: $v_n(u_n + 2) = 1$ أي $v_n \cdot u_n + 2 \cdot v_n = 1$ ومنه $v_n \cdot u_n = 1 - 2v_n$

نضع: $S_n = u_0 \cdot v_0 + u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$

ومنه: $S_n = (1 - 2v_0) + (1 - 2v_1) + \dots + (1 - 2v_n) = (n+1) - 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$

نعلم أن $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(\frac{n+2}{3})$

وعليه: $S_n = (n+1) - 2(\frac{n+1}{2})(\frac{n+2}{3}) = \frac{3(n+1) - (n+1)(n+2)}{3} = \frac{1}{3}(1+n)(1-n) = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين 19: دورة 2018 لموضوع (1)

(1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 .

(u_n) متتالية عددية معرفة بجدها الاول $u_0 = 0$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

ومنه: $u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln 3$ ، $u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 5$ و $u_3 = u_2 + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln 7$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: \frac{2n+3}{2n+1} > 1$.

لدينا: $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1} > 0$ ومنه: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من الجواب السابق $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ وعليه: $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$

لدينا: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ تكافئ $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(3-أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: e^{u_n} = v_n$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $e^{u_0} = e^0 = v_0$ محققة لأن $v_0 = 2(0) + 1 = 1$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $e^{u_n} = v_n$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه: $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = e^{u_n} \cdot e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n \cdot \frac{2n+3}{2n+1} = 2n+3 = v_{n+1}$

ومنه الخاصية $e^{u_n} = v_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

(ب) استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا: $e^{u_n} = v_n$ منه $u_n = \ln v_n = \ln(2n+1)$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$

(4) حساب المجموعين: S_n و T

$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \cdot \dots \cdot \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right) = \ln v_n = \ln(2n+1)$

لدينا: $e^{u_n} = v_n$ ومنه $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}} = v_{1439} + v_{1440} + \dots + v_{2018}$

من العبارة $v_n = 2n+1$ نستنتج ان: (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها 1

ومنه $T = \frac{2018-1439+1}{2}(v_{1439} + v_{2018}) = 2005640$ حيث: $v_{1439} = 2(1439)+1 = 2879$ و $v_{2018} = 2(2018)+1 = 4037$

التمرين 20: دورة 2017 الموضوع (1)

(1-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq 1$

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $0 < u_0 < 1$ محققة لأن $u_0 = \frac{1}{4}$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 < u_n < 1$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 < u_{n+1} < 1$

مجلة الرائد: المتاليات العددية: 2019-2020 50 إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

لدينا: $0 < u_n < 1$ ومنه $4 < u_n + 4 < 5$ ومنه $\frac{4}{10} < \frac{u_n + 4}{10} < \frac{5}{10}$ وعليه $\frac{10}{5} < \frac{10}{u_n + 4} < \frac{10}{4}$ ومنه $-\frac{10}{4} < -\frac{10}{u_n + 4} < -\frac{10}{5}$

واخيرا $3 - \frac{10}{4} < 3 - \frac{10}{u_n + 4} < 3 - \frac{10}{5}$ أي: $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$ ويمكن القول ان $0 < u_n < 1$

ومنه الخاصية $0 < u_n < 1$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

(ب) تبين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج انها متقاربة

المتتالية (u_n) متزايدة تماما معناه ان الفرق $u_{n+1} - u_n$ موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{(3 - u_n)(u_n + 4) - 10}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(u_n - 2)}{u_n + 4}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $-u_n^2 - u_n + 2$ لأن المقام موجب

$-u_n^2 - u_n + 2 = 0$ معناه $u_n = 1$ أو $u_n = 2$ مرفوض لأن $0 < u_n < 1$

وعليه اشارة $-u_n^2 - u_n + 2$ تكون حسب الجول التالي

u_n	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
اشارة الفرق	-	0	+	0	-
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما			(u_n) متزايدة تماما	

بأن $0 < u_n < 1$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتزايدة.

(2) أثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$.

(v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ معناه المتتالية $v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ ومنه $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\left(3 - \frac{10}{u_n + 4}\right) + 2}{1 - \left(3 - \frac{10}{u_n + 4}\right)} = \frac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)} = \frac{5}{2} v_n$

التعير عن عبارة الحد العام v_n بدلالة n

ولدينا $q = \frac{5}{2}$ و $v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = 3$ ومنه $v_n = v_0 \cdot q^n$ ومنه $v_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n$

(ب) أثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ واستنتاج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ ومنه $v_n(1 - u_n) = u_n + 2$ أي $v_n - u_n \cdot v_n = u_n + 2$

ومنه: $v_n - 2 = u_n(1 + v_n)$ وأخيرا $u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{v_n + 1 - 3}{1 + v_n} = 1 - \frac{3}{1 + v_n}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{1 + v_n} = 1$ وعليه: $\left(\frac{5}{2}\right)^n > 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$

التمرين 21: دورة 2017 الموضوع (2)

(I) التحقق أن f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $[-4; 1]$ ب: $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$

لدينا: $f'(x) = \frac{3(x + 11) - 1(3x - 16)}{(x + 11)^2} = \frac{49}{(x + 11)^2}$

إشارة $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[-4; 1]$.

التحقق أنه من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن: $f(x) \in [-4; 1]$

من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن: $f(x) \in [f(-4); f(1)]$ لأن f متزايدة على المجال $[-4; 1]$.

ومنه: $f(1) = -\frac{13}{12}$ و $f(-4) = -4$ لأن $f(x) \in \left[-4; -\frac{13}{12}\right]$

وعليه $f(x) \in [-4; 1]$ لأن $f(x) \in \left[-4; -\frac{13}{12}\right]$ محتوى في المجال $[-4; 1]$

(II - 1) نقل الشكل وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل

وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n)

متناقصة ومتقاربة نحو نقطة التقاطع -4

(2) البرهان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $-4 \leq u_n \leq 0$

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون: $-4 \leq u_0 \leq 0$ محققة لأن $u_0 = 0$

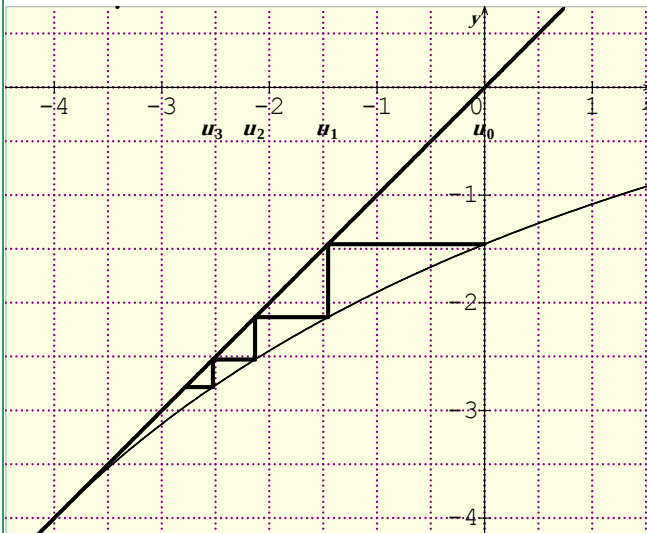
*نفرض أن صحة $P(n)$: أي $-4 \leq u_n \leq 0$

نبرهن أن صحة $P(n+1)$: أي $-4 \leq u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-4 \leq u_n \leq 0$ ومنه $f(-4) \leq f(u_n) < f(0)$

لأن f متزايدة تماما ومنه: $-4 \leq u_{n+1} \leq -\frac{16}{11}$ لأن $\left[-4; -\frac{16}{11}\right]$ محتوى في المجال $[-4; 0]$

ومنه الخاصية $-4 \leq u_n \leq 0$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$



تبيان ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \frac{-(u_n + 4)^2}{u_n + 11}$$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب أي اشارة الفرق حسب الجدول

u_n	$-\infty$	-4	$+\infty$
اشارة الفرق		0	
اتجاه التغير		متناقصة تماما	متناقصة تماما

بأن $-4 \leq u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$.

(v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ معناه $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{7}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } v_n \times u_n = 1 - 4v_n \text{ ومنه } v_n(u_n + 4) = 1 \text{ أي } v_n = \frac{1}{u_n + 4}$$

$$\text{لدينا: } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 4} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{u_n + 11}{7(u_n + 4)} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{u_n + 4}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7}$$

حساب المجموع S

$$\text{لدينا: } S = v_0 \cdot u_0 + v_1 \cdot u_1 + \dots + v_{2016} \cdot u_{2016} \text{ ولدينا أيضا: } v_n \times u_n = 1 - 4v_n$$

$$\text{ومنه: } S = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + \dots + (1 - 4v_{2016}) = 2017 - 4(v_0 + v_1 + \dots + v_{2016})$$

$$\text{لكن: } (v_0 + v_1 + \dots + v_{2016}) = \frac{2017}{2}(v_0 + v_{2016})$$

$$\text{تطبيق عددي: } S = 2017 - 2 \cdot 2017 \left(\frac{1}{2} + 288 \right) = -1161792 \text{ حيث } v_0 = \frac{1}{4} \text{ و } v_{2016} = \frac{1}{4} + 288$$

التمرين 22: دورة 2017 الموضوع (1) الاستدراكية

1) حساب الحدين u_1 و v_1 .

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \text{ ب: المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ معرفتين على المجموعة } \mathbb{N}$$

$$\text{لدينا: } v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{11}{2} \text{ و } u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{7}{4}$$

2- أ) كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

$$\text{لدينا: } u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$$

ب) البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

البرهان ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما معناه $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .
*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $u_1 - u_0 > 0$ محققة لأن $u_1 - u_0 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_{n+1} - u_n > 0$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

من فرضية التراجع لدينا: $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ لأن $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

ومنه الخاصية $u_{n+1} - u_n > 0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

البرهان ان المتتالية (v_n) متناقصة تماما:

المتتالية (v_n) متناقصة تماما معناه $v_{n+1} - v_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .
*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $v_{n+1} - v_n < 0$ محققة لأن $v_1 - v_0 = \frac{11}{2} - 6 = -\frac{1}{2}$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $v_{n+1} - v_n < 0$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $v_{n+2} - v_{n+1} < 0$

من فرضية التراجع لدينا: $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه $v_{n+2} - v_{n+1} < 0$ لأن $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$

ومنه الخاصية $v_{n+1} - v_n < 0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

3) البرهان أن المتتالية (w_n) هندسية وتعيين أساسها q وحدها الاول w_0

المتتالية (w_n) هندسية معناه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = q \cdot w_n$

لدينا المتتالية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = u_n - v_n$

ومنه: $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n$

إذن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الاول $w_0 = u_0 - v_0 = -5$

4) تبين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

(u_n) و (v_n) متجاورتان معناه (u_n) و (v_n) مختلفان في اتجاه التغير و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

* (u_n) و (v_n) مختلفان في اتجاه التغير لان متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما (الجواب ب-2)

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -5 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ لأن $\frac{3}{4} < 1$

التمرين 23: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكية

I) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة

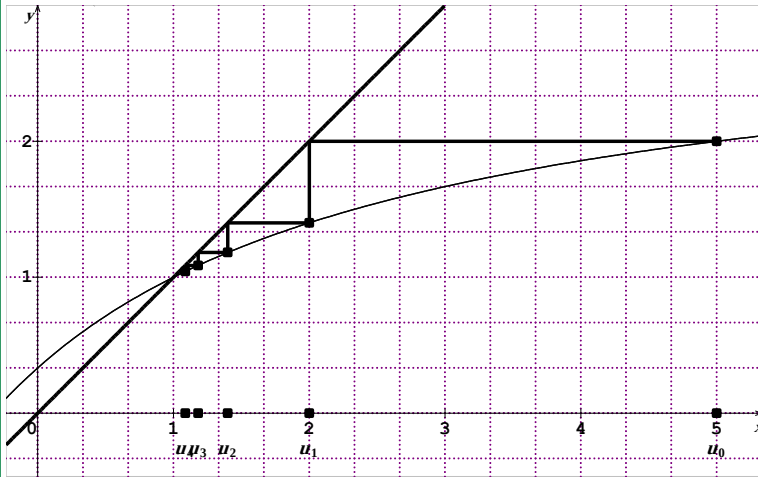
(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = \alpha$ حيث

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3\alpha+1}{\alpha+3} - \alpha = \frac{-\alpha^2+1}{\alpha+3} = 0$ ومنه $-\alpha^2+1=0$ أي $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$

II-1-أ) نقل الشكل المقابل ثم تمثيل على حامل محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساباً)



ب) وضع تخميناً حول اتجاه تغيير

المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نلاحظ أن المتتالية متناقصة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة التقاطع 1

2-أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وتعيين حدّها الأول

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$.

لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ومنه $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3} - 1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3} + 1} = \frac{2(u_n - 1)}{4(u_n + 1)} = \frac{1}{2} v_n$

الحد الأول للمتتالية (v_n) هو: $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2}{3}$

ب) التعبير بدلالة n عن v_n و u_n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

*نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

*لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ومنه $v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$ أي $\frac{2}{u_n + 1} = 1 - v_n$ ومنه $u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$

ومنه $u_n = \frac{2}{1-v_n} - 1$ وأخيرا $u_n = \frac{2}{1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$ وكذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 0$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا: $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$ حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

$$S_n = v_n \left[\frac{1-q^{2017}}{1-q} \right] = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017} \right)$$

استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

لدينا: $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$

ولدينا أيضا $\frac{2}{u_n+1} = 1-v_n$ أي منه $\frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{2}(1-v_n)$

وعليه: $S'_n = \frac{1}{2}[(2017) - S_n]$ أي: $S'_n = \frac{1}{2}[(1-v_n) + (1-v_{n+1}) + \dots + (1-v_{n+2016})]$

التمرين 24: دورة 2016/الموضوع (1)

(1-I) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \sqrt{2x+8}$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها.

حساب $f'(x)$ ودراسة اشارته

f قابلة للإشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ حيث: $f'(x) = \frac{(2x+8)'}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

لدينا: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على مجال تعريفها.

ومنه جدول تغيراتها يكون كمايلي:

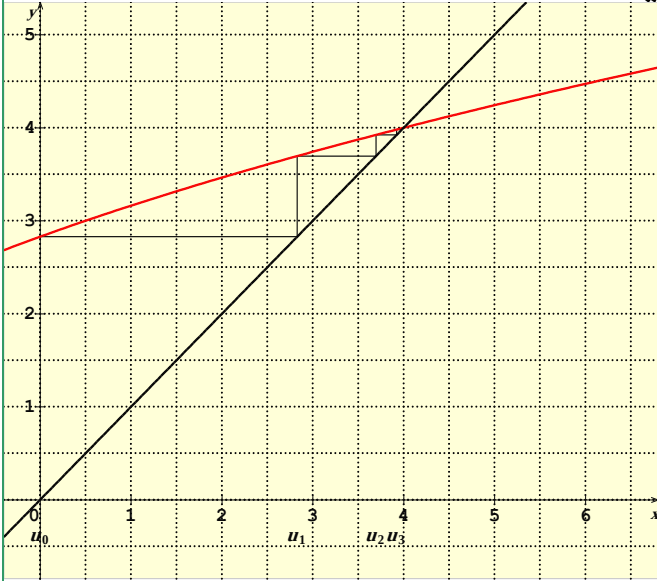
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$f(0)$	$+\infty$

(2) تعيين نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ)

لتعيين نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ) نحل المعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x$ تكافئ $[f(x)]^2 = x^2$ وتكافئ $x^2 - 2x - 8 = 0$

حلول المعادلة $x^2 - 2x - 8 = 0$ هما: $x = 4$ أو $x = -2$ مرفوض
وعليه احداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) هي: (4; 4).



3) رسم (C) والمستقيم (Δ)

II-1) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

2- وضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

من خلال التمثيل للحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل نضمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومقاربة نحو 4

3- أ) البرهان باتراجع أنه من أجل كل

عدد طبيعي $n: 0 \leq u_n < 4$

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 < 4$ محققة لأن $u_0 = 0$

* نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \leq u_n < 4$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \leq u_{n+1} < 4$

لدينا: $0 \leq u_n < 4$ ومنه $f(0) \leq f(u_n) < f(4)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $\sqrt{8} \leq u_{n+1} < 4$

وعليه: $0 \leq u_{n+1} < 4$ لأن $\sqrt{8} > 0$ ومنه الخاصية $0 \leq u_n < 4$ صحيحة

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n + 8} - u_n)(\sqrt{2u_n + 8} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 8}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}$$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $-u_n^2 + 2u_n + 8$ لأن المقام موجب

$-u_n^2 + 2u_n + 8 = 0$ معناه $u_n = 4$ أو $u_n = -2$ مرفوض لأن $0 \leq u_n < 4$

وعليه اشارة $-u_n^2 + 2u_n + 8$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	4	$+\infty$
اشارة الفرق	+	0	-
اتجاه التغير	(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما

بأن $0 \leq u_n < 4$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n + 8} = \frac{(4 - \sqrt{2u_n + 8})(4 + \sqrt{2u_n + 8})}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{(4)^2 - 2u_n - 8}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{2(4 - u_n)}{4 + \sqrt{2u_n + 8}}$$

يمكن كتابة $\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$ على الشكل $\frac{1}{2}(4-u_n) \times \frac{4}{4+\sqrt{2u_n+8}}$

لدينا: $0 < \frac{4}{4+\sqrt{2u_n+8}} < 1$ وعليه $\frac{1}{2}(4-u_n) \times \frac{4}{4+\sqrt{2u_n+8}} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$

ومنه: $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$

باستعمال المتباينة $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$

من أجل $n=0$: $4-u_1 \leq \frac{1}{2}(4-u_0)$ ، ومن أجل $n=1$: $4-u_2 \leq \frac{1}{2}(4-u_1)$

..... ومن أجل $n-1$: $4-u_n \leq \frac{1}{2}(4-u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $4-u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$

(د) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $4-u_n \leq \frac{4}{2^n}$ ولدينا: $4-u_n \geq 0$ ومنه $0 \leq 4-u_n \leq \frac{4}{2^n}$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2^n} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-u_n) = 0$ نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 4$

التمرين 25: دورة 2016 الموضوع (2)

(11) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = 5$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها.

حساب $f'(x)$ ودراسة اشارته

f قابلة للإشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ حيث: $f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x)}{(x+2)^2} = \frac{10}{(x+2)^2}$

لدينا: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على مجال تعريفها.

ومنه جدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f(x)	0	5

(2) تبين أنه من أجل كل عدد x المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$
من جدول تغيرات f لدينا من أجل كل عدد x المجال $[0; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq 5$ أي $f(x) \geq 0$

II - أ) البرهان باتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $1 \leq u_0 \leq 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن صحة $P(n)$ أي: $1 \leq u_n \leq 3$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا: $1 \leq u_n \leq 3$ ومنه $f(1) \leq f(u_n) < f(3)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $\frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$

وعليه: $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ لأن $\frac{5}{3} > 1$ ومنه الخاصية $1 \leq u_n \leq 3$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة.

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{5u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n(-u_n + 3)}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - u_n = 0 \text{ معناه } u_n = 0 \text{ أو } u_n = 3$$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب أي اشارة الفرق حسب الجدول

u_n	$-\infty$	1	0	3	$+\infty$	
اشارة الفرق		-	0	+	0	-
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما	

بأن $1 \leq u_n \leq 3$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(u_n) متقاربة لأنها متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ من الجواب ب) ومحدودة من الأعلى بـ 3 الجواب أ)

(2) أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وتعيين حدها الأول v_0

(v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ معناه المتتالية $v_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } v_n = 1 - \frac{3}{u_n} = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{f(u_n)} = 1 - \frac{3(u_n + 2)}{5u_n} = \frac{5u_n - 3(u_n + 2)}{5u_n} = \frac{2(u_n - 3)}{5u_n} = \frac{2}{5} v_n \text{ ومنه}$$

$$v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} = -2: \text{ والحد الأول هو}$$

ب) كتابة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \cdot q^n = -2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n : n \in \mathbb{N} \text{ لتتالية } (v_n) \text{ هندسية ومنه من أجل كل}$$

$$u_n = \frac{3}{1 - v_n} = \frac{3}{1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} \text{ ومنه } v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \text{ نستنتج أن}$$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n)

لحساب نهاية المتتالية (u_n) نستعمل عبارة الحد العام u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \text{ لأن } \left(\frac{2}{5}\right) < 1 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 3$$

3) كتابة المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \text{ لدينا: } \frac{1}{u_n} = \frac{1 - v_n}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} v_n$$

$$S_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} v_0\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} v_1\right) + \dots + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} v_n\right) = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$S_n = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{1}{3} v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = \frac{1}{3}(n+1) + \frac{10}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \text{ أي:}$$

التمرين 26: دورة جوان 2016 الموضوع (1)

1) - تبين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $I = [0; 4]$

f متزايدة تماما على المجال $I = [0; 4]$ معناه $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \in I$

$$f'(x) = \frac{13(9x+13) - 9(13x)}{(9x+13)^2} = \frac{169}{(9x+13)^2} > 0 \text{ لدينا:}$$

ب- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$: $f'(x)$ ينتمي إلى I

لدينا: من أجل كل $x \in I$ أي $0 \leq x \leq 4$ فإن: $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ لأن f متزايدة

$$\text{ومنه: } 0 \leq f(x) \leq \frac{52}{49} \text{ لأن } f(0) = 0 \text{ و } f(4) = \frac{52}{49} \text{ ومنه } 0 \leq f(x) \leq 4 \text{ لأن } \frac{52}{49} < 4$$

2- أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 \leq 4$ محققة لأن $u_0 = 4$
 *نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \leq u_n \leq 4$
 ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 4$
 لدينا: $0 \leq u_n \leq 4$ ومنه $f(0) \leq f(u_n) < f(4)$ لأن f متزايدة تماماً ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq 4$
 ومنه الخاصية $0 \leq u_n \leq 4$ صحيحة

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انما مقاربة.

* لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \frac{-9u_n^2}{9u_n + 13}$$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً
 * المتتالية (u_n) مقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 ($u_n \geq 0$)

3- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \neq 0$

نستعمل البرهان بالتراجع

التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 \neq 0$ محققة لأن $u_0 = 4$
 *نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n \neq 0$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} \neq 0$
 لدينا: $u_n \neq 0$ ومنه $f(u_n) \neq f(0)$ لأن f متزايدة تماماً ومنه: $u_{n+1} \neq 0$ لأن $f(0) = 0$
 ومنه الخاصية $u_n \neq 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

4- أ) البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية وتعيين أساسها وحدها الأول v_0

(v_n) حسابية معناه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n = r$ حيث r عدد حقيقي ثابت

$$\text{لدينا: } v_{n+1} - v_n = \frac{13}{u_{n+1}} - \frac{13}{u_n} = 13 \left(\frac{9u_n + 13}{13u_n} \right) - \frac{13}{u_n} = \frac{9u_n + 13}{u_n} - \frac{13}{u_n} = 9$$

$$\text{ومنه: } (v_n) \text{ حسابية أساسها } r=9 \text{ وحدها الأول } v_0 = 2 + \frac{13}{u_0} = 2 + \frac{13}{4} = \frac{21}{4}$$

ب) كتابة v_n بدلالة n

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n: \text{ لدينا: } v_n = v_0 + nr \text{ ومنه: } v_n = \frac{21}{4} + 9n$$

ج) استنتاج أن: $u_n = \frac{52}{36n + 13}$ وذلك أجل كل عدد طبيعي n ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا: } v_n = 2 + \frac{13}{u_n} \text{ ومنه } v_n - 2 = \frac{13}{u_n} \text{ أي } u_n = \frac{13}{v_n - 2}$$

$$u_n = \frac{13}{\frac{21}{4} + 9n - 2} = \frac{13(4)}{36n + 13} = \frac{52}{36n + 13} \text{ ومنه } v_n = \frac{21}{4} + 9n \text{ ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (18n) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{52}{36n + 13} = \frac{13}{18n} = 0$$

التمرين 27: دورة جوان 2016 الموضوع (2)

1) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها q وحدها الأول v_0
 (v_n) هندسية معناه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n \cdot q$ حيث q عدد حقيقي ثابت

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} = \frac{1}{4} v_n \text{ ومنه:}$$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } q = \frac{1}{4} \text{ ومنه: } (v_n) \text{ هندسية وتعيين أساسها}$$

2-أ) كتابة v_n بدلالة n

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n: \text{ لدينا: } v_n = v_0 \cdot q^n \text{ ومنه: } v_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ب) استنتاج عبارة أن: u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \text{ تكافئ } v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \text{ تكافئ } v_n \cdot u_n + 2v_n = u_n - 1 \text{ تكافئ } u_n = -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1}$$

$$\text{وبتعويض } v_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ في العبارة } u_n = -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1} \text{ نجد: } u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

ج) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ لأن الأساس } 0 < q < 1$$

3-أ) حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} \right] = -\frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] \text{ لدينا:}$$

ب) التحقق أن $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n) \text{ أي } u_n + 2 = -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1} + 2 = \frac{-3}{v_n - 1} \text{ ومنه } u_n = -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1}$$

استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}[(1 - v_0) + (1 - v_1) + \dots + (1 - v_n)]$$

$$\text{ومنه: } S'_n = \frac{1}{3}[(n + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)] = \frac{1}{3}[(n + 1) - S_n]$$

التمرين 28: دورة 2015 الموضوع (1)

(1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 .

$$\text{لدينا: } u_0 = e^2 - 1 \text{ و } u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$$

$$\text{ومنه: } u_1 = (1 + u_0)e^{-2} - 1 = (1 + e^2 - 1)e^{-2} - 1 = 0$$

$$u_2 = (1 + u_1)e^{-2} - 1 = (1 + 0)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1$$

$$u_3 = (1 + u_2)e^{-2} - 1 = (1 + e^{-2} - 1)e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1$$

(2) اثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

نستعمل البرهان بالتراجع:

$$* \text{ من أجل } n=0 \text{ يكون لدينا: } 1 + u_0 > 0 \text{ محققة لأن: } 1 + u_0 = e^2 > 0$$

$$* \text{ نفرض أن: } 1 + u_n > 0 \text{ من أجل } n = k \text{ حيث } k \text{ عدد طبيعي.}$$

$$\text{ونبرهن أن: } 1 + u_n > 0 \text{ صحيحة من من أجل } n = k + 1.$$

$$\text{من أجل } n = k + 1 \text{ يكون لدينا: } 1 + u_{k+1} > 0.$$

$$\text{لدينا من جهة أخرى: } 1 + u_{k+1} = (1 + u_k)e^{-2} - 1 + 1 = (1 + u_k)e^{-2}$$

$$\text{من فرضية التراجع لدينا: } 1 + u_k > 0 \text{ ونعلم أن } e^{-2} > 0 \text{ وعليه: } (1 + u_k)e^{-2} > 0$$

$$\text{ومنه " } 1 + u_{k+1} > 0 \text{ ومنه الخاصية } 1 + u_n > 0 \text{ محققة من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

(3) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة ودراسة تقاربها.

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة معناه } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

$$u_{n+1} - u_n = (1 + u_n)e^{-2} - 1 - u_n = (e^{-2} - 1)(1 + u_n)$$

$$\text{لدينا: } 1 + u_n > 0 \text{ و } (e^{-2} - 1) < 0 \text{ وعليه: } u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\text{ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{N}.$$

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ مقاربة لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل } u_n > -1 \text{ بالعدد } -1$$

4) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$\text{المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q \text{ معناه المتتالية } v_{n+1} = q.v_n \text{ من أجل كل } n \in \mathbb{N}.$$

لدينا: $v_n = 3(1 + u_n)$ ومنه: $v_{n+1} = 3(1 + u_{n+1}) = 3(1 + (1 + u_n)e^{-2} - 1) = 3(1 + u_n)e^{-2}$ أي: $v_{n+1} = 3(1 + u_n)e^{-2} = e^{-2} \cdot v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول $v_0 = 3(1 + u_0) = 3e^2$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا: المتتالية (v_n) هندسية ومنه: $v_n = v_0 \cdot q^n$ ومنه: $v_n = 3e^2 \cdot (e^{-2})^n = 3e^{2-2n}$

لدينا: $v_n = 3(1 + u_n)$ ومنه: $\frac{1}{3}v_n = 1 + u_n$ أي $\frac{1}{3}v_n = e^{2-2n} - 1$

ج) تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = \ln(v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n) = \ln(v_0^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}})$

ومنه: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = \ln(v_0^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}) = (n+1)\ln(v_0 \cdot q^{\frac{n}{2}})$

تطبيق عددي: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)\ln(3e^2 \cdot (e^{-2})^{\frac{n}{2}}) = (n+1)\ln(3e^{2-n})$

وأخيرا: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين 29: دورة 2015 الموضوع (2)

1- I) تعيين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

الدالة f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$

لتعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ نحسب المشتق وندرس اشارته.

لدينا: $f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

نلاحظ أن: $f'(x) > 0$ على المجال $[0; +\infty[$ وعليه تكون متزايدة تماما.

2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y > 0$

لدينا: $f(x) - y = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2+3x+1}{x+1}$

إشارة الفرق هي حسب إشارة العبارة $-x^2+3x+1$ لأن $x+1 > 0$.

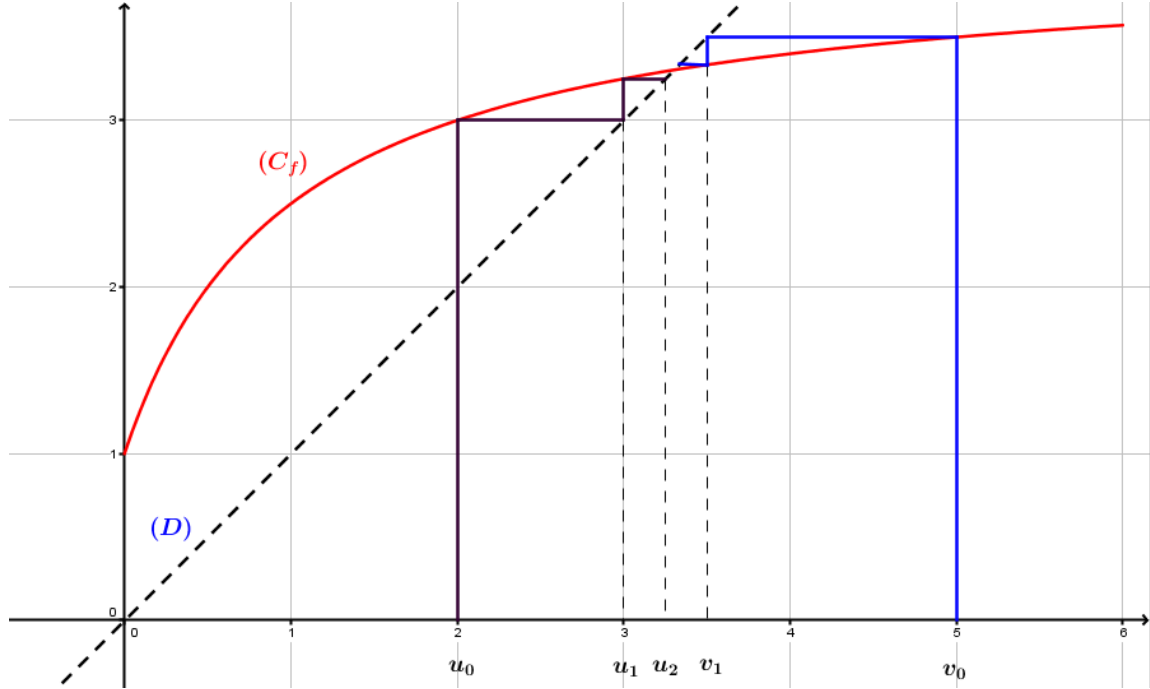
$-x^2+3x+1=0$ معناه $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \notin [0; +\infty[$ مرفوض أو $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

إشارة العبارة $-x^2+3x+1$ على المجال $[0; +\infty[$ هي حسب الجدول التالي:

x	0	x_2	$+\infty$
إشارة الفرق	+	0	-

وعليه وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) تكون كمايلي:

$x \in [0; x_2]^*$ معناه $f(x) - y > 0$ معناه (C_f) فوق (D)
 $x = x_2^*$ معناه $f(x) - y = 0$ معناه (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة x_2 .
 $x \in]x_2; +\infty[^*$ معناه $f(x) - y < 0$ معناه (C_f) تحت (D).
(3) تمثيل كلا المنحنى (C_f) والمستقيم (D) على المجال $[0; 6]$



(II) 1) أ) إنشاء على حامل محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$
ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتاليتين (u_n) و (v_n) .

من خلال إنشاء الحدود نؤمن أن المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة

وأن المتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو القيمة $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $2 \leq u_n \leq \alpha$ و $\alpha \leq v_n \leq 5$ حيث $x_2 = \alpha$
 نستعمل البرهان بالتراجع:

البرهان أن: $2 \leq u_n \leq \alpha$ و $\alpha \leq v_n \leq 5$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

* التحقق من صحة الخاصية $P(0)$.

من أجل $n = 0$ تكون $\begin{cases} 2 \leq u_0 \leq \alpha \\ \alpha \leq v_0 \leq 5 \end{cases}$ محققين لأن: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 5 \end{cases}$

* نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي: $\begin{cases} 2 \leq u_n \leq \alpha \\ \alpha \leq v_n \leq 5 \end{cases}$

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة أي: $\begin{cases} 2 \leq u_{n+1} \leq \alpha \\ \alpha \leq v_{n+1} \leq 5 \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq u_n \leq \alpha \\ \alpha \leq v_n \leq 5 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} f(2) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \\ f(\alpha) \leq f(v_n) \leq f(5) \end{cases}$ لأن الدالة f متزايدة تماماً.

$$\text{ومنه} \begin{cases} 2 < 3 \leq f(u_n) \leq \alpha \\ \alpha \leq f(v_n) \leq \frac{7}{2} < 5 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} 3 \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \\ f(\alpha) \leq f(v_n) \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

ومنه الخاصيتين $2 \leq u_n \leq \alpha$ و $\alpha \leq v_n \leq 5$ صحيحتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.
ب) استنتاج اتجاه تغير كل من المتاليتين (u_n) و (v_n) .

اتجاه تغير المتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 1}{u_n + 1}$ ومنه: $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - x_1)(u_n - x_2)}{(u_n + 1)}$ أنظر 2-I

وعليه إشارة الفرق تكون كمايلي:

u_n	0	2	α	$+\infty$
إشارة الفرق		+	0	-

بما أن $2 \leq u_n \leq \alpha$ فإن المتالية (u_n) متزايدة تماماً.

اتجاه تغير المتالية (v_n)

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{4v_n + 1}{v_n + 1} - v_n = \frac{-v_n^2 + 3v_n + 1}{v_n + 1}$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - x_1)(v_n - x_2)}{(v_n + 1)}$ أنظر 2-I وعليه إشارة الفرق تكون كمايلي:

v_n	0	α	5	$+\infty$
إشارة الفرق	+	0	-	-

بما أن $\alpha \leq v_n \leq 5$ فإن المتالية (v_n) متناقصة تماماً.

3) أثبات أنه من أجل من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

يكفي اثبات أن: $(v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{1}{3}(v_n - u_n) < 0$

لدينا: $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$

ومنه: $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3} \frac{(v_n - u_n)9}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ لأن: $\frac{9}{(v_n + 1)(u_n + 1)} < 1$

ملاحظة: يمكن استعمال طرق أخرى

ب) تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

من الجواب السابق لدينا: (1) $(v_n - u_n) > 0$

نبين أن: $(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

من المتباينة $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $v_1 - u_1 \leq \frac{1}{3}(v_0 - u_0)$

من أجل $n=1$ يكون لدينا: $v_2 - u_2 \leq \frac{1}{3}(v_1 - u_1)$

.....

.....

من أجل $n-1$ يكون لدينا: $v_n - u_n \leq \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $3 \cdot (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

أي (2).... $(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ من (1) و (2) نستنتج أن: $0 < (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ وتحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

لدينا: $0 < (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

بأن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد α ($2 \leq u_n \leq \alpha$)

فإن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي واليكن L يحقق $f(L) = L$

لكن لدينا: $f(\alpha) = \alpha$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = \alpha$ بنفس الطريقة نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (v_n) = \alpha$.

التمرين 30: دورة 2014 الموضوع (1)

1) تبين أن (v_n) م. ه. يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(v_n) م. ه. أساسها q معناه $v_{n+1} = q \cdot v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_n = u_n + 4$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$ ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 4) = \frac{2}{3}v_n$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 4 = 5$

2) كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n

* لدينا: (v_n) م. ه أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل $v_0 = 5$

ونعلم أن : عبارة الحد العام v_n تعطى بـ: $v_n = v_0 \cdot q^n$ وعليه : $v_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

* لدينا: $v_n = u_n + 4$ ومنه: $u_n = v_n - 4 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left(5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\right) - \left(5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right) = -\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل كل عدد طبيعي $n: -\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0$ وعليه تكون المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

4) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

ولدينا: $u_n = v_n - 4$ ومنه: $S_n = (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \dots + (v_n - 4) = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (-4)(n+1)$

لكن: $(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = 15 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$ وعليه: $S_n = 15 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + (-4)(n+1)$

5- أ) ببيان أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ معناه $w_{n+1} - w_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

لأن (v_n) م. ه متناقصة لأن $v_0 > 0$ و $q = \frac{2}{3} < 1$ $w_{n+1} - w_n = \frac{5}{v_{n+1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5} = 5 \left[\frac{v_n}{v_{n+1} + 5} - \frac{v_{n+1}}{v_n + 5} \right] > 0$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n - w_n) = 0$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (w_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{v_n + 5} - 5\right) = -4$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right) = -4$

التمرين 31: دورة 2014 الموضوع (2)

I-1) تبين أن (u_n) م. ه يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

(u_n) م. ه أساسها q معناه $u_{n+1} = u_n \cdot v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $u_n = e^{\frac{1}{2} - n}$ ومنه: $u_{n+1} = e^{\frac{1}{2} - (n+1)} = e^{-\frac{1}{2} - n} = e^{-1} \cdot u_n$ أي $u_{n+1} = e^{-1} \cdot u_n$

ومنه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-1} = \frac{1}{e}$ وحدّها الأوّل $u_0 = e^{\frac{1}{2} - 0} = \sqrt{e}$

2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ والاستنتاج

*لدينا: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$.

(3) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ومنه: $S_n = u_0 \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right]$ أي $S_n = \sqrt{e} \left[\frac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-(e^{-1})} \right]$

(II-1) التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج نوع المتتالية (v_n)

*لدينا: $v_n = \ln(u_n)$ ولدينا: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ ومنه : $v_n = \ln(e^{\frac{1}{2}-n}) = (\frac{1}{2}-n)\ln e = (\frac{1}{2}-n)$

*لدينا: $v_n = \ln(u_n)$ ومنه : $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln e^{-1} = -1$

وعليه (v_n) متتالية حسابية أساسها (-1) وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0) = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$

(2-أ) حساب العدد P_n بدلالة n

لدينا: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$ ومنه: $P_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ أي: $P_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

ومنه: $P_n = \frac{(n+1)}{2}(v_0 + v_n)$ وأخيرا $P_n = \frac{(n+1)}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n \right) = \frac{-n^2+1}{2}$

(ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

لدينا: $P_n + 4n = \frac{-n^2+1}{2} + 4n > 0$ معناه $-n^2 + 8n + 1 > 0$

أي $4 - 2\sqrt{5} < n < 4 + 2\sqrt{5}$ ومنه $0 \leq n \leq 8$ لأن: $n \in \mathbb{N}$ وعليه: $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

التمرين 32: دورة 2013 الموضوع (1)

(I-1) تبين أن (v_n) م هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول

(v_n) متتالية هندسية معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = q.v_n$

$$v_{n+1} = \frac{5}{6} v_n \text{ إذن: } v_{n+1} = \frac{5^{n+2}}{6^{n+1}} = \frac{5 \times 5^{n+1}}{6 \times 6^n} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n} = \frac{5}{6} \times v_n$$

أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ وحدها الأول هو $v_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0} = 5$

(2) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{6^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^n = 0 \text{ لأن } \frac{5}{6} < 1$$

(II-1) البرهان بالتراجع أن: $1 \leq u_n \leq 6$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ يكون: $1 \leq u_0 \leq 6$ محققة لأن $u_0 = 1$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq 6$ ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

لدينا: $1 \leq u_n \leq 6$ ومنه $5 \leq 5u_n \leq 30$ ومنه $11 \leq 5u_n + 6 \leq 36$ أي $\sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq 6$

أي $1 \leq u_{n+1} \leq 6$ إذن: $1 \leq \sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq 6$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n$. ولمعرفة إشارة الفرق نضرب ونقسم في مرافق الفرق نجد:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{5u_n + 6} - u_n)(\sqrt{5u_n + 6} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 5u_n + 6}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 6)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

بأن $1 \leq u_n \leq 6$ فإن الفرق يكون موجبا على هذا المجال ومنه المتتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

3-أ) البرهان أن $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا $6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n + 6} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$ لأنه: $\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{1}{6}$ ومنه $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

ب) تبين أن $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ واستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

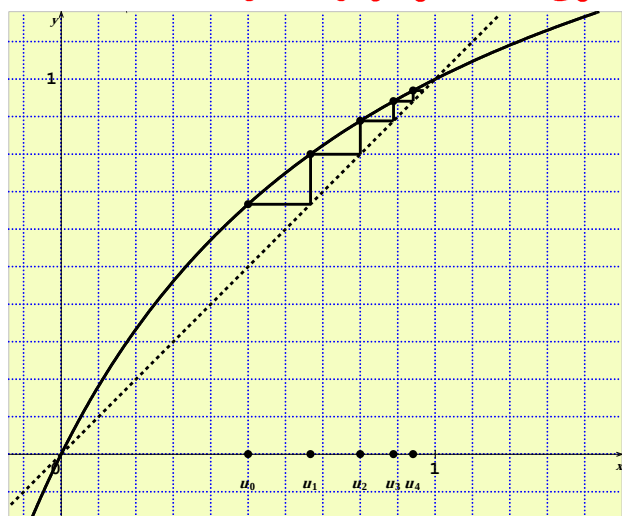
من أجل 0: $6 - u_1 \leq \frac{5}{6}(6 - u_0)$ ومن أجل 1: $6 - u_2 \leq \frac{5}{6}(6 - u_1)$... ومن أجل n: $6 - u_n \leq \frac{5}{6}(6 - u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $6 - u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$ أي $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$

لدينا: $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ولدينا أيضا $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - u_n) = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

التمرين 33: دورة 2013 الموضوع (2)

1-أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابا وإبراز خطوط التمثيل



ب) وضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربا.

من البيان نخمن أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2-أ) إثبات أن f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ معناه $f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

ب) البرهان بالتراجع أن: $0 < u_n < 1$

من أجل $n = 0$ يكون: $0 < u_0 < 1$ محققة لأن $u_0 = \frac{1}{2}$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_{n+1} < 1$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$ ومنه: $f(0) < f(u_n) < f(1)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً أي:
 $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ لأن $0 < u_{n+1} < 1$

(ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{u_n + 1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط لأن المقام موجب تماماً

من أجل كل $u_n \in]0; 1[$ يكون $u_n(1 - u_n) > 0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

3-أ) البرهان أن (v_n) م.ه أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب حدّها الأول

(v_n) م هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = -1 \quad \text{الحّد الأول: } v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \text{ أي } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{f(u_n) - 1}{f(u_n)} = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n - 1}{u_n}$$

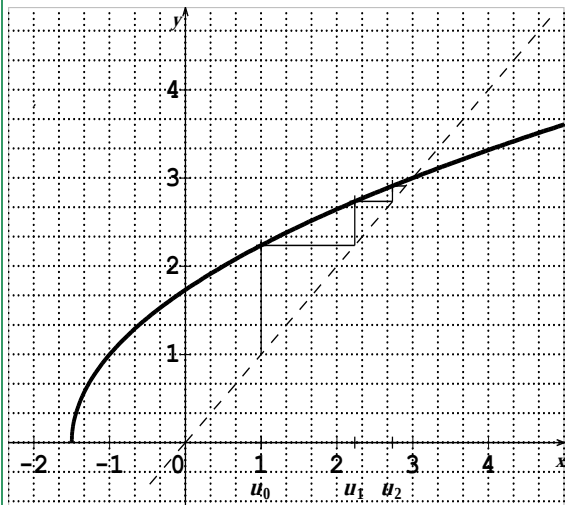
حساب غاية (u_n)

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \text{ ومنه } u_n = \frac{1}{1 - v_n} \text{ ولدينا: } v_n = v_0 \cdot q^n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{1}{1 + 2^{-n}} \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2^{-n}} = 1 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

التمرين 34: دورة 2012/الموضوع (1)

1-أ) إعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



ب) وضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

من 1-أ) نحمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومقاربة نحو 3

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 3$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $0 < u_0 < 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 3$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_{n+1} < 3$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 3$

ومنه: $h(0) < h(u_n) < h(3)$ لأن الدالة h متزايدة تماماً

$$\text{أي: } \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$$

3-أ) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط لأن المقام موجب

$$-u_n^2 + 2u_n + 3 = 0 \text{ معناه } u_n = -1 \text{ أو } u_n = 3 \text{ ومنه: } -u_n^2 + 2u_n + 3 > 0 \text{ من أجل } 0 < u_n < 3$$

وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

طريقة 2: لدينا الدالة المرفقة h متزايدة تماماً و $u_1 > u_0$

ومن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

(ب) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ($u_n < 3$).

نفرض أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ ونحل المعادلة $h(\alpha) = \alpha$

$$h(\alpha) = \alpha \text{ معناه } \sqrt{2\alpha + 3} = \alpha \text{ معناه } 2\alpha + 3 = \alpha^2 \text{ لأن معناه } \alpha \text{ موجب تماماً}$$

معناه $\alpha = 3$ أو $\alpha = -1$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً

التمرين 35: دورة 2012 الموضوع (2)

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $3 < u_n < 4$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ يكون: } 3 < u_0 < 4 \text{ لأن } u_0 = \frac{13}{4}$$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $3 < u_n < 4$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $3 < u_{n+1} < 4$ صحيحة

$$\text{لدينا: من أجل كل } n \in \mathbb{N} \text{ } 3 < u_n < 4 \text{ ومنه: } 0 < u_n - 3 < 1 \text{ أي } 0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$$

$$\text{أي: } 3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4 \text{ إذن } 3 < u_{n+1} < 4$$

2) تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 3} + 3 - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماماً

إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ هي حسب إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$

$$\text{لدينا } -u_n^2 + 7u_n - 12 \text{ ينعدم عند } 3 \text{ و } 4 \text{ ومن أجل } 3 < u_n < 4 \text{ يكون } -u_n^2 + 7u_n - 12 > 0$$

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

3) تبرير أن المتتالية متقاربة.

من الجواب السابق (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وعليه المتتالية متقاربة نحو 4.

4-أ) البرهان أن (v_n) م.ه أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب الحد الأول

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ معناه } v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$\text{لدينا: } v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln \frac{1}{4} \text{ والحد الأول هو } v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2} v_n$$

ب) كتابة كلاً من v_n و u_n بدلالة n وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \cdot q^n = -\ln 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{لدينا: } v_n = \ln(u_n - 3) \text{ ومنه } e^{v_n} = u_n - 3 \text{ وعليه: } u_n = 3 + e^{v_n} = 3 + e^{-\ln 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n}$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + e^{-2 \ln 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}) = 3 + 1 = 4$$

ج) كتابة P_n بدلالة n وتبيان أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

$$\text{لدينا: } P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3) = e^{v_0} \cdot e^{v_1} \cdot \dots \cdot e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{v_0 \frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - (q)}}$$

$$\ln P_n = \ln \frac{1}{16} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \text{ ومنه: } P_n = e^{\ln \frac{1}{16} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)} \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln \frac{1}{16} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)} = e^{\ln \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$$

التمرين 36: دورة 2011 الموضوع (1)

تحديد الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة مع التعليل

الإقترح	الإجابة الصحيحة	التعليل
1	ب- هندسية	$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n$
2	النهاية هي: $-\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - \frac{1}{2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}) = -\infty$
3	المجموع S_n هو	$S_n = -\frac{1}{2} [1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n] = -\frac{1}{2} \left[1 \cdot \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right] = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين 37: دورة 2011 الموضوع (2)

1-أ) بيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها α

(v_n) هندسية أساسها α معناه $v_{n+1} = \alpha \cdot v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1} \text{ و } u_{n+1} = \alpha u_n + 1$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha \left(u_n + \frac{1}{\alpha - 1} \right) = \alpha v_n$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n و α واستنتاج u_n بدلالة n و α

$$v_n = \left(\frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1} \right) \cdot \alpha^n \text{ ومنه: } v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1} \text{ حيث } v_n = v_0 \cdot \alpha^n$$

$$u_n = \left(\frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1} \right) \cdot \alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1} \text{ ومنه: } u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} \text{ ومنه: } v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$$

(ج) تعيين قيم α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة

حتى تكون (u_n) متقاربة يجب أن يكون الأساس $0 < \alpha < 1$

2- حساب المجموعين T_n و S_n

$$S_n = v_0 \left(\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \right) = 8 \left[\frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right] = 16 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

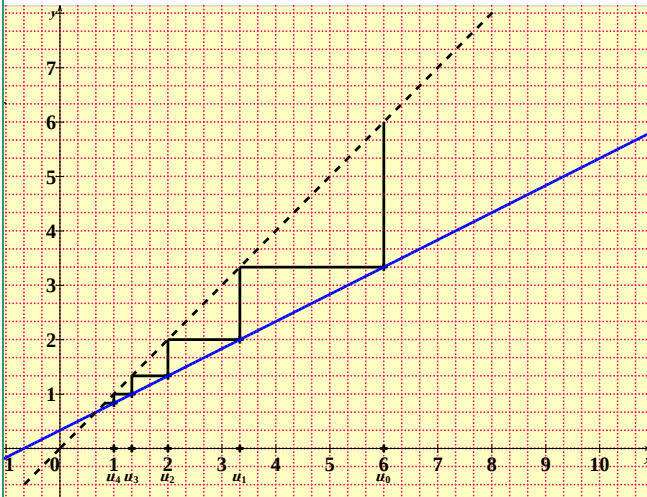
$$\text{ولدينا } T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ نعلم أن } u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} \text{ ومنه } u_n = v_n - 2$$

$$T_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2)$$

$$\text{وعليه: } T_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 2(n+1) = S_n - 2(n+1)$$

التمرين 38: دورة 2010 الموضوع (1)

1- أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على حامل محور الفواصل



(ب) تعيين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

إحداثي نقطة تقاطع (Δ) و (D) نحل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = x \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \\ y = x \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \\ y = x \end{cases}$$

ومنه إحداثي نقطة تقاطع (Δ) و (D) هي $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

(ج) إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من التمثيل البياني نحمن أن المتتالية (u_n) متناقصة

2- أ) الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \frac{2}{3}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 > \frac{2}{3}$ محققة لأن $u_0 = 6$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_n > \frac{2}{3}$ ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n > \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)$ ومنه $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ وأخيرا $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

(ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n - \frac{2}{3})$ لأن $u_n > \frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

3- (أ) تبين أن (v_n) مهندسية وتحديد أساسها وحدها الأول

(v_n) متتالية هندسية معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = q.v_n$

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(u_n - \frac{2}{3})$

إذن: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

(ب) كتابة عبارة الحد العام v_n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = v_0 \cdot q^n$ ومنه $v_n = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ولدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

(ج) حساب المجموع S_n واستنتاج المجموع S'_n بدلالة n

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$ ومنه: $S_n = \frac{32}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(\frac{2}{3} + v_0\right) + \left(\frac{2}{3} + v_1\right) + \dots + \left(\frac{2}{3} + v_n\right) = \frac{2}{3}(n+1) + S_n$

التمرين 39: دورة 2009 الموضوع (1)

1) حساب v_0 و v_1

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$ ومنه: $v_0 = u_1 - u_0 = 1$ و $v_1 = u_2 - u_1 = \frac{1}{3}$

2) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها

(v_n) متتالية هندسية معناه: $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$

$$\boxed{q = \frac{1}{3}} : \text{متتالية هندسية أساسها : } v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

3-أ) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ومنه: $S_n = v_0 \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right] = 1 \left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \right] = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$

ب) البرهان أن: $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ومنه: $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$

بعد التبسيط نجد: $S_n = -u_0 + u_n$ ومنه: $u_n = u_0 + S_n$ وأخيرا: $\boxed{u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1}$

ج) تبين أن (u_n) متقاربة

(u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ثابت

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 = \frac{5}{2}$

التمرين 40: دورة 2009 الموضوع (2)

1-أ) حساب u_2 والأساس q واستنتاج الحد الأول

لدينا: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} \frac{u_2}{q} + 2u_2 + u_2q = 32 \\ u_2^3 = 216 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 1 + 2q + q^2 = \frac{16}{3}q \\ u_2 = 6 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} q = 3 \vee q = \frac{1}{3} \\ u_2 = 6 \end{cases}$

وبأن المتتالية متزايدة فإن: $q = 3$ و $u_2 = 6$

لدينا: $u_2 = u_1q$ ومنه: $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$

ب) كتابة عبارة الحد u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = u_1q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

ج) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$ ومنه: $S_n = 2 \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 3^n - 1$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$

$$S_n = 728 \text{ معناه } 3^n - 1 = 278 \text{ أي: } 3^n = 279 \text{ إذن: } n=6$$

2- (أ) حساب v_2 و v_3

$$v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2}(5) + 6 = \frac{27}{2} \text{ و } v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5 \text{ ومنه: } v_1 = 2 \text{ و } w_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

(ب) تبين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n \text{ معناه } \frac{1}{2} \text{ أساسها هندسية أساسها } (w_n)$$

$$\text{لدينا: } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ ومنه } w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_n$$

(ج) كتابة w_n بدلالة n واستنتاج v_n بدلالة n

$$w_n = w_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ ولدينا: } w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ ومنه: } w_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{لدينا: } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ ومنه: } w_n + \frac{2}{3} = \frac{v_n}{u_n} \text{ أي: } v_n = u_n \left(w_n + \frac{2}{3}\right) \text{ إذن: } v_n = 2 \cdot 3^{n-1} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right)$$

التمرين 41: دورة 2008 الموضوع (1)

1- (أ) تبين أن f متزايدة تماماً على I

$$f \text{ قابلة للإشتقاق على } I \text{ حيث: } f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2} > 0 \text{ ومنه } f \text{ متزايدة تماماً على } I.$$

(ب) تبين أنه من أجل كل x من I فإن $f(x)$ تنتمي لـ I

بما أن مستمرة ومتزايدة تماماً على I فإن: $1 \leq x \leq 2$ ومنه $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ ومنه $f(x)$ تنتمي لـ I .

2- (أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n من N , $1 \leq u_n \leq 2$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $1 \leq u_0 \leq 2$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ أي $1 \leq u_n \leq 2$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا: $1 \leq u_n \leq 2$ معناه $3 \leq u_n + 2 \leq 4$ (1) و $1 \leq u_n \leq 2$ معناه $2 \leq -u_n + 4 \leq 3$ (2)....

من (1) و (2) نجد: $1 \leq \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} \leq 2$ ومنه $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) دراسة تغيرات المتتالية (u_n) .

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4} \text{ أي } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n + 2}{-u_n + 4}$$

البسط سالب تماماً لأن $1 \leq u_n \leq 2$ والمقام موجب تماماً لأن $2 \leq -u_n + 4 \leq 3$ ومنه (u_n) متناقصة تماماً

استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

(u_n) متناقصة تماماً على I ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

3- البرهان بالتراجع انه من اجل كل n من N : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = \frac{3}{2}$ محققة

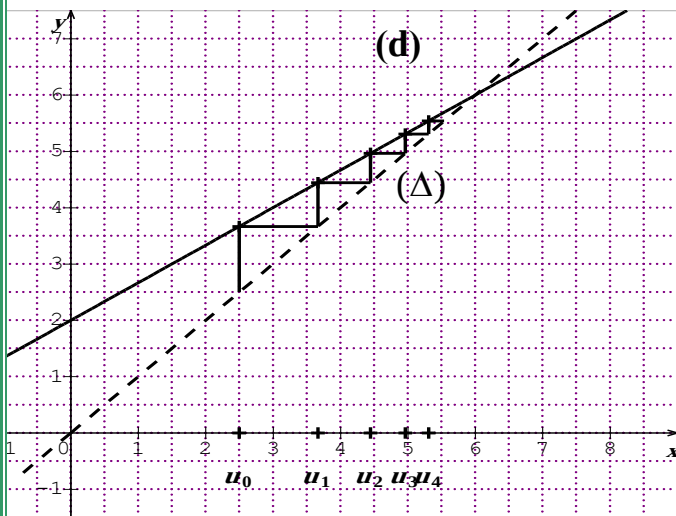
نفرض صحة $P(n)$ أي $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

لدينا: $u_{n+1} = -1 + \frac{6}{4 - u_n} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

ب) تعيين النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التمرين 42: دورة 2009 الموضوع (2)



1 أ- ب) رسم (Δ) و (d) وتمثيل u_0, u_1, u_2, u_3, u_4

ج) وضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n)، وتقاربا

من الرسم السابق نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة

تماماً ومتقاربة نحو 6.

2- أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n \leq 6$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 = \frac{5}{2} \leq 6$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ أي $u_n \leq 6$ ونبرهن صحة

$P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq 6$

لدينا: $u_n \leq 6$ معناه $\frac{2}{3}u_n \leq 4$ معناه $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$ أي

أن $u_{n+1} \leq 6$ ومنه $u_n \leq 6$ محققة من أجل كل n من N

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}(u_n - 6) > 0 \quad (u_n) \text{ متزايدة تماماً لأن:}$$

(ج) دراسة تقارب (u_n)

المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6 لأنها متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 حسب ما سبق.

3-أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

(v_n) متتالية هندسية معناه: $v_{n+1} = v_n \cdot q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}(u_n - 6) \text{ ومنه: } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

أي أن: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{7}{2}$

ب) كتابة عبارة u_n بدلالة n ، واستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 6 \text{ ومنه } u_n = v_n + 6 \text{ أي: } u_n = -\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6 \text{ ، } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

شعبة تقني رياضي

التمرين 43: دورة 2019 الموضوع (1)

1) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(v_n) هندسية أساسها q معناه المتتالية $v_{n+1} = q.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: (v_n) معرفة بـ: $v_n = u_n - 3n + 1$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - 3(n+1) + 1 = u_{n+1} - 3n - 2$

ولدينا: $u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9$ حيث $u_0 = 0$

وعليه: $v_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 - 3n - 2 = 7u_n - 21n + 7 = 7(u_n - 3n + 1) = 7v_n$

ومنه (v_n) هندسية أساسها 7 وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 3(0) + 1 = 1$

2) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج u_n بدلالة n

* نعلم انه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \cdot q^n$ ومنه: $v_n = 7^n$

** لدينا: $v_n = u_n - 3n + 1$ ومنه $u_n = v_n + 3n - 1$ أي $u_n = 7^n + 3n - 1$

3) حساب المجموع S_n بدلالة n .

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ باستعمال العلاقة $u_n = v_n + 3n - 1$ نجد:

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (-1 + 2 + 5 + \dots + (3n-1))$$

نضع: $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

$S_2 = (-1 + 2 + 5 + \dots + (3n-1))$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

$$\text{لدينا: } S_1 = v_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right) = \left(\frac{7^{n+1} - 1}{6} \right) \text{ و } S_2 = \frac{n+1}{2} (-1 + (3n-1)) = \frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

$$\text{وعليه: } S_n = S_1 + S_2 = \left(\frac{7^{n+1} - 1}{6} \right) + \frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

4-أ) دراسة بواقي قسمة العدد 7^n على 9

لدينا: $7^0 \equiv 1[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$

بواقي قسمة 7^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وهي حسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$7^n \equiv$	1	7	4

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $1954^{1962} + 1962^{1954} + 1440^{2019}$ على 9.

* لدينا: $1442 \equiv 2[9]$ ومنه $1442^{2019} \equiv 2^{2019}[9]$ تكافئ $1442^{2019} \equiv (-7)^{2019}[9]$ لأن $1442 \equiv -7[9]$

لكن $1442^{2019} \equiv (-7)^{2019}[9]$ تكافئ $1442^{2019} \equiv 7^{2019} \cdot (-1)^{2019}[9]$

ولدينا: $7^{2019} = 7^{3(673)} \equiv 1[9]$ حسب الجدول اعلاه و $(-1)^{2019} \equiv -1[9]$

وعليه: $1442^{2019} \equiv 2^{2019} [9]$ تكافئ (1)..... $1442^{2019} \equiv -1 [9]$

$1962 \equiv 0 [9]^*$ ومنه (2)..... $1962^{1954} \equiv 0 [9]$

$1954 \equiv 1 [9]^*$ ومنه (3)..... $1954^{2062} \equiv 1 [9]$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن: $1440^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962} \equiv 0 [9]$ أي الباقي هو 0

(ج) إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n $6S_n - 7u_n \equiv 0 [9]$.

$$6S_n = 6 \left(\frac{7^{n+1} - 1}{6} \right) + \frac{6(n+1)(3n-2)}{2} = 7^{n+1} + 9n^2 + 3n - 7$$

$$7u_n = 7^{n+1} + 21n - 7$$

$$6S_n - 7u_n = 9n^2 - 18n = 9(n^2 - 2n) \equiv 0 [9] \text{ ومنه:}$$

التمرين 44: دورة 2018 الموضوع (1)

1- أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > \frac{1}{e}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة

بجدها الأول: $u_0 = \frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = f(u_n)$.

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 > \frac{1}{e}$ محققة لأن $u_0 = \frac{5}{4e} > \frac{1}{e}$

نفرض أن صحة $P(n)$ أي: $u_n > \frac{1}{e}$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لدينا: $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $f(u_n) > f(\frac{1}{e})$ لأن f متزايدة تماماً لأن $f'(x) = \frac{2}{(ex+1)^2} > 0$

ومنه $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ لأن $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ ومنه الخاصية $u_n > \frac{1}{e}$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n + 1}$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n}{eu_n + 1} - u_n = \frac{u_n - eu_n^2}{eu_n + 1} = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n + 1}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتبرير انها متقاربة.

من العبارة $u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n + 1}$ نستنتج ان الفرق $u_{n+1} - u_n$ سالب تماما لأن $u_n > \frac{1}{e}$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأسفل لأن $u_n > \frac{1}{e}$.

2- تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n .

* المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 معناه $v_{n+1} = 2v_n$ من اجل كل عدد طبيعي n

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1} \text{ ومنه } v_{n+1} = \frac{e \cdot u_{n+1}}{e \cdot u_{n+1} - 1} = \frac{e \cdot f(u_n)}{e \cdot f(u_n) - 1} = \frac{e \cdot \frac{2u_n}{eu_n + 1}}{e \cdot \frac{2u_n}{eu_n + 1} - 1} = 2 \frac{eu_n}{eu_n - 1} = 2v_n$$

$$\text{الحد الأول هو } v_0 = \frac{e \cdot u_0}{e \cdot u_0 - 1} = 5 \text{ لأن } u_0 = \frac{5}{4e}$$

* عبارة الحد الحام للمتتالية $(v_n): v_n = v_0 \times q^n$ من اجل كل عدد طبيعي n وعليه: $v_n = 5 \times 2^n$

3-أ) التحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1}$

$$\text{* لدينا من أجل كل عدد } n \text{ من } \mathbb{N} : v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1} = \frac{e \cdot u_n - 1 + 1}{e \cdot u_n - 1} = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1}$$

* استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

$$v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1} \text{ ومنه } v_n - 1 = \frac{1}{e \cdot u_n - 1} \text{ أي } e \cdot u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 1} \text{ ومنه: } u_n = \frac{1}{e v_n - e} + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e v_n - e} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

ب) حساب بدلالة n المجموع S_n .

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right] = 5 \left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right] = 5(2^{n+1} - 1) \text{ ومنه } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

$$\text{لدينا: } 2^0 \equiv 1[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^3 \equiv 1[7]$$

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$2^n \equiv$	1	2	4

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_n قابلا للقسمة على 7.

مجلة الرائد: المتاليات العددية: 2019-2020 **83** إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

$$S_n = 5(2^{n+1} - 1) \equiv 0[7] \text{ معناه } (2^{n+1} - 1) \equiv 0[7] \text{ لأن } 5 \text{ أولي مع } 7$$

معناه $2^{n+1} \equiv 1[7]$ ومعناه $n+1=3k$ حسب ما ورد في الجدول
ومنه $n=3k-1$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم أو $n=3k+2$ حيث k عدد طبيعي.

التمرين 45: دورة 2018 الموضوع (2)

1) أثبات أن (w_n) متتالية عددية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ ، وتعيين حدّها الأول.

لدينا: (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها العام $u_n = 2(3)^n$
لدينا: (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمجدها الأول $v_0 = 4$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$
ولدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$.

المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ معناه $w_{n+1} = \frac{5}{3}w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .
لدينا $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$ ومنه $w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{v_n}{u_n} + \frac{5}{6} = \frac{5}{3} \left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}w_n$
ومنه لمتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدّها الأول $w_0 = \frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

ملاحظة: المتتالية (u_n) هندسية أساسها 3 وحدّها الأول $u_0 = 2(3)^0 = 2$

2) كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n .

المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدّها الأول $w_0 = \frac{5}{2}$ ومنه $w_n = w_0 q^n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{5^{n+1}}{2 \cdot 3^n}$

أستنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

لدينا: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$ ومنه $w_n \cdot u_n - \frac{u_n}{2} = v_n$ وعليه $v_n = \frac{5^{n+1}}{2 \cdot 3^n} \cdot 2 \cdot 3^n - \frac{2 \cdot 3^n}{2} = 5^{n+1} - 3^n$ و.ه.م

3) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8

دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 8

لدينا: $3^0 \equiv 1[8]$ ، $3^1 \equiv 3[8]$ ، $3^2 \equiv 1[8]$ ومنه بواقي قسمة 3^n على 8 تشكل متتالية دورية ودورها 2 وهي حسب الجدول التالي

$n =$	$2k$	$2k+1$	
$3^n \equiv$	1	3	[8]

دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 8

لدينا: $5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$ بواقي قسمة 5^n على 8 تشكل متتالية دورية ودورها 2 وهي حسب الجدول التالي

$n =$	$2k$	$2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	$[8]$

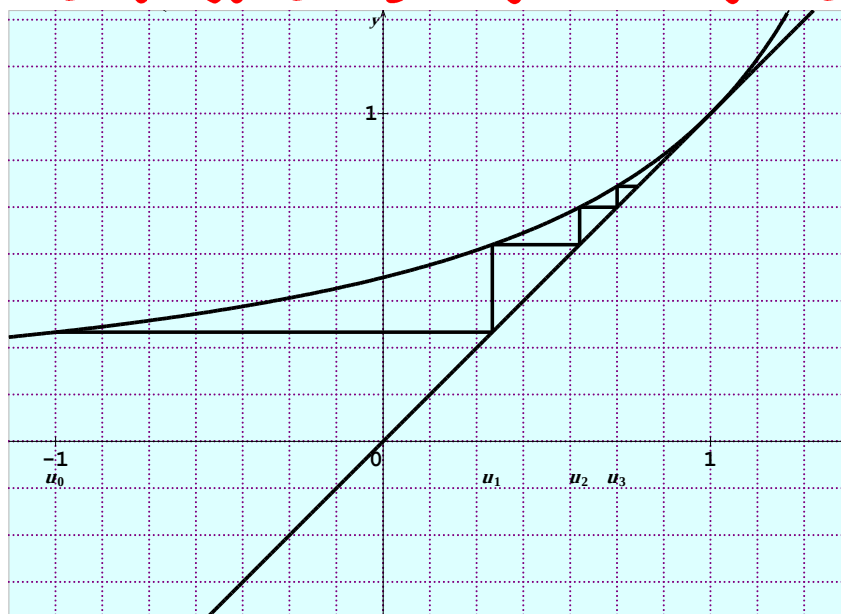
(4) **تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8.**
لدينا: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$ لتعيين بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8 نشكل الجدول التالي

$n =$	$2k$	$2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	$[8]$
$5^{n+1} \equiv$	5	1	$[8]$
$3^n \equiv$	1	3	$[8]$
$5^{n+1} - 3^n \equiv$	4	6	$[8]$

ومنه: من أجل $n = 2k$ فإن باقي قسمة v_n على 8 هو 4
و من أجل $n = 2k+1$ فإن باقي قسمة v_n على 8 هو 6

التمرين 46: دورة 2017 الموضوع (1)

(1) نقل الشكل وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، و u_3 على حامل محور الفواصل



وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة التقاطع 1

(2) **البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 1$**

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 < 1$ محققة لأن $u_0 = -1$

نفرض أن صحة $P(n)$ أي: $u_n < 1$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} < 1$

لدينا: $u_n \leq 1$ ومنه $f(u_n) < f(1)$ لأن f متزايدة تماماً لأن $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} > 0$

ومنه $u_{n+1} < 1$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(1) = 1$

ومنه الخاصية $u_n \leq 1$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتاج أنها متقاربة

* لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2 - u_{n+1}} - u_n = \frac{2 - u_n}{-2u_n + 3} - u_n = \frac{2(u_n - 1)^2}{-2u_n + 3}$$

نلاحظ أن البسط موجب والمقام أيضاً موجب لأن $u_n < 1$

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$

* المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتزايدة تماماً

4-أ) اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2.

(v_n) حسابية أساسها 2 معناه $v_{n+1} - v_n = 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{2}{1 - u_n} \text{ أي } v_{n+1} = \frac{1}{2 - u_{n+1}} = \frac{2(2 - u_n)}{1 - u_n}$$

$$\text{لدينا: } v_{n+1} - v_n = \frac{2(2 - u_n)}{1 - u_n} - \frac{2}{1 - u_n} = \frac{2(1 - u_n)}{1 - u_n} = 2$$

تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = v_0 + nr$

$$\text{حيث: } v_0 = \frac{2}{1 - u_0} = 1 \text{ و } r = 2 \text{ ومنه: } v_n = 2n + 1$$

ب) استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{2}{1 - u_n} \text{ ومنه } 1 - u_n = \frac{2}{v_n} \text{ أي } u_n = 1 - \frac{2}{v_n} \text{ ومنه } u_n = 1 - \frac{2}{2n + 1} = \frac{2n - 1}{2n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{v_n} = 1$$

التمرين 47: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكية

1-أ) تبيان أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$

المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$

لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n > 0$ نستعمل البرهان بالتراجع

* التحقق من صحة $P(1)$

من اجل $n=1$ يكون لدينا: $u_1 > 0$ محققة لأن $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ لأن α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.
 *نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n > 0$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} > 0$
 لدينا: $u_n > 0$ ومنه $u_n > 0$ و $(n+1)u_n > 0$ و كذلك $\alpha u_n > 0$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{n+1}{\alpha n} u_n > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

ومنه الخاصية $u_n > 0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

(ب) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ثم استنتاج أنها متقاربة.

* المتتالية (u_n) متناقصة تماماً معناه $u_{n+1} - u_n < 0$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{\alpha n} u_n - u_n = u_n \left(\frac{(1-\alpha)n+1}{\alpha n} \right)$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط $(1-\alpha)n+1$ لأن المقام موجب تماماً.

لدينا: $\alpha \geq 2$ وعليه $(1-\alpha) \leq -1$ ومنه $(1-\alpha)n \leq -n$ ومنه $(1-\alpha)n+1 \leq 1-n < 0$

إذن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

* المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 و متناقصة تماماً. نستنتج مما سبق أنها متقاربة

2- (أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وتعيين حدّها الأول v_1 بدلالة α .

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{\alpha} v_n$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n \text{ ومنه } v_{n+1} = \frac{1}{\alpha(n+1)} u_{n+1} \text{ لكن } u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$$

$$\text{وعليه } v_{n+1} = \frac{1}{\alpha(n+1)} \frac{n+1}{\alpha n} u_n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha n} u_n \right) = \frac{1}{\alpha} v_n$$

$$\text{الحد الاول للمتتالية } (v_n) \text{ هو } v_1 = \frac{1}{\alpha} u_1 = \frac{1}{\alpha^2}$$

(ب) إيجاد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتاج عبارة u_n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{* المتتالية } (v_n) \text{ هندسية ومنه } v_n = v_1 (q)^{n-1} \text{ ومنه } v_n = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-3} = \alpha^{3-n}$$

$$\text{* لدينا: } u_n = \alpha n \cdot v_n \text{ ومنه } \ln u_n = 4 \ln \alpha + \ln n - n \ln \alpha = 4 \ln \alpha + n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln \alpha \right)$$

$$\text{ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty \text{ وعليه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

(3) حساب بدلالة n و α المجموع S_n

$$\text{لدينا: } S_n = u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{3} u_3 + \dots + \frac{1}{n} u_n \text{ ولدينا كذلك } u_n = \alpha n \cdot v_n$$

$$S_n = v_1 \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n}{\alpha - 1} \text{ ومنه } S_n = \alpha(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) \text{ وعليه:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016} \text{ : تعيين قيمة } \alpha \text{ حيث}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n = 0 \text{ لأن } \alpha - 1 = 2016 \text{ معناه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n}{\alpha - 1} = \frac{1}{2016} \text{ معناه } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$$

$\alpha = 2017$ أي

التمرين 48: دورة 2016 الموضوع (2)

1- تبين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

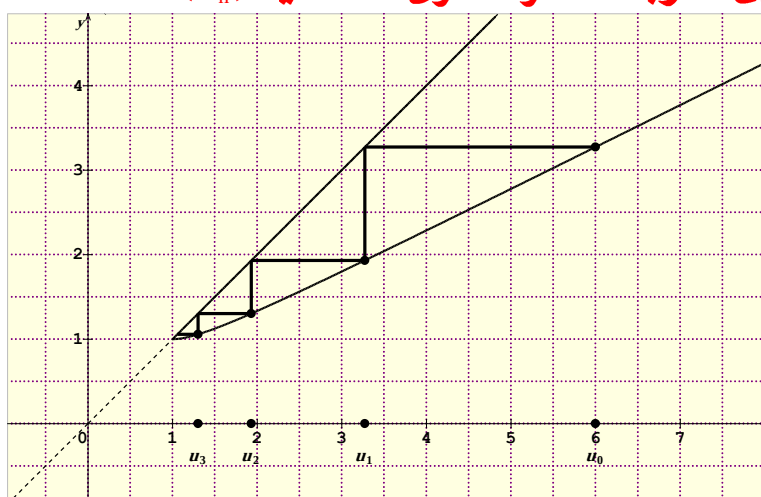
لدينا: $f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2)}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $2x(x-1)$ وهي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$2x(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ومن الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ لأن $2x(x-1) \geq 0$ على هذا المجال.

2- (أ) نقل الشكل وتمثيل الأربعة الحدود الأولى للمتتالية (u_n)



2- (ب) إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نؤمن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو نقطة التقاطع 1

(ج) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $1 \leq u_0 \leq 6$ محققة لأن $u_0 = 6$
 *نفرض أن صحة $P(n)$ أي: $1 \leq u_n \leq 6$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $1 \leq u_{n+1} \leq 6$
 لدينا: $1 \leq u_n \leq 6$ ومنه $f(1) \leq f(u_n) < f(6)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{36}{11}$
 وعليه: $1 \leq u_{n+1} \leq 6$ لأن $\frac{36}{11} < 6$ ومنه الخاصية $1 \leq u_n \leq 6$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

(د) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(-u_n + 1)}{2u_n - 1}$$

$$u_{n+1} - u_n = 0 \text{ معناه } u_n = 0 \text{ أو } u_n = 1$$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب أي اشارة الفرق حسب الجدول

u_n	$-\infty$	0	1	$+\infty$
اشارة الفرق	-	0	+	-
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما

بما أن $1 \leq u_n \leq 6$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

(هـ) تبرير تقارب المتتالية (u_n)

(u_n) متقاربة لأنها متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ من الجواب ب) ومحدودة من الأسفل بـ 1 الجواب جـ)

3) أثبات أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2 وتعيين حدها الأول

(w_n) هندسية أساسها 2 معناه المتتالية $w_{n+1} = 2 \cdot w_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \text{ و } w_n = \ln(v_n)$$

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2 \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2w_n$$

$$\text{والحد الأول هو: } w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\frac{5}{6}$$

(ب) كتابة w_n بدلالة v_n ثم بدلالة n

$$\text{للتتالية } (w_n) \text{ هندسية ومنه من أجل كل } n \in \mathbb{N} : w_n = w_0 \cdot q^n = \ln\frac{5}{6} \cdot (2)^n$$

لدينا: $w_n = \ln(v_n)$ ومنه $v_n = e^{w_n}$ وعليه: $v_n = e^{2^n \ln \frac{5}{6}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$

(ج) تبين أن: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

*لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ ولدينا: $v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n - 1 = -\frac{1}{u_n}$ ومنه $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$ وعليه: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n} = 0$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} = 1$

(4) حساب المجموع S_n بدلالة n

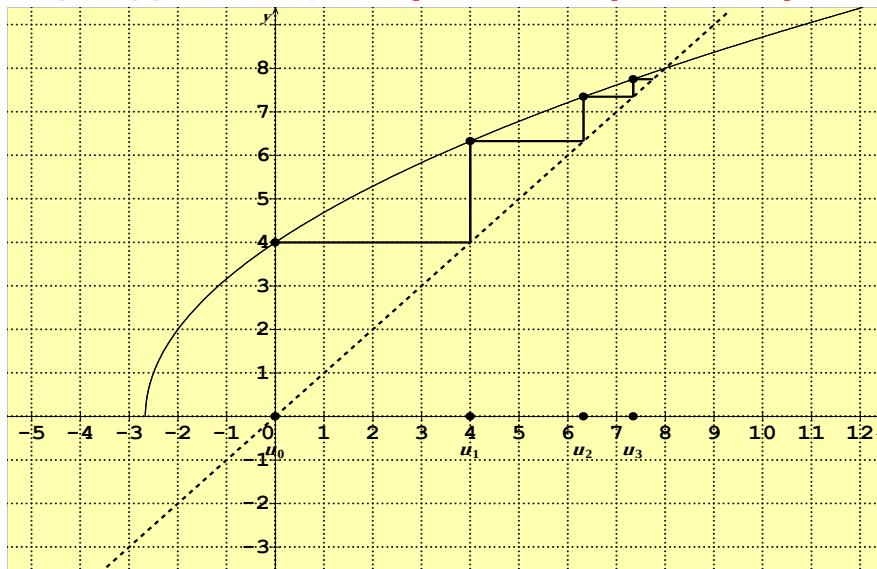
لدينا: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n} = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_0 \cdot q} + \dots + \frac{1}{w_0 \cdot q^n} = \frac{1}{w_0} \left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n} \right]$

نلاحظ أن: $\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n} \right]$ هو مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{q}$

وعليه: $S_n = \frac{1}{w_0} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{q}} \right] = \frac{1}{\ln \frac{5}{6}} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{2}{\ln \frac{5}{6}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$

التمرين 49: دورة 2015 الموضوع (2)

1- (أ) إعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب) وضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربا.

من 1-أ) نَحْن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومقاربة نحو 8

2-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 8$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 < 8$ محققة لأن $u_0 = 0$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 8$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_{n+1} < 8$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 8$ صحيحة

ومنه: $h(0) \leq h(u_n) < h(8)$ لأن الدالة h متزايدة تماماً

أي: $4 \leq u_{n+1} < 8$ إذن $0 \leq u_{n+1} < 8$ لأن المجال $[4; 8[$ محتوًى في المجال $[0; 8[$

ب) تبين أن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6u_n + 16} - u_n = \frac{(\sqrt{6u_n + 16} - u_n)(\sqrt{6u_n + 16} + u_n)}{(\sqrt{6u_n + 16} + u_n)}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{6u_n + 16})^2 - u_n^2}{(\sqrt{6u_n + 16} + u_n)} = \frac{-u_n^2 + 6u_n + 16}{(\sqrt{6u_n + 16} + u_n)}$

تحليل العبارة $-u_n^2 + 6u_n + 16$ هو $(8 - u_n)(u_n + 2)$ وعليه: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$

ج) استنتاج اتجاه تغير (u_n) .

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

من العبارة $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$ نستنتج أن إشارة الفرق هي حسب إشارة الجداء

$(8 - u_n)(u_n + 2)$ وهو حسب الجدول التالي:

u_n	$-\infty$	-2	8	$+\infty$
$(8 - u_n)(u_n + 2)$	$-$	0	$+$	0

وبما أن $0 \leq u_n < 8$ فإن الفرق يكون موجب تماماً

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$

3-أ) تبين أن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

لدينا: $0 \leq u_{n+1} < 8$ ومنه $-8 \leq -u_{n+1} < 0$ أي $0 < 8 - u_{n+1} \leq 8$ ومنه: $0 < 8 - u_{n+1} \leq 8$ (1)

ونبين أيضاً أن $8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$ (2)

$$(2) \text{ تكافئ } 8 - u_{n+1} - \frac{1}{2}(8 - u_n) \leq 0$$

$$\text{لدينا: } 8 - u_{n+1} - \frac{1}{2}(8 - u_n) = 8 + u_n - 2\sqrt{6u_n + 16} = \frac{(8 + u_n)^2 - 4(\sqrt{6u_n + 16})^2}{(8 + u_n + 2\sqrt{6u_n + 16})}$$

$$\text{وبما أن } \frac{(8 + u_n)^2 - 4(\sqrt{6u_n + 16})^2}{(8 + u_n + 2\sqrt{6u_n + 16})} = \frac{u_n^2 - 8u_n}{(8 + u_n + 2\sqrt{6u_n + 16})} = \frac{u_n(u_n - 8)}{(8 + u_n + 2\sqrt{6u_n + 16})}$$

$0 \leq u_n < 8$ فإن الفرق يكون سالب .

من (1) و (2) نستنتج أن: $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب، تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ واستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

من الجواب السابق لدينا: $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.
باستعمال هذه العلاقة نجد:

$$\text{من أجل } n=0 \text{ يكون: } 0 < 8 - u_1 \leq \frac{1}{2}(8 - u_0)$$

$$\text{ومن أجل } n=1 \text{ يكون: } 0 < 8 - u_2 \leq \frac{1}{2}(8 - u_1)$$

.....
.....

$$\text{من أجل } n-1 \text{ يكون: } 0 < 8 - u_n \leq \frac{1}{2}(8 - u_{n-1})$$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $0 < 8 - u_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (8 - u_0)$ ومنه $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$* \text{ باستعمال المتباينة } 0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ وبستعمال } \lim_{n \rightarrow +\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - u_n) = 0 \text{ وعليه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8$$

التمرين 50: دورة 2014 الموضوع (1)

(1) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n .

لدينا: $5^4 \equiv 1[16]$ ، $5^3 \equiv 13[16]$ ، $5^2 \equiv 9[16]$ ، $5^1 \equiv 5[16]$ ، $5^0 \equiv 1[16]$
بواقي قسمة 5^n على 16 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
$5^n \equiv$	1	5	9	13

2- (أ) تبين أن إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $C_n = D_p$

من أجل $p = 4k + 2$ يكون لدينا: $5^{4k+2} \equiv 9 [16]$ أي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق:

$$5^{4k+2} \equiv 16n + 9 \text{ ومنه } C_n = D_p \text{ حيث } C_n = 16n + 9 \text{ و } D_p = 5^p.$$

(ب) تعيين n من أجل $p = 6$.

من أجل $p = 6$ يكون $5^6 \equiv 16n + 9$ وعليه $16n + 9 = 15625$ ومنه $n = 976$.

3 (دراسة تغيرات الدالة f ، ثم استنتاج إشارة $f(x)$).

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{4x} = +\infty$ و لدينا $f(0) = 16$

اتجاه التغير: $f'(x) = 4 \ln 5 \cdot 5^{4x+2} > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	16	$+\infty$

من جدول التغيرات نستنتج ان: $f(x) > 16$ و $f(x) > 0$.

4- (أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 = \frac{5^{(2)} - 9}{16} = 1$ محققة لأن $u_0 = 1$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{5^{(4n+6)} - 9}{16}$ صحيحة

$$u_{n+1} = 5^4 \left[\frac{5^{(4n+2)} - 9}{16} + \frac{9}{16} \right] - \frac{9}{16} = \frac{5^{(4n+2)} \cdot 5^4 - 9 \cdot 5^4}{16} + \frac{9 \cdot 5^4}{16} - \frac{9}{16} = \frac{5^{(4n+6)} - 9}{16} : n \in \mathbb{N}$$

ومنه الخاصية $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن u_n عدد طبيعي.

لدينا: من الجواب 2- أ) $5^{4k+2} \equiv 9 [16]$ ومنه $5^{4k+2} - 9 \equiv 0 [16]$

وعليه: $u_n = \frac{5^{4k+2} - 9}{16} \equiv 0 [16]$ إذن: u_n عدد طبيعي.

5 (استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)).

لدينا: $u_n = \frac{1}{16} f(n)$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً لأن الدالة f متزايدة تماماً مجال تعريفها.

التمرين 51: دورة 2014 الموضوع (2)

I-1- تحدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$.

لدينا: $f(x) - x = -\ln(x-1)$ وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x-1)$
ومنه: $-\ln(x-1) = 0$ معناه $x = 2$ و $-\ln(x-1) < 0$ معناه $x > 2$ و $-\ln(x-1) > 0$ معناه $1 < x < 2$

2- أ- تعيين اتجاه تغير f .

لدينا: $f(x) = x - \ln(x-1)$ ومنه: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

ومنه: $f'(x) = 0$ معناه $x = 2$ و $f'(x) > 0$ معناه $x > 2$ و $f'(x) < 0$ معناه $1 < x < 2$
أي f متزايدة على المجال $[2; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]1; 2]$.

ب- تبين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن: $f(x) \in [2; e+1]$.

لدينا: $x \in [2; e+1]$ ومنه $f(x) \in [f(2); f(e+1)]$ لأن f متزايد تماماً على المجال $[0; +\infty[$
ولدينا: $f(2) = 2 - \ln 3$ و $f(e+1) = e+1 - 1 = e$

ومنه $f(x) \in [2; e+1]$ لأن المجال $[f(2); f(e+1)]$ محتو في المجال $[2; e+1]$.

(II-1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2; e+1]$.

لدينا: من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 \in [2; e+1]$ محققة لأن: $u_0 = e+1$

نفرض أن: $u_n \in [2; e+1]$ ونبرهن أن $u_{n+1} \in [2; e+1]$

لدينا: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$ أي $u_{n+1} = f(u_n)$

ومنه: $u_n \in [2; e+1]$ تعني $f(u_n) \in [f(2); f(e+1)]$ لأن f متزايد تماماً على المجال $[0; +\infty[$
ولدينا: $f(2) = 2 - \ln 3$ و $f(e+1) = e+1 - 1 = e$

ومنه $f(u_n) \in [2; e+1]$ لأن المجال $[f(2); f(e+1)]$ محتو في المجال $[2; e+1]$.

ومنه: $u_n \in [2; e+1]$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدينا: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$ تكافئ $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n - 1) < 0$ لأن $u_n \in [2; e+1]$
وعليه تكون المتتالية (u_n) متناقصة.

(3) تبرير تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

* المتتالية (u_n) مقاربة لأن تحقق الشرطين: متناقصة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2.

* نفرض أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ ومنه: $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell)$ تكافئ $\ln(\ell - 1) = 0$ وعليه: $\ell = 2$.

التمرين 52: دورة 2013 الموضوع (1)

1) تبين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم حساب وحدها الأول

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا: $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\ln \sqrt{\frac{u_n}{e}} + 1) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \ln \frac{u_n}{e} + 1) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \ln u_n - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} v_n$

الحد الأول هو $v_0 = \frac{1}{2} \ln u_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln e^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

(2) كتابة من v_n ، ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

(v_n) هندسية أساسها q معناه $v_n = v_0 \cdot q^n$ وعليه $v_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$ ومنه: $\ln u_n = 2v_n - 1$ وعليه $u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n ، ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 3$

(4) إيجاد بدلالة n الجداء $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n$.

لدينا: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{2v_0 - 1} \times e^{2v_1 - 1} \times \dots \times e^{2v_n - 1} = e^{2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (n+1)} = e^{2(S_n) - (n+1)}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-(n+1)}) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2(S_n) - (n+1)} = 0$

التمرين 53: دورة 2011 الموضوع (1)

1- أثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ و استنتاج أن $u_n > 1$.

لدينا: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $\frac{1}{n(n+2)} > 0$ وعليه $\frac{1}{n(n+2)} + 1 > 1$ ومنه: $u_n > 1$.

2- دراسة اتجاه تغير (u_n) ، وتبيان أنها متقاربة، وحساب نهايتها.

المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن: $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)(n+3)} - 1 - \frac{1}{n(n+2)} = \frac{-2n-3}{n(n+2)(n+1)(n+3)} < 0$

المتتالية متقاربة لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 1 + 0 = 1$$

3- اثبات بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

من أجل $n=1$ يكون لدينا: $P_1 = \frac{2(1)+2}{1+2} = \frac{4}{3}$ محققة لأن: $P_1 = \frac{(1+1)^2}{1+2} = \frac{4}{3}$

نفرض أن: $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$ ونبرهن أن $P_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3}$

لدينا: $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$

$$P_{n+1} = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_{n+1} = P_n \times u_{n+1} = \left(\frac{2n+2}{n+2} \right) \cdot \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} = \frac{2(n+1)(n+2)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2n+4}{n+3}$$

ليكن الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

4- التعبير بدلالة P_n عن S_n .

لدينا: $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ و $v_n = \ln(u_n)$

ومنه: $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n = \ln(u_0 \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n) = \ln(P_n)$

حساب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P_n) = 2 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(P_n) = \ln 2$$

التمرين 54: دورة 2008 الموضوع (1)

I- أ) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

لدينا: f معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \left(\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) = 0^+ \right) \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9}{x+2} = +\infty$$

ب) دراسة اتجاه تغير f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1(x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2} \text{ ومنه } f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$$

$f'(x) = 0$ معناه $(x-1)(x+5) = 0$ أو $x = -5$ مرفوض

$f'(x) < 0$ معناه $(x-1)(x+5) < 0$ معناه $-2 < x < 1$

$f'(x) > 0$ معناه $(x-1)(x+5) > 0$ معناه $x \in]1; +\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	-2	1	$+\infty$
---	----	---	-----------

$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

(ج) تبين أن المستقيم (D): $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) .

المستقيم (D): $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2+5}{x+2} - (x-2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x+2} = 0 \text{ لدينا:}$$

رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D). في الجواب II-أ)

(د) تبين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

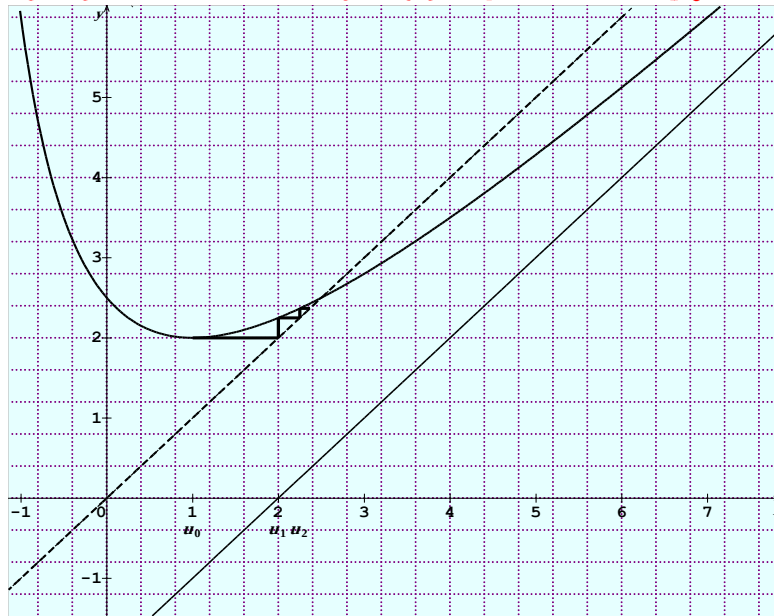
نبين أنه من أجل كل $1 < x < \frac{5}{2}$ فإن $1 < f(x) < \frac{5}{2}$

لدينا من أجل كل $1 < x < \frac{5}{2}$ فإن $f(1) < f(x) < f\left(\frac{5}{2}\right)$ لأن f متزايدة تماماً على المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

ولدينا: $f(1) = 2$ و $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{29}{18}$ ومنه: $2 < f(x) < \frac{29}{18}$ ومنه $1 < f(x) < \frac{5}{2}$

لأن المجال $\left[2; \frac{29}{18}\right]$ محنوى في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$.

II-أ) تمثيل U_0, U_1, U_2 (دون حساباً) على محور الفواصل (التمثيل موجود ضمن المنحنى (C_f))



(ب) تخمين اتجاه وتقارب المتتالية (U_n) .

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية متزايدة ومتقاربة نحو $\frac{5}{2}$.

نعتبر المتتالية العددية (U_n) والمعرفة بـ: $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

(ج) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $1 \leq U_0 \leq \frac{5}{2}$ محققة لأن $U_0 = 1$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{2}$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ صحيحة

ومنه: $f(1) \leq f(U_n) \leq f(\frac{5}{2})$ لأن الدالة f متزايدة تماماً في المجال $[1; \frac{5}{2}]$

ومنه: $2 < f(U_n) < \frac{29}{18}$ ومنه $1 < U_{n+1} < \frac{5}{2}$ لأن المجال $[2; \frac{29}{18}]$ محنوى في المجال $[1; \frac{5}{2}]$.

اثبات ان المتتالية (U_n) متزايدة.

المتتالية (U_n) متزايدة لأن الدالة المرفقة متزايدة تماماً على المجال $[1; \frac{5}{2}]$ و $U_0 < U_1$

استنتاج ان (U_n) متقاربة، ثم حساب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

(U_n) متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{5}{2}$.

نفرض أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$ ونحل المعادلة $f(\alpha) = \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \frac{5}{2} \text{ ومنه } \alpha = \frac{5}{2} \text{ معناه } 2\alpha = 5 \text{ معناه } \frac{\alpha^2 + 5}{\alpha + 2} = \alpha \text{ معناه } f(\alpha) = \alpha$$

التمرين 55: دورة 2008 الموضوع (2)

1-أ- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$.

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \text{ ومنه } f(x) = \frac{2x+3}{x+2} \text{ لدينا: اتجاه التغير: لدينا:}$$

$f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 2]$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	0	2
f'(x)		+
f(x)		$\frac{7}{4}$

ب- إنشاء المنحنى (C) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل (انظر الجواب 2-ب)
ج- البرهان أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن صورة المجال $[0; 2]$ هي المجال $\left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$

ومنه $f(x) \in [0; 2]$ لأن المجال $\left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$ محتوًى في المجال $[0; 2]$.

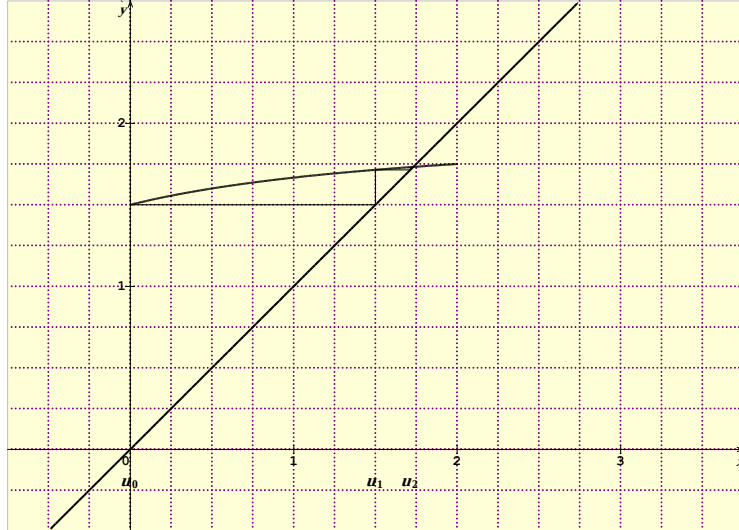
2- تبرير وجود المتتالية (u_n) . احسب u_1 و u_2 .

المتتالية (u_n) موجودة لأنها معرفة بمجدها الأول $u_0 = 0$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ وجميع حدودها تنتمي للمجال $[0; 2]$ وذلك حسب الجواب السابق 1-ج)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{7} \end{array} \right. \quad \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{3}{2} \end{array} \right. \quad \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right. \quad \text{لدينا:}$$

نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

ب- إنشاء المنحنى (C) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل.



ج- وضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من خلال قيم الحدود u_0, u_1, u_2 أو تمثيلها نخمن أن المتتالية متزايدة ومتقاربة نحو نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (D) $y = x$.

3- أ- البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$ محققة لأن $u_0 = 0$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ صحيحة
ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ صحيحة
لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ صحيحة

ومنه: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$ لأن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[0; 2]$

ومنه: $\frac{3}{2} \leq f(u_n) \leq \sqrt{3}$ ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ لأن المجال $\left[\frac{3}{2}; \sqrt{3}\right]$ محتو في المجال $[0; \sqrt{3}]$.

ب- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} > u_n$ والاستنتاج بالنسبة إلى المتتالية (u_n) ..

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} > u_n$ معناه $u_{n+1} - u_n > 0$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3}{u_n + 2} = \frac{-(u_n + \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2}$$

نلاحظ أن: $u_{n+1} - u_n > 0$ لأن البسط موجب تماما والمقام موجب تماما من أجل $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

ج- التحقق أن $(u_{n+1} - \sqrt{3}) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(u_{n+1} - \sqrt{3}) = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3} = \frac{(2 - \sqrt{3})}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})$$

$$\text{ولدينا: } 1 < \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} < 0 \text{ لأن: } \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} < \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه: } (u_{n+1} - \sqrt{3}) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})$$

تعيين عددا حقيقيا k من المجال $[0; 1]$ بحيث: $|(u_{n+1} - \sqrt{3})| \leq k|(u_n - \sqrt{3})|$

$$\text{من المتباينة } (u_{n+1} - \sqrt{3}) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3}) \text{ نجد: } |(u_{n+1} - \sqrt{3})| \leq k|(u_n - \sqrt{3})| \text{ حيث: } k \leq \left| \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} \right|$$

تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ $|(u_n - \sqrt{3})| \leq k^n |(u_0 - \sqrt{3})|$ ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{من المتباينة: } |(u_{n+1} - \sqrt{3})| \leq k|(u_n - \sqrt{3})|$$

$$* \text{لدينا: من أجل } n=0 \text{ نجد: } |(u_1 - \sqrt{3})| \leq k|(u_0 - \sqrt{3})| \text{ ومن أجل } n=1 \text{ نجد: } |(u_2 - \sqrt{3})| \leq k|(u_1 - \sqrt{3})|$$

$$\text{من أجل } n=2 \text{ نجد: } |(u_3 - \sqrt{3})| \leq k|(u_2 - \sqrt{3})| \text{ ومن أجل } n-1 \text{ نجد: } |(u_n - \sqrt{3})| \leq k|(u_{n-1} - \sqrt{3})|$$

$$\text{بضرب هذه المساويات طرف لطرف نجد وبعد التبسيط نجد: } |(u_n - \sqrt{3})| \leq k^n |(u_0 - \sqrt{3})|$$

$$* \text{لدينا مما سبق أن } |(u_n - \sqrt{3})| \leq k^n |(u_0 - \sqrt{3})|$$

$$\text{لدينا: } k \text{ من المجال } [0; 1] \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0 \text{ وعليه } \lim_{n \rightarrow +\infty} |(u_n - \sqrt{3})| = 0 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$$

شعبة الرياضيات

التمرين 56: دورة 2019 الموضوع (12)

1) حل المعادلة $505x - 673y = 1 \dots (E)$.

من الكتابة $(2019 = 3 \times 673 \text{ و } 2020 = 4 \times 505)$ نستنتج ان $(505.4 - 673.3 = 1 \dots (E'))$ وعليه الثنائية $(4; 3)$ حل خاص للمعادلة (E)

لدينا: $\begin{cases} 505x - 673y = 1 \dots (E) \\ 505.4 - 673.3 = 1 \dots (E') \end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $505(x - 4) - 673(y - 3) = 0$

ولدينا: $505(x - 4) - 673(y - 3) = 0 \dots (*)$ تكافئ $505(x - 4) = 673(y - 3)$

$(*)$ تعني أن $673 / 505(x - 4)$ ومنه $673 / (x - 4)$ لأن 367 أولي مع 505 حسب مبرهنة غوص. أي: $x - 4 = 673k$ إذن $x = 673k + 4$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة $(*)$ نجد: $505(673k) = 673(y - 3)$ أي $y = 505k + 3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (673k + 4; 505k + 3)$ حيث k عدد صحيح.

2) تبين أنه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.

x و y من نفس الإشارة معناه $(x; y) = (673k + 4)(505k + 3) = 339865k^2 + 1178k + 12 > 0$ لأن المميز $\Delta < 0$ ومعامل k^2 موجب.

3) كتابة u_α بدلالة α ثم كتابة v_β بدلالة β .

لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$

لدينا $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = 505 \end{cases} \dots (1)$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} - v_n = 673 \end{cases} \dots (2)$

من الجملتين (1) و (2) نستنتج ان:

المتتالية (u_n) حسابية أساسها 505 وحدها الأول 3 وعليه $u_\alpha = u_0 + \alpha r$ أي $u_\alpha = 3 + 505\alpha$

المتتالية (v_n) حسابية أساسها 673 وحدها الأول 4 وعليه $v_\beta = v_0 + \beta r'$ أي $v_\beta = 4 + 673\beta$

4-أ) تبين أن الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

* الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي حدود المتتالية (w_n) وتحقق: $u_\alpha = v_\beta$

$u_\alpha = v_\beta$ تكافئ $3 + 505\alpha = 4 + 673\beta$ وتكافئ $505\beta - 673\alpha = 1$ ومعناه $\alpha = y$ و $\beta = x$

وعليه وحسب الجواب 1) نستنتج أن: $(\beta; \alpha) = (673k + 4; 504k + 3)$ حيث k عدد طبيعي

وعليه الحدود المشتركة هي حدود المتتالية (w_n) حيث: $w_k = 3 + 505(673k + 4) = 339865k + 2023$

** لدينا: $w_{k+1} - w_k = 339865(k + 1) - 339865k = 339865$

وعليه المتتالية (w_n) حسابية أساسها 339865 وحدها الأول 2023

(ب) حساب بدلالة n الجداء P

لدينا: $P = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n$ حيث $X_n = \frac{1}{505} (w_n - 2023)$

$$X_n = \frac{1}{505} (w_n - 2023) = \frac{1}{505} (339192n) = \frac{1}{505} (505 \times 673n) = 673n$$

ومنه: $P = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n = (673)^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = (673)^n \cdot n!$

التمرين 57: دورة 2019 الموضوع (2)

1-أ) التحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

(u_n) متتالية عددية حدودها معرفة بحدّها الأول $u_1 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

$$(\sqrt{u_{n+1}})^2 = (\sqrt{u_n} + 1)^2 \text{ وتكافئ } (\sqrt{u_{n+1}})^2 = (\sqrt{u_n})^2 + 2\sqrt{u_n} + 1 \text{ تكافئ } u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$$

وتكافئ $(\sqrt{u_{n+1}}) = (\sqrt{u_n} + 1)$ أي $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ وهو المطلوب

(ب) استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n.

بوضع : $\sqrt{u_n} = k_n$ فإن $\sqrt{u_{n+1}} = k_{n+1}$ ومنه $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ تكافئ $k_{n+1} - k_n = 1$

ومنه نستنتج أن المتتالية (k_n) حسابية أساسها 1 وحدّها الأول $k_1 = 0$ أي $k_n = n - 1$

وعليه $\sqrt{u_n} = k_n = n - 1$ ومنه $u_n = (n - 1)^2$

2) التحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = n(n - 2) + 1$

لدينا: $u_n = n(n - 2) + 1 = (n - 1)^2$ تكافئ $u_n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$ وهو المطلوب

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها: (n - 2) يقسم (n - 5)

لدينا: (n - 2) يقسم (n - 5) معناه $\frac{n - 5}{n - 2}$ عدد صحيح نسبي

لكن $\frac{n - 5}{n - 2} = 1 - \frac{3}{n - 2}$ ومعناه $\frac{3}{n - 2}$ عدد صحيح نسبي ومعناه ان (n - 2) يقسم 3

(n - 2) يقسم 3 معناه $D_3 = \{-3; -1; 1; 3\}$ ومنه $n \in \{1; 3; 5\}$

4-أ) تبيان أن: $\text{PGCD}(n - 2; u_n) = 1$

لدينا: $u_n = n(n - 2) + 1$ معناه $u_n - n(n - 2) = 1$

معناه وجود ثنائية (1; n) تحقق: $u_n - n(n - 2) = 1$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو $\text{PGCD}(n - 2; u_n) = 1$

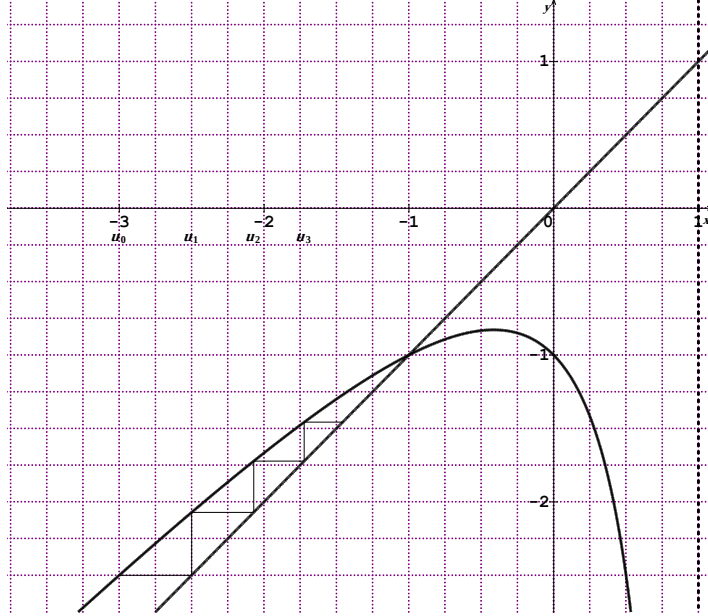
(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: (n - 2)(n^2 + 1) يقسم (n - 5)u_n

لدينا: (n - 2)(n^2 + 1) يقسم (n - 5)u_n و $\text{PGCD}(n - 2; u_n) = 1$ ومنه وحسب مبرهنة غوص

فإن (n - 2) يقسم (n - 5) ومنه $n \in \{1; 3; 5\}$ حسب ما ورد في الجواب 3) لأن $n \geq 2$

التمرين 58: دورة 2018 الموضوع (2)

(1) إعادة رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .



اعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومقاربة نحو نقطة التقاطع -1.

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -3 \leq u_n \leq -1$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون: $-3 \leq u_0 \leq -1$ محققة لأن $u_0 = -3$

*نفرض أن صحة $P(n)$: أي $-3 \leq u_n \leq -1$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $-3 \leq u_{n+1} \leq -1$

لدينا: $-3 \leq u_n \leq -1$ ومنه $f(-3) \leq f(u_n) < f(-1)$ لأن f متزايدة تماماً

ومنه: $-1 \leq u_{n+1} \leq 5$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(-3) = 5$

لكن $-3 \leq u_{n+1} \leq -1$ تكافئ $-3 < 5$ لأن $-3 \leq u_{n+1} \leq -1$

ومنه الخاصية $-3 \leq u_n \leq -1$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

3-أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$ تكافئ $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) \geq 0$

لدينا: $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{(u_n + 3)(u_n + 1)}{4(u_n - 1)} \geq 0$

لأن: $(u_n + 3) > 0$ و $(u_n + 1) < 0$ و $(u_n - 1) < 0$ لأن $-3 \leq u_n \leq -1$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n + 1 \geq -2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

باستعمال المتباينة $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$

من أجل $n=0$: $u_1 + 1 \geq \frac{3}{4}(u_0 + 1)$. ومن أجل $n=1$: $u_2 + 1 \geq \frac{3}{4}(u_1 + 1)$

..... ومن أجل $n-1$: $u_n + 1 \geq \frac{3}{4}(u_{n-1} + 1)$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $u_n + 1 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 + 1)$ أي $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(د) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ولدينا: $-2 \leq u_n + 1 \leq 0$ أي $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n + 1 \leq 0$

لكن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ لأن $\left(\frac{3}{4}\right) < 1$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n + 1) = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -1$

4) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) \leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$

باستعمال المتباينة $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$: $u_0 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$. ومن أجل $n=1$: $u_1 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$

..... ومن أجل $n-1$: $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

بجمع هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $u_n + 1 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 + 1)$

$(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) \geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

نضع: $T_n = \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنه : $T_n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} = 4\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$

$$(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) \geq 8 \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} - 1 \right] \dots (1) \text{ ومنه}$$

ولدينا ايضا: (2) $(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) < 0$ لان $T_n > 0$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن : } 8 \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} - 1 \right] \leq (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) < 0$$

استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$.

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n < -n - 1$ ومنه $(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) < 0$
لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-n - 1) = -\infty$ وعليه $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ حسب مبرهنة الحد من الأعلى.

التمرين 59: دورة 2017 الموضوع (2)

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n : 3u_n = 7^{n+1} - 4$.

(u_n) معرفة بحدّها الأول: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 7u_n + 8$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $3u_0 = 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $3u_n = 7^{n+1} - 4$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 7u_n + 8$ ومنه $3u_{n+1} = 7(3u_n) + 24$

ولدينا من فرضية التراجع $3u_n = 7^{n+1} - 4$ وعليه $3u_{n+1} = 7(7^{n+1} - 4) + 24$

أي $3u_{n+1} = 7 \cdot 7^{n+1} - 28 + 24$ وأخيرا $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

ومنه الخاصية $3u_n = 7^{n+1} - 4$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n .

$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7

$$\text{ومنه: } S_n = 1 \left(\frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} \right) = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

إيجاد علاقة بين S_n و S'_n .

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ولدينا أيضا $3u_n = 7^{n+1} - 4$

ومنه: $3S'_n = 3u_0 + 3u_1 + \dots + 3u_n$

$$\text{أي } 3S'_n = [(7 - 4) + (7^2 - 4) + \dots + (7^{n+1} - 4)] = 7(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n) - 4(n+1)$$

$$\text{إذن } 3S'_n = 7S_n - 4(n+1)$$

ب- استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي $n : 18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

من الجواب السابق لدينا $3S'_n = 7S_n - 4(n+1)$ بضرب طرفي هذه العلاقة في 6 نجد

$$S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{6} \text{ لكن لدينا } 18S'_n = 7(6S_n) - 24(n+1)$$

$$18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31 \text{ إذن } 18S'_n = 7(6 \frac{7^{n+1} - 1}{6}) - 24(n+1) \text{ ومنه}$$

3-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

$$\text{لدينا: } 7^0 \equiv 1[5], 7^1 \equiv 2[5], 7^2 \equiv 4[5], 7^3 \equiv 3[5], 7^4 \equiv 1[5].$$

بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
$7^n \equiv$	1	2	4	3

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلاً للقسمة على 5.

S'_n قابلاً للقسمة على 5 معناه $S'_n \equiv 0[5]$ تكافئ $18S'_n \equiv 0[5]$ (ضرب الطرفين في 18)

$$\text{وتكافئ } 7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5] \text{ وتكافئ } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$$

لتعيين قيم العدد الطبيعي نميز عدة حالات هي:

$$(1) \quad n = 4k \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 3[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 12 \quad (k' \in \mathbb{N})$$

$$(2) \quad n = 4k + 1 \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 3[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 13 \quad (k' \in \mathbb{N})$$

$$(3) \quad n = 4k + 2 \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 2[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 10 \quad (k' \in \mathbb{N})$$

$$(4) \quad n = 4k + 3 \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 4[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 19 \quad (k' \in \mathbb{N})$$

التمرين 60: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكية

1-أ) تبين أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

لدينا المتتالية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

لإثبات $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n نستعمل البرهان بالتراجع

*التحقق من صحة $P(0)$

$$\text{من أجل } n=0 \text{ يكون لدينا: } u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0 \text{ محققة لأن } u_0 = 0$$

$$\text{*نفرض أن } P(n) \text{ صحيحة أي: } u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

$$\text{ونبرهن أن } P(n+1) \text{ صحيحة أي: } u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = 4u_n + 1 \text{ لكن } u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1) \text{ من فرضية التراجع}$$

$$u_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot 4^n - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3} \cdot 4^{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1) \text{ أي } u_{n+1} = 4 \left(\frac{1}{3}(4^n - 1) \right) + 1 \text{ ومنه:}$$

ومنه الخاصية $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

**ب) التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما
تذكير: مبرهنة بيزو:**

العددين a و b أوليان فيما بينهما معناه وجود ثنائية $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $ax_0 + by_0 = 1$

لدينا: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ تكافئ $u_{n+1} - 4u_n = 1$

الثنائية $(1; -4)$ تحقق المعادلة: $u_{n+1} - 4u_n = 1$ معناه العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

2-أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول v_0

المتتالية (v_n) هندسية أساسها q معناه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q \cdot v_n$.

لدينا: المتتالية (v_n) معرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4(u_n + \frac{1}{3}) = 4v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ب) التعبير بدلالة n عن المجموع S_n

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

$$S_n = v_0 \left[\frac{q^{3n+1} - 1}{q - 1} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{(4)^{3n+1} - 1}{4 - 1} \right] = \frac{1}{9} (4^{3n+1} - 1) \text{ ومنه:}$$

3) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$

لدينا: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ومنه لدينا: $3u_n = 4^n - 1$ ومنه أيضا: $3u_{n+1} = 4^{n+1} - 1$

وعليه $\text{PGCD}(3u_{n+1}; 3u_n) = 3\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n)$ خاصية

ومنه: $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1; 4^n - 1) = 3 \cdot 1 = 3$ لأن $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = 1$ حسب 1-ب)

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

لدينا: $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$4^n \equiv$	1	4	2

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n

لدينا: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$

$A_n \equiv 0[7]$ يقبل القسمة على 7 معناه

$$9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7] \text{ معناه } A_n \equiv 0[7]$$

لدينا: $9S_n = (4^{3n+1} - 1)$ ومنه $9S_n \equiv 3[7]$ لأن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$

ولدينا كذلك: $3^{6n+4} \equiv [(-4)^2]^{3n+2} [7] \equiv 4[7]$ أي $3^{6n+4} \equiv 4[7]$

نسنتج أن: $9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$ تكافئ $3 - 6n - 4 \equiv 0[7]$ أي $6n \equiv 6[7]$

وأخيرا $n \equiv 1[7]$ لأن 6 أولي مع 7 إذن: $n = 7p + 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

التمرين 61: دورة 2016 الموضوع (1)

1) حساب u_1 و u_2 واستنتاج الأساس q

لدينا: (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها حيث:
$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u_1) \cdot (u_2) = e^{11} \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases} \text{ الجملته } \begin{cases} \ln(u_1) \cdot (u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

الحدان u_1 و u_2 هما حلل المعادلة: $x^2 - Sx + P = 0$ حيث: $S = e^4(1 + e^3)$ و $P = e^{11}$

حلول المعادلة $x^2 - Sx + P = 0$ هما: $x = u_1 = e^4$ أو $x' = u_2 = e^7$.

*لدينا: $u_2 = q \cdot u_1$ ومنه: $q = \frac{u_2}{u_1} = e^3$

2- أ) التعبير عن u_n بدلالة n

لدينا $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ ومنه: $u_n = e^4 (e^3)^{n-1} = e^{3n+1}$

ب) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$

$$S_n = \ln(u_0) \cdot (u_1) \cdot \dots \cdot (u_n) = \ln \left[(u_0)^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] = (n+1) \ln((u_0) \cdot q^{\frac{n}{2}})$$

تطبيق عددي: لدينا: $u_0 = e$ و $q = e^3$ ومنه: $S_n = (n+1) \ln((e) \cdot e^{\frac{3n}{2}}) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$

3- أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

لدينا: $a_n = n + 3$ و $2S_n = (n+1)(3n+2) = 3n^2 + 5n + 2$

يمكن كتابة $2S_n - a_n(3n-4) = 14$ ومنه: $2S_n = (n+3)(3n-4) + 14 = a_n(3n-4) + 14$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

ب) تعيين القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

من الجواب السابق لدينا: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

ومنه $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$ هي قواسم العدد 14 وهي 1، 2، 7 و 14

(ج) **تعين قيم العدد الطبيعي بحيث:** $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$ معناه $\text{PGCD}(a_n; 14) = 7$ ومعناه $n = 14k + 4$ مع $n \in \mathbb{N}$

(4) **دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.**

دورها 3 وحسب الجدول المقابل $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$2^n \equiv$	1	2	4

(5) **تعين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون:** $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

لدينا: $b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 = 3n^2 + 9 - (3n^2 + 5n + 2) + 1437^{2016} + 1$

ولدينا: $1437^{2016} \equiv 2^{2016}[7] \equiv 1[7]$ لأن: $1437 \equiv 2[7]$ و $2016 \equiv 1[3]$

وعليه: $b_n \equiv -5n + 9[7]$ أي $5n - 9 \equiv 0[7]$ وتكافئ $15n \equiv 6[7]$ أي $n \equiv 6[7]$

ومنه: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 5n \equiv 0[35] \\ 7n \equiv 0[35] \end{cases}$ بالطرح نجد $2n \equiv 0[35]$

أي $n \equiv 0[35]$ وأخيرا $n = 35k'$ حيث k' عدد طبيعي.

(6) **تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:** $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7

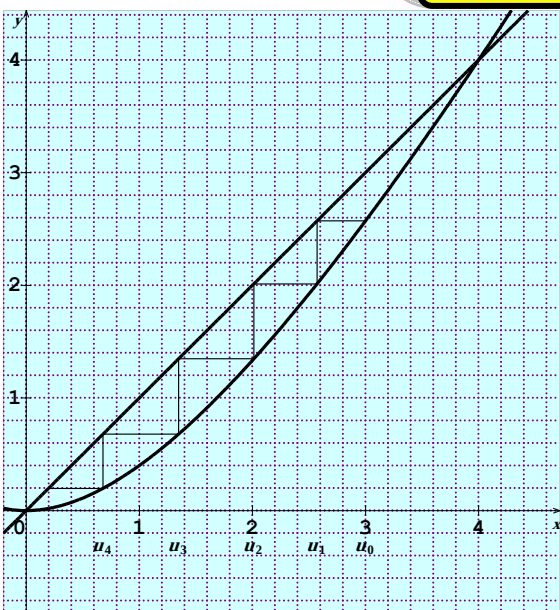
العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$ معناه $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

لدينا: $1437^{9n+1} \equiv (2^{3n})^3 \cdot 2 \equiv 2[7]$ و $4^{12n+1} \equiv (4^{3n})^4 \times 4 \equiv 4[7]$ و $52 \equiv 3[7]$

وعليه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 3 \cdot 4 + 3[7] = -7[7]$ ومنه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv -7[7]$

أي: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

التمرين 62: دورة 2014 الموضوع (1)



(1) **تبيان ان الدالة f متزايدة تماما.**

f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

f متزايدة تماما معناه من أجل كل

$x \in [0; +\infty[$ من أجل كل $f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{4x(x+4) - 2x^2}{(x+4)^2} = \frac{2x(x+8)}{(x+4)^2}$$

$f'(x) > 0$ لأن $x \in [0; +\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.

(2-أ) **تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 على حامل**

(ب) **وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.**

تخمن ان المتتالية متناقصة تماما ومقاربة نحو 0
(3) أ، البرهان بالتراجع أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$.

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون: $0 \leq u_0 \leq 3$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \leq u_n \leq 3$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا: $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{18}{7}$

وعليه: $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ لأن $\frac{18}{7} < 3$ ومنه الخاصية $0 \leq u_n \leq 3$ صحيحة .

(ب) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) متناقصة معناه $u_{n+1} \leq u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4}$$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $u_n^2 - 4u_n$ لأن المقام موجب

$u_n^2 - 4u_n = 0$ معناه $u_n = 4$ أو $u_n = 0$ وعليه اشارة $-u_n^2 + 2u_n + 8$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	4	$+\infty$
اشارة الفرق	-	0	+
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما

بأن $0 \leq u_n \leq 3$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

(ج) استنتاج أن (u_n) مقاربة.

المتتالية (u_n) مقاربة لأنها متناقصة تماما من الجواب 3-ب) ومحدودة من الأسفل من الجواب 3-أ).

(4) أ، دراسة إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$.

$$\text{لدينا: } 7u_{n+1} - 6u_n = \frac{14u_n^2}{u_n + 4} - 6u_n = \frac{8u_n(u_n - 3)}{u_n + 4}$$

اشارة $7u_{n+1} - 6u_n$ هي حسب اشارة البسط $u_n(u_n - 3)$ لأن المقام موجب

$u_n(u_n - 3) = 0$ معناه $u_n = 3$ أو $u_n = 0$ وعليه اشارة $7u_{n+1} - 6u_n$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	3	$+\infty$
اشارة $7u_{n+1} - 6u_n$	-	0	+

من الجدول نستنتج أن $7u_{n+1} - 6u_n < 0$ لأن $0 \leq u_n \leq 3$

* ستننتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

من الجواب السابق لدينا: $7u_{n+1} - 6u_n < 0$ وتكافئ $u_{n+1} < \frac{6}{7}u_n$ ولدينا: $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ (2) من المتباينتين (1) و (2) نستنتج أن: $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.

ب) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $0 \leq u_0 \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^0 = 3$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

لدينا: $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ تكافئ $0 \leq \frac{6}{7}u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ وذلك بعد ضرب الطرفين في $\frac{6}{7}$

لكن $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$ ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

ومنه الخاصية $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ من اجل كل عدد طبيعي n .

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا: $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ولدينا أيضا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

التمرين 63: دورة 2012 الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 16$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6u_n - 9$

1- أ) احسب بواقى قسمة كل من الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 على 7.

لدينا: $u_0 = 16$ و $u_{n+1} = 6u_n - 9$

ومنه: $u_0 = 16 \equiv 2[7]$, $u_1 = 6u_0 - 9 \equiv 3[7]$, $u_2 = 6u_1 - 9 \equiv 2[7]$ و $u_4 = 6u_3 - 9 \equiv 3[7]$

ب) تخمين قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

من الجواب السابق نضمن أن $u_{2k} \equiv 2[7]$ و $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

2- أ) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n : $u_{n+2} \equiv u_n[7]$.

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $u_2 \equiv u_0[7]$ محققة لأن $u_2 \equiv 2[7]$ و $u_0 \equiv 2[7]$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+3} \equiv u_{n+1} [7]$
لدينا: $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 9 = 6(6u_{n+1} - 9) - 9 = 36u_{n+1} - 63$ ومنه $u_{n+1} = 6u_n - 9$
لكن $36 \equiv 1 [7]$ و $63 \equiv 0 [7]$ ومنه $u_{n+3} \equiv u_{n+1} [7]$.
ب) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2 [7]$.
• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $k=0$ يكون لدينا: $u_0 \equiv 2 [7]$ محققة
*نفرض أن $P(k)$ صحيحة أي: $u_{2k} \equiv 2 [7]$ و ونبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة أي: $u_{2k+2} \equiv 2 [7]$
من الجواب السابق لدينا: $u_{n+2} \equiv u_n [7]$ من اجل كل عدد طبيعي n
ومنه $u_{2k+2} \equiv u_{2k} [7]$ وذلك بوضع $n=2k$
ومن فرضية التراجع لدينا: $u_{2k} \equiv 2 [7]$ ومنه $u_{2k+2} \equiv 2 [7]$
ومنه الخاصية $u_{2k} \equiv 2 [7]$ صحيحة من كل عدد طبيعي k .
استنتاج أن: $u_{2k+1} \equiv 3 [7]$

لدينا: $u_{2k+1} = 6u_{2k} - 9$ ومنه $u_{n+1} = 6u_n - 9$
ومنه $u_{2k+1} \equiv 6(2) - 9 [7] \equiv 3 [7]$ لأن $u_{2k} \equiv 2 [7]$ وعليه $u_{2k+1} \equiv 3 [7]$.
3- أ- تبين أن المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$
المتتالية (v_n) هندسية معناه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = q.v_n$
لدينا: $v_n = u_n - \frac{9}{5}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{54}{5} = 6(u_n - \frac{9}{5}) = 6v_n$
ومنه (v_n) هندسية أساسها 6 وحدها الأول هو $v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \frac{71}{5}$
ب- حساب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث:
حساب بدلالة n عبارة u_n

لدينا: $v_n = u_n - \frac{9}{5}$ ومنه $u_n = v_n + \frac{9}{5} = q^n.v_0 + \frac{9}{5} = \frac{71}{5} \cdot (6)^n + \frac{9}{5}$
حساب بدلالة n عبارة S_n

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + \frac{9}{5}) + (v_1 + \frac{9}{5}) + \dots + (v_n + \frac{9}{5}) = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{9}{5}(n+1)$

ولدينا من أخرى $(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = v_0 \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

تطبيق عددي: $S_n = \frac{71}{5} \left[\frac{6^{n+1} - 1}{5 - 1} \right] + \frac{9}{5}(n+1) = 71 \left[\frac{6^{n+1} - 1}{25} \right] + \frac{9}{5}(n+1)$

1- تعيين الحدين u_3 و u_5 .

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3; u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3; u_5) \end{cases} \text{ حيث } \begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

نعلم أن : $d = \text{PGCD}(u_3; u_5)$ معناه $u_3 = d.u'_3$ و $u_5 = d.u'_5$ حيث $\text{PGCD}(u'_3; u'_5) = 1$ ونعلم أن : $m.d = u_3.u_5$ ومعناه $m = d.u'_3.u'_5$

$$\text{وعليه: } m + d = 42 \text{ تكافئ (1) } u'_3.u'_5 + 1 = \frac{42}{d} \dots$$

ولدينا: u_3, u_4, u_5 حدود متعاقبة لمتتالية حسابية متزايدة تماما زمعناه $u_5 + u_3 = 2u_4$ خاصة

$$\text{ومنه : } u_5 + u_3 = 2u_4 \text{ تكافئ (2) } u'_3 + u'_5 = \frac{30}{d} \dots$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن d يقسم كلا من 30 و 42 أي $d \in D_6 = \{1; 2; 3; 6\}$ نلاحظ أن الحالة الوحيدة التي تحقق الجملة المكونة من العلاقتين (1) و (2) هي من أجل: $d = 6$ من أجل $d = 6$ يكون لدينا: $u'_3.u'_5 = 6$ و $u'_3 + u'_5 = 5$ وفي هذه الحالة نجد: $u'_3 = 2$ و $u'_5 = 3$ وعليه يكون لدينا: $u_3 = 12$ و $u_5 = 18$.

استنتج u_0 .

(u_n) متتالية حسابية معناه $u_3 = u_0 + 3r$ حيث $u_4 - u_3 = r = 3$ وعليه $u_0 = u_3 - 3r = 3$

2- كتابة u_n بدلالة n .

نعلم انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + n.r$ ومنه $u_n = 3 + 3n$

تبيان أن: 2010 حد من حدود (u_n) وتعين رتبته.

2010 حد من حدود (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $u_n = 2010$

$$u_n = 2010 \text{ يكافئ } 2010 = 3n + 3 \text{ ومنه } n = 669$$

لدينا: $n = 669$ تعني أن $u_{669} = 2010$ ومنه الحد 2010 رتبته 670.

3- تعيين الحد الذي إبتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080.

نفرض ان الحد هو u_p

$$\text{مجموع 5 حدود متعاقبة من } (u_n) \text{ يساوي 10080 معناه } \frac{5}{2}(u_p + u_{p+4}) = 10080$$

$$\text{ولدينا: } u_{p+4} = u_p + 4r \text{ ومنه } \frac{5}{2}(u_p + u_{p+4}) = 10080 \text{ تكافئ } \frac{5}{2}(2u_p + 4r) = 10080$$

$$\text{ومنه : } u_p = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5}(10080) - 4r \right] \text{ وبعد تعويض } r = 3 \text{ نجد } u_p = 2010$$

4-أ- احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2n}$

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n}) = \frac{2n+1}{2}(6n+6) = 3(2n+1)(n+1)$

ب- استنتاج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2

لدينا: $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 \dots + u_{2n} = u_0 + (u_0 + 2r) + (u_0 + 4r) \dots + (u_0 + 2nr)$

ومنه S_1 هو مجموع متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها $2r$

وعليه: $S_1 = \frac{n+1}{2}(2u_0 + 2nr) = 3(n+1)^2$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_4 \dots + u_{2n-1} = S - S_1 = 3n(n+1)$

التمرين 65: دورة 2009 الموضوع (1)

1-أ) دراسة تغيرات الدالة f .

الدالة f على المجال $[1, 5]$ ب: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$

اتجاه التغير: من أجل كل عدد حقيقي من x من المجال $[1, 5]$: $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{5}{x^2}) = \frac{x^2 - 5}{2x^2}$

$f'(x) = 0$ معناه $x^2 - 5 = 0$ ومعناه $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$ مرفوض

$f'(x) < 0$ معناه $x \in [1; \sqrt{5}[$ و $f'(x) > 0$ معناه $x \in]\sqrt{5}; 5]$

جدول التغيرات

x	1	$\sqrt{5}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	3	$\sqrt{5}$	3

ب) إنشاء (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

2-أ) حساب u_1 و u_2 .

(u_n) المتتالية المعرفة ب: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n})$ و $u_0 = 5$

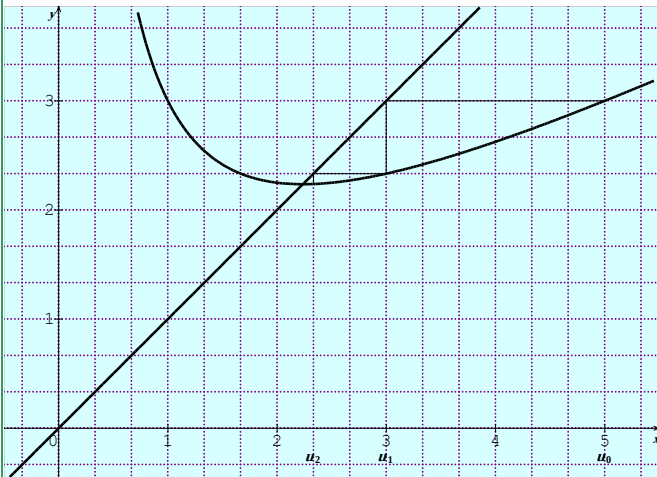
ومنه: $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + \frac{5}{u_0}) = 3$ و $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + \frac{5}{u_1}) = \frac{7}{3}$

تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل.

3-أ- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq \sqrt{5}$

• التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون: $u_0 \geq \sqrt{5}$ محققة لأن $u_0 = 5$



إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n \geq \sqrt{5}$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$

لدينا: $u_n \geq \sqrt{5}$ ومنه $f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ لأن f متزايدة على المجال $[\sqrt{5}; 5[$

$f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ تكافئ $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

ومنه الخاصية $u_n \geq \sqrt{5}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب-تبيان أن (u_n) متناقصة تماما، ولأستنتاج بالنسبة لتقاربها

(u_n) متناقصة تماما معناه $u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n}) - u_n = \frac{1}{2}(-u_n + \frac{5}{u_n}) = \frac{1}{2}(\frac{-u_n^2 + 5}{u_n})$

لدينا: الفرق $\frac{1}{2}(\frac{-u_n^2 + 5}{u_n}) < 0$ لأن $u_n \geq \sqrt{5}$ ومنه (u_n) متناقصة تماما.

نستنتج مما سبق أن المتتالية متقاربة لأنها محدودة من الأسفل ومتناقصة.

4) أ- البرهان أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

لدينا: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$ تكافئ $(u_{n+1} - \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5}) \leq 0$

لدينا: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n}) - \frac{1}{2}u_n - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2u_n} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - u_n)}{2u_n}$

وبما أن $u_n \geq \sqrt{5}$ فإن $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - u_n)}{2u_n} \leq 0$ ومنه $(u_{n+1} - \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5}) \leq 0$

ب- استنتاج أن $(u_n - \sqrt{5}) \leq (\frac{1}{2})^n (u_0 - \sqrt{5})$ وتعيين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

*لدينا من الجواب السابق : مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $(u_1 - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_0 - \sqrt{5})$

من أجل $n=1$ يكون لدينا: $(u_2 - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_1 - \sqrt{5})$ ومن أجل $n=3$ يكون لدينا: $(u_3 - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_2 - \sqrt{5})$

.....

من أجل $n-2$ يكون لدينا: $(u_{n-1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_{n-2} - \sqrt{5})$

من أجل $n-1$ يكون لدينا: $(u_n - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{5})$

بعد ضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$

* لدينا: $0 \leq (u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$ ولدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5}) = 0$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{5}) = 0$ حسب مبرهنة الحصر ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{5}$

التمرين 66: دورة 2009 الموضوع (2)

1- تعيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، و حساب أساسها وحدّها الأول.

المتتالية (v_n) هندسية معناه $v_{n+1} = q.v_n$ حيث q عدد ثابت

لدينا: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3u_n + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$

ومنه: (1) $v_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$

من العلاقة $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ نجد: $u_n = v_n - \alpha n - \beta$

بعد تعويض قيمة $u_n = v_n - \alpha n - \beta$ في العبارة (1) نجد:

$$v_{n+1} = 3v_n - 3\alpha n - 3\beta + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta = 3v_n + 2(1 - \alpha)n - 2\beta + 1$$

نلاحظ أنه تكون المتتالية (v_n) هندسية معناه $-2(\alpha - 1) - 2\beta + \alpha + 1 = 0$

ومنه: $\alpha - 1 = 0$ و $-2\beta + \alpha + 1 = 0$ ومنه $\alpha = 1$ و $\beta = 1$

حساب أساسها وحدّها الأول.

من أجل $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ يكون لدينا: $v_{n+1} = 3.v_n$

ومنه الأساس هو 3 والحد الأول هو: $v_0 = u_0 + 1.0 + 1 = 1$

2- حساب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

المتتالية (v_n) هندسية معناه $v_n = v_0.q^n = 1.(3)^n$

لدينا: $u_n = v_n - n - 1 = (3)^n - n - 1$

3- حساب المجموعين S و S' .

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right] = 1. \left[\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \right] = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

لدينا: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ولدينا: $u_n = v_n - n - 1$

ومنه: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n - (0 + 1 + 2 + \dots + n) - (n + 1) = S - (n + 1)(n + 2)$

4- أ- تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 5.

$$3^0 \equiv 1[5], 3^1 \equiv 3[5], 3^2 \equiv 4[5], 3^3 \equiv 2[5], 3^4 \equiv 1[5]$$

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وهي حسب الجدول التالي

n	4k	4k + 1	4k + 2	4k + 3	
$3^n \equiv$	1	3	4	2	

ب- تعين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها u_n مضاعف للعدد 5.

$$u_n \text{ مضاعف للعدد 5 معناه } (3)^n - n - 1 \equiv 0 [5] \text{ وتكافئ } (3)^n - n \equiv 1 [5]$$

نميز الحالات التالية:

- (1) $n = 4k$ معناه $-4k \equiv 0 [5]$ أي $k \equiv 0 [5]$ أي $k = 5p$ وعليه $n = 20p$ حيث p عدد طبيعي
- (2) $n = 4k + 1$ معناه $k \equiv 4 [5]$ أي $n = 20p + 17$
- (3) $n = 4k + 2$ معناه $k \equiv 4 [5]$ أي $n = 20p + 18$
- (4) $n = 4k + 3$ معناه $k \equiv 2 [5]$ أي $n = 20p + 11$

التمرين 67: دورة 2008 الموضوع (1)

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسياً.

f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = +\infty$$

نقول ان الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مماساً يوازي حامل محور الترتيب معادلته: $x = 1$

- دراسة تغيرات الدالة f .

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$$

اتجاه التغير: الدالة قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ حيث: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$

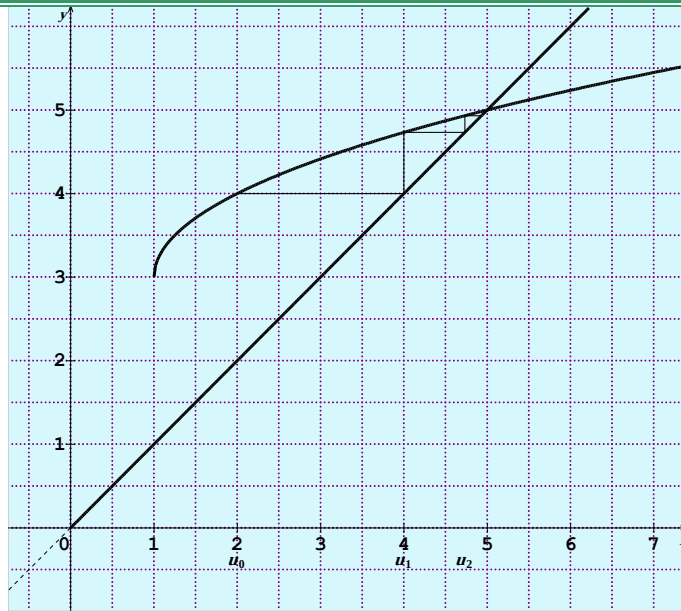
الدالة f متزايدة تماماً على $[1; +\infty[$ لأن: $f'(x) > 0$

جدول التغيرات:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	3	$+\infty$

- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " انشاء (C_f)

رسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$



2-أ) باستعمال (D) و (C_f) تمثيل u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل (انظر الشكل أعلاه)
 ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من خلال التمثيل السابق نحمن ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و مقاربة نحو 5

3-أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 \leq u_n \leq 5$

• التحقق من صحة $P(1)$

من اجل $n=1$ يكون لدينا: $2 \leq u_1 \leq 5$ محققة لأن $u_1 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $2 \leq u_n \leq 5$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $2 \leq u_{n+1} \leq 5$

لدينا: $2 \leq u_n \leq 5$ ومنه $f(2) \leq f(u_n) \leq f(5)$ لأن f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$

$f(2) \leq f(u_n) \leq f(5)$ تكافئ $4 \leq u_{n+1} \leq 5$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(2) = 4$ و $f(5) = 5$

ولدينا: $4 \leq u_{n+1} \leq 5$ تكافئ $2 \leq u_{n+1} \leq 5$ لأن: المجال $[4; 5]$ محتو في المجال $[2; 5]$

ومنه الخاصية : $2 \leq u_n \leq 5$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} > u_n$

• التحقق من صحة $P(1)$

من اجل $n=1$ يكون لدينا: $u_2 > u_1$ محققة لأن $u_1 = 3$ و $u_2 = f(u_1) = 4$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_{n+1} > u_n$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+2} > u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} > u_n$ ومنه $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ لأن f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$ تكافئ $u_{n+2} > u_{n+1}$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

ومنه الخاصية : $u_{n+1} > u_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة . وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $u_{n+1} > u_n$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^$ ومعناه (u_n) متتالية متزايدة
 $2 \leq u_n \leq 5$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ معناه (u_n) متتالية محدودة من الأعلى بـ 5
 نستنتج مما سبق ان المتتالية متقاربة.

• بما أن المتتالية متقاربة لنفرض أن نهايتها هي α أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$
 لدينا: $f(u_n) = u_{n+1}$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$ ومنه $3 + \sqrt{\alpha - 1} = \alpha$

$3 + \sqrt{\alpha - 1} = \alpha$ تكافئ $\sqrt{\alpha - 1} = \alpha - 3$ وتكافئ $\alpha - 1 = (\alpha - 3)^2$ حيث $\alpha \geq 3$
 ومنه: $\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$ وحلولها هما: $\alpha = 5$ أو $\alpha = 2$ مرفوض إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

التمرين 68: دورة 2008 الموضوع (1)

(1) حساب u_1, u_2, u_3 .

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ و $u_0 = 2$

ومنه: $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{7}{3}$, $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{16}{9}$ و $u_3 = \frac{2}{3}u_2 + 1 = \frac{81}{27}$

2- البرهان بالتراجع أن (v_n) ثابتة، استنتج عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا: (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نعلم ان: (v_n) ثابتة معناه $v_{n+1} = v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

• التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون $v_1 = v_0$ لأن: $v_1 = u_1 + \left(\frac{2}{3}\right) = v_0 = u_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $v_{n+1} = v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $v_{n+2} = v_{n+1}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ و $v_{n+2} = u_{n+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

ومنه: $v_{n+1} = v_n$ لأن: $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{2}{3} \left[u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] - \frac{2}{3} \left[u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \frac{2}{3} (v_{n+1} - v_n) = 0$

لدينا: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $u_n = v_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = v_0 = 3$

لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0 = 3$ لان المتتالية (v_n) ثابتة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

3- حساب المجموع: $S = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

لدينا: (w_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\text{ومنه: } S = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n = \frac{2}{3}(0+1+2+\dots+n) - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

نعلم أن: $(0+1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالي حسابية

$$\text{مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية } \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \cdot \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1} \right] = -3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$\text{ومنه: } S = \frac{1}{3} \left[n^2 + n + 6 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3 \right]$$