



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

1

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 21

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

2 بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

3 ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

4 بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.

6 مثل بيانياً المنحني (C_f) .

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + \ln(x + 1)] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x + 1)] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\
&= -1 - \frac{-\infty}{0^+} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$.

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\
&= +\infty - 0 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

(2) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مقائل بجوار $+\infty$.

(3) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ):

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
-\ln(x+1) = 0 &\Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0 \\
&\Rightarrow x+1 = 1 \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

- المنحني (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.
- المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $O(0; 0)$.

• المنحني (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$.

(4) تبين أنه من أجل كل x من المجال $] -1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 + 2x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(5) تبين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(2x + 2 + \frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^4} \\ &= \frac{\left(2(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2(x+1)^2 + 1 - 2x^2 + 4x + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$3 - 2\ln(x+1) = 0 \Rightarrow 2\ln(x+1) = 3$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x+1 = e^{\frac{3}{2}}$$

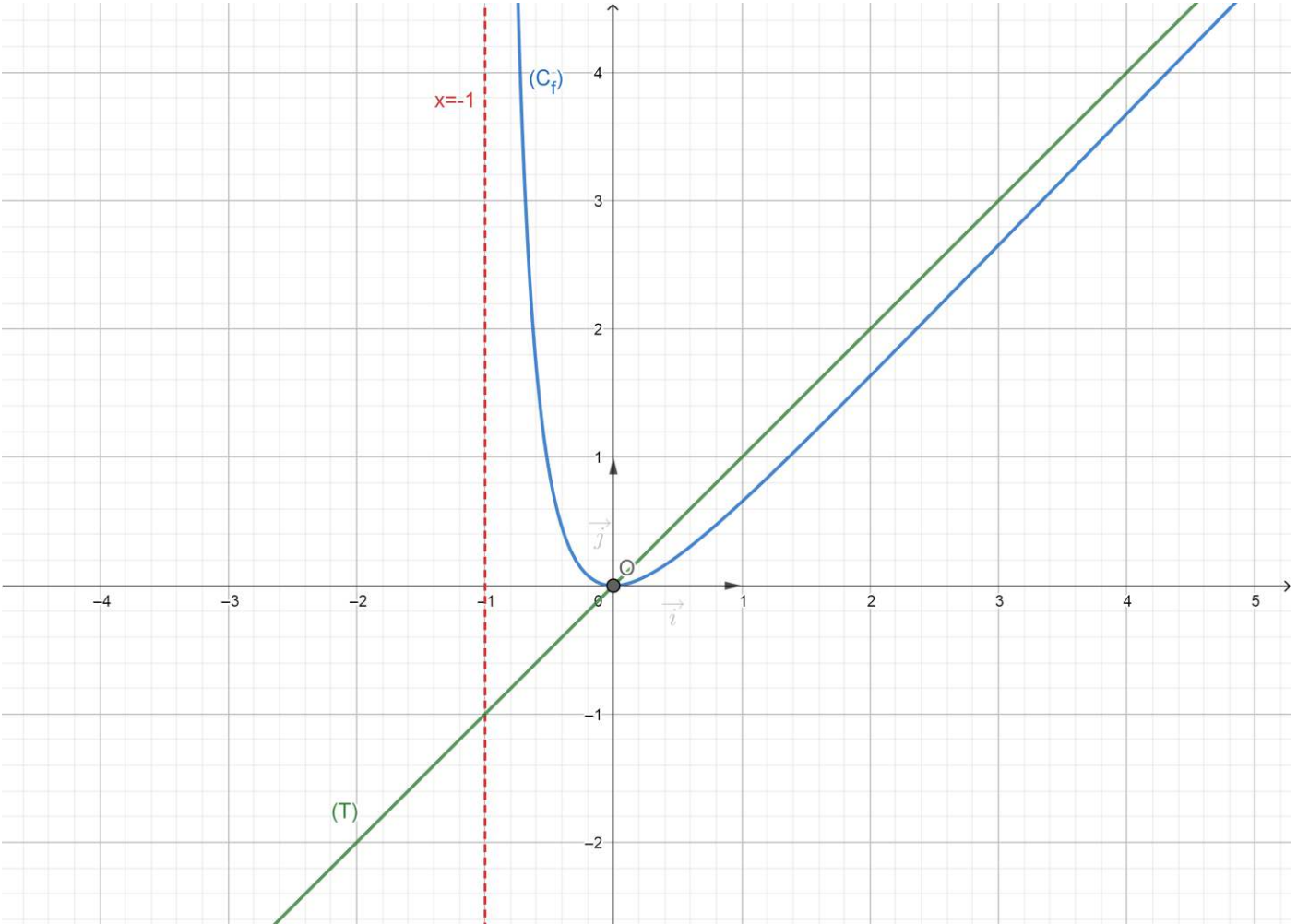
$$\Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير إشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e^{\frac{3}{2}} - 1$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶