

النهايات

نهايات الدوال المرجعية

$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$	$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\star \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$	$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$
$\star \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$	$\star \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\star \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
	$\star \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\star \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$	$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

العمليات على النهايات : f و g دالتان a , عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ نقبل بدون برهان المبرهنات التالية :

[1] $\blacklozenge$ نهاية مجموع دالتين :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح لى نه	$-\infty$

[2] $\blacklozenge$ نهاية جداء دالتين :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح لى نه	ح لى نه

[2] $\blacklozenge$ نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح لى نه	ح لى نه	ح لى نه	ح لى نه	ح لى نه

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

$\star$ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.
$\star$ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

المستقيمات المتقاربة : a و b عددا حقيقيان f دالة معرفة على مجال I و C_f تمثيلها البياني في معلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

- المستقيم ذو المعادلة $x = a$ و الموازي لمحور الترتيب مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .
- المستقيم ذو المعادلة $y = b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

✚ دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب المائل (Δ) :

♣ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$ و نميز الحالات التالية :
♣ إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)
♣ إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)
♣ إذا كان $f(x) - (ax + b) = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A(x_0; f(x_0))$

✚ ملاحظة إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربين عند المالانهاية .

✚ النهايات والصرأ بالمقارنة: f, g, h دوال و 1 عدد حقيقي

♣ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
♣ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
♣ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

✚ نهاية دالة مركبة:

♣ a, b, c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ و $-\infty$. h و g, f دوال حيث $h = g \circ f$
♣ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = c$

✚ تدكير حول بعض المفاهيم:

[1] ♣ الدالة f زوجية معناه: $f(-x) = f(x)$ متناظر بالنسبة لمحور الترتيب
[2] ♣ الدالة f فردية معناه: $f(-x) = -f(x)$ متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم
[3] ♣ $w(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه :
♦ من أجل كل x من D_f فإن $(2\alpha - x) \in D_f$ و $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$
[4] ♣ $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) معناه :
♦ من أجل كل x من D_f فإن $(2\alpha - x) \in D_f$ و $f(2\alpha - x) = f(x)$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

سلسلة التمارين

✓ التمرين 01

♣ عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$. في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 5x + 7 \quad \blacklozenge [1] & f(x) &= -5x^3 + x^2 - 3 \quad \blacklozenge [2] \\ f(x) &= (-x^3 + x - 1)(1 - x) \quad \blacklozenge [3] & f(x) &= (x^2 - 1)^3(2 - x^3)^2 \quad \blacklozenge [4] \\ f(x) &= -x^4 + x^2 - 6 \quad \blacklozenge [5] & f(x) &= (-2x^2 + 3)(1 - x^2) \quad \blacklozenge [6] \end{aligned}$$

✓ التمرين 02

إزالة حالات عدم التعيين

♣ باستعمال الاختزال احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} \quad \blacklozenge [3] \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad \blacklozenge [2] \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - x - 2} \quad \blacklozenge [1]$$

♣ باستعمال المرافق احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \blacklozenge [1] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \quad \blacklozenge [2] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)} \quad \blacklozenge [3] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2-1} \quad \blacklozenge [4]$$

♣ باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \blacklozenge [1] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad \blacklozenge [2] \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3x-2}}{x-1} \quad \blacklozenge [3]$$

بإستعمال نهاية مركبة دالتين احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x+1}{x-2}\right) \quad \blacklozenge [3]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{2x+3}\right) \quad \blacklozenge [2]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x-1}} \quad \blacklozenge [1]$$

بإستعمال الحصر و المقارنة احسب النهايات التالية :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x-1} \quad \checkmark \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة من أجل كل عدد حقيقي } x > 1 : \quad \blacklozenge [1]$$

$$-\frac{1}{x-1} \leq \frac{\sin x}{x-1} \leq \frac{1}{x-1} \quad \text{فإن } x > 1 \quad \blacklozenge [1]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \blacklozenge [2] \text{ استنتج}$$

✓ التمرين 03

بإستعمال النهايات التالية :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^3 - x \quad \blacklozenge [11]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}(x^2 + 3\sqrt{x}) \quad \blacklozenge [12]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \blacklozenge [13]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} \quad \blacklozenge [14]$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x \quad \blacklozenge [15]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} \quad \blacklozenge [6]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3+3x+1}{(x-1)^2} \quad \blacklozenge [7]$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+16}}{x-4} \quad \blacklozenge [8]$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2-2x+3} \quad \blacklozenge [9]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \quad \blacklozenge [10]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \quad \blacklozenge [1]$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\cos x}{x^2} \quad \blacklozenge [2]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x} \quad \blacklozenge [3]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 + x} \quad \blacklozenge [4]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \quad \blacklozenge [5]$$

✓ التمرين 04

بإستعمال الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$.

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1] $\blacklozenge$ عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2] $\blacklozenge$ احسب نهايات الدالة عند أطراف مجالها مجموعة تعريفها .

3] $\blacklozenge$ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترانزيب يطلب تعيين معادلة له .

4] $\blacklozenge$ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5] $\blacklozenge$ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

✓ التمرين 05

بإستعمال الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2-3x+3}{x-1}$.

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1] $\blacklozenge$ احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2] $\blacklozenge$ عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل $x \in]1; +\infty[$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

3] $\blacklozenge$ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

4] $\blacklozenge$ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x - 1$.

✓ التمرين 06

بإستعمال الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3-4x^2+6x-5}{(x-1)^2}$.

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1] $\blacklozenge$ احسب نهايات الدالة عند أطراف مجالها مجموعة تعريفها .

2] $\blacklozenge$ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترانزيب يطلب تعيين معادلة له .

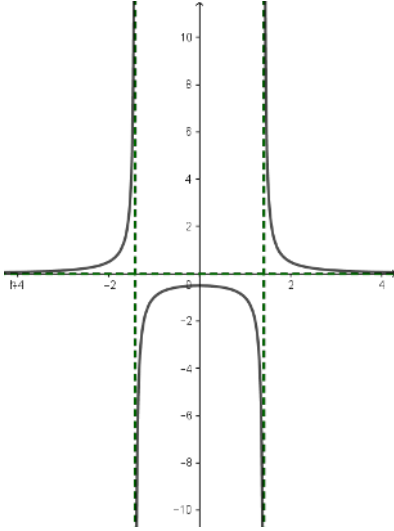
3] $\blacklozenge$ عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

4] $\blacklozenge$ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

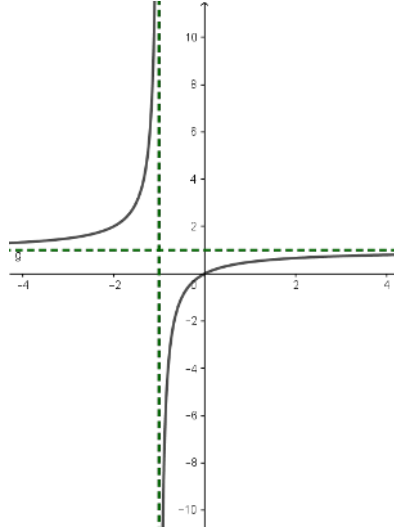
5] $\blacklozenge$ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

✓ التمرين 07

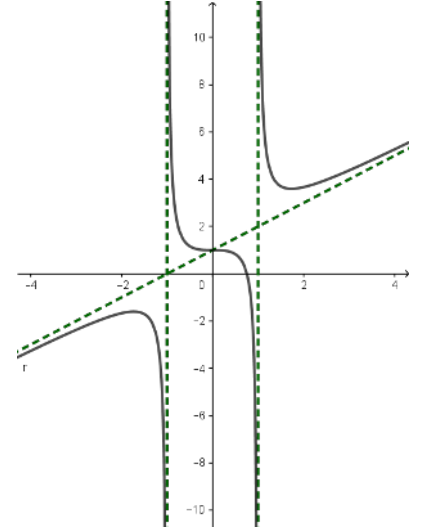
المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (C) التمثيل البياني للدالة f .
بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :



الحالة 3



الحالة 2



الحالة 1

✓ التمرين 08

♦ f دالة محدبة معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

♦ تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية .

[1] احسب $f'(x)$ بدلالة a و c .

[2] اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :

• عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c .

★ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$ ثم فسر بيانيا النتيجة.

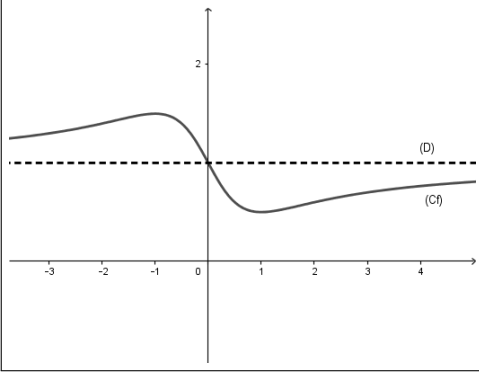
♦ نأخذ فيما يلي : $a = 1$ ، $b = 1$ و $c = 1$. و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

[1] بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .

[2] أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

✓ التمرين 09



- ◆ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2+1}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(D) المستقيم ذو المعادلة $y = 1$
[1] بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f
[2] بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)
[3] أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).
[4] أثبت أن النقطة $w(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

✓ التمرين 10

◆ f و g دالتين معرفتين على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ و (C_g) و (C_f) التمثيل البياني للدالتين f و g على الترتيب في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وجدول تغيراتهما معطى كما يلي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	3	$+\infty$	-4

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	$-\infty$

- [1] عيّن معادلات المستقيمتان المقاربة لـ (C_g) و (C_f) .
[2] عيّن المجال الذي تنتمي إليه نقاط تقاطع كل من (C_g) و (C_f) مع محور الفواصل .
[3] احسب نهايات الدالة $g \circ f$ على المجال $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

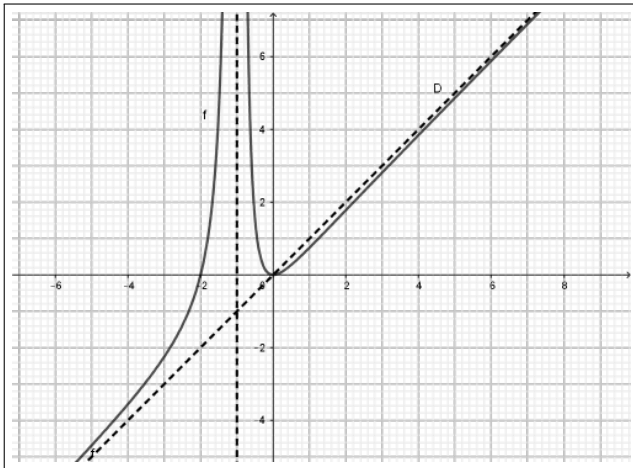
✓ التمرين 11

◆ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	2	1

- [1] عيّن إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.
[2] عيّن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.
◆ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.
كما يلي : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
[3] عيّن النهايات للدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .
[4] احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ثم إستنتج إشارة $g'(x)$.
[5] شكل جدول تغيرات الدالة g .

✓ التمرين 12



- ◆ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:
 $f(x) = x - \frac{x}{(x+1)^2}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$
[1] بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f
[2] بقراءة بيانية عيّن إشارة $f'(x)$.
[3] بقراءة بيانية عيّن إشارة $f(x)$.
[4] بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل
[5] بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)
[6] أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

تمارين التعمق

✓ التمرين 01

محسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} [1] \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \quad [2] \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} \quad [3] \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1} \\ [4] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 - 3x^2 + 9 \quad [5] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2} \quad [6] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{2x+1} \\ [7] \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+x+1}-2x) \quad [8] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2+6x+1}-4x) \quad [9] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x+2x-1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

✓ التمرين 02

محسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} [1] \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3-x}-3}{x+1} \quad [2] \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}} \quad [3] \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \\ [4] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{-1+5x^3} \quad [5] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-2x^3} - \sqrt{-x^3+x+1}) \quad [6] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ [7] \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad [8] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} \quad [9] \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \end{aligned}$$

✓ التمرين 03

محسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} [1] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} \quad [2] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x \cdot \tan x} \quad [3] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(9x)}{\tan(7x)} \\ [4] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{7x} \quad [5] \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{x - \frac{\pi}{6}} \quad [6] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x^3} \\ [7] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} \quad [8] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (1 - \cos(\frac{1}{x})) \quad [9] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} \end{aligned}$$

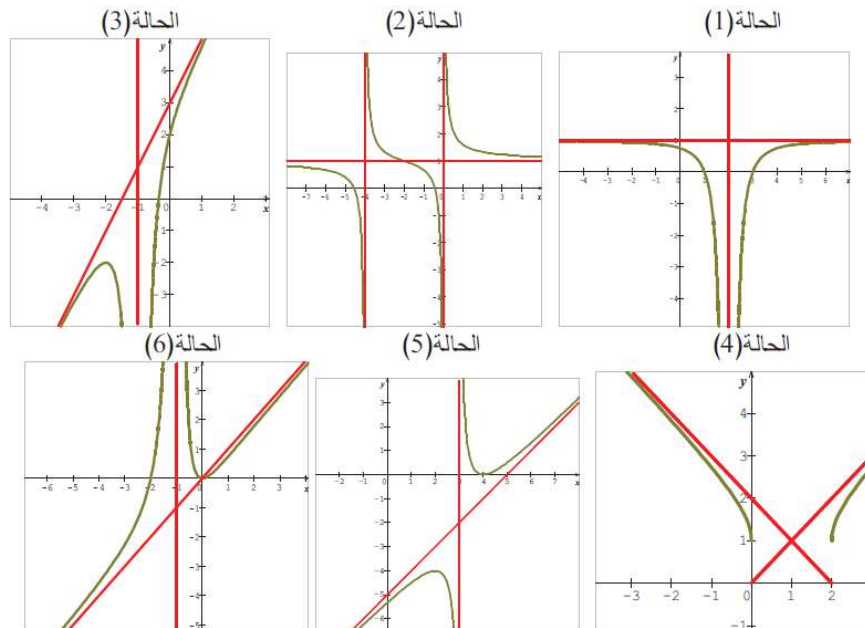
✓ التمرين 04

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ حيث : $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

- [1] اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً فإن : $x \leq \sqrt{x^2+x+1} \leq x+1$ و $x^2 \leq x^2+x+1 \leq (x+1)^2$
- [2] استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً لدينا : $1 - \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- [3] أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x+1})$

✓ التمرين 05

شكل جدول تغيرات في كل حالة :



تمارين للتحقق

✓ التمرين 06

♦ f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ حيث :

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

[1] ♦ هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

✓ التمرين 07

[1] ♦ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

[2] ♦ استنتج النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \quad \text{بـ} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$$

✓ التمرين 08

♦ باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{\sqrt{x}(x-1)} \quad [2] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+4(-1)^x}{x}$$

✓ التمرين 09

[1] ♦ من أجل $x > 0$ ، قارن $\sqrt{4x^2 + 5}$ و $2x$

[2] ♦ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 5} - x$

✓ التمرين 10

[1] ♦ من أجل $x > 1$ ، قارن $\sqrt{2x^2 - 1}$ و $2x$

[2] ♦ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - 3x$

✓ التمرين 11

[1] ♦ من أجل $x > 0$ ، قارن $\sqrt{2x^2 + x + 1}$ و $x\sqrt{2}$

[2] ♦ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - x$

✓ التمرين 12

✓ نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x(1+\sin x)}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$

[1] ♦ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} < -2x$$

[2] ♦ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $f(x) \leq -4x^2$

[3] ♦ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

تطبيق القاعدة التالية :
عند الا نهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{ax + \beta} = |x| \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{\beta}{x^2}}$$

حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$$f(x) = \sqrt{ax + b} + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$$

$$a = \alpha$$

$$a \neq \alpha$$

$$\sqrt{a} = |\alpha|$$

$$\sqrt{a} \neq |\alpha|$$

نستعمل طريقة المرافق

نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

المقام من الشكل $(\alpha x + \beta)$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

$$\textcircled{1} \text{ إظهار العبارة : } \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

نستعمل طريقة المرافق :

$$\textcircled{1} \text{ نضرب : } \frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}} f(x)$$

$$\textcircled{2} \text{ ثم نختزل على : } (x - a)$$

نستعمل طريقة الإختزال :

$$\textcircled{1} \text{ نحلل البسط والمقام.}$$

$$\textcircled{2} \text{ ثم نختزل على } (x - a)$$

$$f(x) = \frac{(x - a)(\dots\dots\dots)}{(x - a)(\dots\dots\dots)}$$

مثال 06

$$f(x) = \sqrt{2x-3} - 3x + 2$$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-3} - 3x + 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\sqrt{2-3/x} - 3x + 2]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{2 - \frac{3}{x^2}} - 3x + 2$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

مثال 07

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$

مثال 08

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

مثال 09

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

لحساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ يجب أن تكون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

ومنه بوضع $g(x) = \sqrt{x+3}$ نجد $g(1) = 2$ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$ $g'(1) = \frac{1}{4}$

مثال 01

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2}}{x} = -\sqrt{2}$

مثال 02

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} + 2x - 2$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-3} + (2x-2))(\sqrt{4x^2-3} - (2x-2))}{(\sqrt{4x^2-3} - (2x-2))}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2-3} - (2x-2)}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{-4x} = -2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{-2x(\sqrt{1+1})}$

مثال 03

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} + x - 2$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2-3} + x - 2$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + x - 2$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right]$

مثال 04

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2})$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2})(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})}{(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})}$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x} = 0$

مثال 05

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{9x^2-2}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{9x^2-2}$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x[2-3] - x\sqrt{4-3/x^2} - x\sqrt{9-2/x^2}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$