



سنة ثانية ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

سلسلة تمارين حول:

كثيرات الحدود

[مع حلول مقترحة]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[12 نوفمبر 2021]

www.dzexams.com

1.

التمارين

◆ التمرين 01 ◆ الحل

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$ ، ثم ادرس إشارة كثير الحدود P في كل حالة مما يلي:

$$P(x) = x^2 + 4x + 3 \quad \textcircled{1}$$

$$P(x) = 4x^2 - x + 1 \quad \textcircled{2}$$

$$P(x) = -3x^2 + x + 1 \quad \textcircled{3}$$

$$P(x) = x^4 + x^2 - 6 \quad \textcircled{4}$$

$$P(x) = x^2 - 6x + 2 \quad \textcircled{5}$$

$$P(x) = x^4 + 3x^2 + 4 \quad \textcircled{6}$$

◆ التمرين 02 ◆ الحل

عين قيم m حتى يكون α جذرا لكثير الحدود P ، في كل حالة مما يلي:

$$\alpha = 4, \quad P(x) = mx^2 - 2mx - 4m - 2 \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha = -1, \quad P(x) = 2m^2 x^4 + mx - m \quad \textcircled{2}$$

$$\alpha = 2, \quad P(x) = -m^2 x^3 + m(2m - 3)x^2 + 3x \quad \textcircled{3}$$

◆ التمرين 03 ◆ الحل

عين في كل حالة قيم الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى يتساوا كثيرا الحدود P و Q :

$$\begin{cases} P(x) = (x - 1)(x + 2) \\ Q(x) = ax^3 + bx^2 + x + c \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} P(x) = x^2 + 2x - 4 \\ Q(x) = \frac{a}{3}x^2 + 7bx - 10c \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} P(x) = 2x^2 + 4x + 5 \\ Q(x) = (ax + 1)(2x + b) + c \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c) \\ Q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3 \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

◆ التمرين 04 ◆ الحل

بيّن أن α جذر لكثير الحدود P ، ثم حل $P(x)$ ، ثم عيّن كل جذوره، في كل مما يلي:

$$\alpha = -3, \quad P(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3 \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha = -1, \quad P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 \quad \textcircled{2}$$

$$\alpha = 2, \quad P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 5 \quad \textcircled{3}$$

$$\alpha = 1, \quad P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \quad \textcircled{4}$$

◆ التمرين 05 ◆ الحل

نعتبر المعادلة: $(E) \quad ax^2 + 5x + \frac{6}{a} = 0 \dots$ حيث: $\alpha \in \mathbb{R}^*$

① بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلين متميزين x_1 و x_2 ، لا

يطلب تعيين الحلين، ثم بيّن أنهما من نفس الإشارة.

② ناقش حسب إشارة a إشارة الحلين x_1 و x_2 .

③ عيّن قيمة a إذا علمت أن $x_1 + x_2 = 5$ ، ثم استنتج

عندئذ الجداء $x_1 x_2$

◆ التمرين 06 ◆ الحل

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمترجمات التالية:

$$3x^4 - 8x^2 + 4 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$-\frac{6x^2}{x^2 - 1} > \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{2x - 9\sqrt{x} + 7}{2x - 9\sqrt{x} + 7} = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$\sqrt{5x + 2} = x + 1 \quad \textcircled{4}$$

3 ادرس إشارة $P(x)$.

ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) < 0$

4 نضع:

$$Q(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{-2x^2 - 3x + 5}$$

أ/ عيّن قيم x حتى تكون العبارة $Q(x)$ معرفة.

ب/ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $Q(x) \leq 0$

♦ التمرين (11) الحل

1 احسب $(1 + \sqrt{3})$

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(*)$ حيث:

$$-2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x = \sqrt{3} \dots (*)$$

3 استنتج حلول الجملة ذات المجهولين الحقيقيين a و b

التالية:

$$\begin{cases} a + b = 1 + \sqrt{3} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

♦ التمرين (12) الحل

$P(x) = 4x^3 - 13x - 6$ كثير حدود حيث:

1 بيّن أن P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$

2 جد كثير الحدود Q الذي يحقق $P(x) = (2x + 1)Q(x)$

3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$, ثم استنتج حلول المعادلة:

$$4x^2|x| - 13|x| - 6$$

4 ادرس إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$, ثم استنتج حلول المتراجحة:

$$\frac{P(x)}{4 - x^2} \geq 0$$

♦ التمرين (13) الحل

$P(x) = -x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 6$ كثير حدود حيث:

1 احسب $P(2)$ و $P(-1)$, ثم حل $P(x)$.

2 ادرس إشارة $P(x)$, ثم استنتج على $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة

$$P(x) \geq 0$$

3 حل في $\mathbb{R}_+$ المتراجحة:

$$x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$$

4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$|x - 1|^3 + 5(x - 1)^2 = (x - 1)^4 + 3|x - 1| + 6$$

♦ التمرين (14) الحل

P_m كثير حدود و m وسيط حقيقي حيث:

$$P_m(x) = (m + 1)x^3 + (m - 1)x^2 - (m + 2)x - m + 2$$

1 عيّن قيمة m حتى يكون 1 جذراً لـ P_m .

2 بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$P_m(x) = (x - 1)[(m + 1)x^2 + 2mx + m - 2]$$

$$\sqrt{1 - 2x} \geq \sqrt{x^2 + 1} \quad 5$$

$$\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2} \quad 6$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{9} \leq \frac{1}{x + 2} \quad 7$$

$$\frac{9}{x^2} + 4x^2 - 12 \leq 0 \quad 8$$

♦ التمرين (07) الحل

ليكن P كثير الحدود حيث:

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$$

1 بيّن أن $\frac{3}{2}$ جذر لـ P

2 أوجد الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون من أجل كل

$$P(x) = (2x - 3)(ax^2 + bx + c) \quad x \in \mathbb{R}$$

3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

4 ادرس إشارة $P(x)$, ثم استنتج إشارة $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$

$$2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2} \quad 5$$

♦ التمرين (08) الحل

$\lambda \in \mathbb{R}$, نضع كثير الحدود P :

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x + \lambda$$

1 عيّن قيمة λ حتى يكون -2 جذر لـ $P(x)$.

2 بأخذ $\lambda = -6$:

أ/ احسب $P(3)$, ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

ب/ ادرس حسب قيم x إشارة $P(x)$, ثم استنتج حلول

$$P(x) < 0$$

ج/ عيّن حلول المعادلة $P(2 - x) = 0$, ثم استنتج تحليلاً

$$P(2 - x) \leq 0$$

♦ التمرين (09) الحل

نعتبر كثير الحدود P : حيث $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = -2\alpha(x^4 + 3x^2 - 4) + 2x(x^4 + 3x^2 - 4)$$

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^4 + 6x^2 - 8 = 0$

2 عيّن درجة كثير الحدود P , ثم بيّن أن α جذر له.

3 عيّن كثير الحدود Q حيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

4 استنتج حلول المعادلة: $P(|x| - 1) = 0$

♦ التمرين (10) الحل

ليكن P كثير الحدود المعروف على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3$$

1 احسب $P(1)$, ثم حل $P(x)$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$, ثم استنتج حلول المعادلة

$$x^6 + 2x^4 - 3 = 0$$

2.

الحلول

[حلول مقترحة]

◆ الحل 01 ◆ التمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$ ، ثم ادرس إشارة كثير الحدود P في كل حالة مما يلي:

1 لدينا:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(3) = 4 = (\sqrt{2})^2 > 0$$

$$x = \frac{-4 - 2}{2} = -3 \text{ أو } x = \frac{-4 + 2}{2} = -2$$

$$s = \{-3; -2\}$$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$	
$P(x) = 0$	+	0	-	0	+

2 لدينا:

$$P(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(4)(1) = -15 < 0$$

$$s = \{\emptyset\}$$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 0$		+

3 لدينا:

$$P(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-3)(1) = 13 > 0$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2(-3)} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \text{ أو } x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2(-3)} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$s = \left\{ \frac{1 + \sqrt{13}}{6}; \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right\}$$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4 لدينا:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0$$

بوضع $t = x^2$ نجد:

$$t^2 + t - 6 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-6) = 25 = (\sqrt{5})^2 > 0$$

إذن:

$$t = \frac{-1 - 5}{2(1)} = -3 \text{ أو } t = \frac{-1 + 5}{2(1)} = 2$$

لدينا: $t = -3 < 0$ (مرفوض) ومنه:

$$x^2 = t \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$s = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$P(x) = 0$	+	0	-	0	+

5 لدينا:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(2) = 28 = (2\sqrt{7})^2 > 0$$

$$x = \frac{-(-6) - 2\sqrt{7}}{2(1)} = 3 - \sqrt{7}$$

◆ الحل 03 ◆ التمرين

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)(x+2) \\ Q(x) = ax^3 + bx^2 + x + c \end{cases} \quad ①$$

$$P(x) = Q(x)$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = ax^3 + bx^2 + x + c$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = ax^3 + bx^2 + x + c$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$\begin{cases} P(x) = x^2 + 2x - 4 \\ Q(x) = \frac{a}{3}x^2 + 7bx - 10c \end{cases} \quad ②$$

$$P(x) = Q(x) \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = \frac{a}{3}x^2 + 7bx - 10c$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{2}{7} \\ c = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} \frac{a}{3} = 1 \\ 7b = 2 \\ -10c = -4 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$\begin{cases} P(x) = 2x^2 + 4x + 5 \\ Q(x) = (ax+1)(2x+b) + c \end{cases} \quad ③$$

$$P(x) = Q(x)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 5 = (ax+1)(2x+b) + c$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 5 = 2ax^2 + abx + 2x + b + c$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 5 = 2ax^2 + (ab+2)x + b + c$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:} \quad \begin{cases} 2a = 2 \\ ab + 2 = 4 \\ b + c = 5 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$\begin{cases} P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c) \\ Q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3 \end{cases} \quad ④$$

$$P(x) = Q(x)$$

$$\Rightarrow (x+1)(ax^2 + bx + c) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

$$\Rightarrow ax^3 + (a+b)x^2 + (c+b)x + c = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 3 \\ b + c = 5 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

◆ الحل 04 ◆ التمرين

$$\alpha = -3, \quad P(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3 \quad ①$$

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 7(-3) - 3 = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) \quad \text{ومنه:}$$

باستعمال جدول هورنر نجد:

	1	1	-7	-3
-3	0	-3	6	3
	1	-2	-1	0

$$P(x) = (x+3)(x^2 + 2x - 1) \quad \text{إذن:}$$

$$\alpha = -1, \quad P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 \quad ②$$

لدينا:

$$P(-1) = 4(-1)^3 + 4(-1)^2 - 9(-1) - 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) + 2\sqrt{7}}{2(1)} = 3 + \sqrt{7}$$

$$s = \{(3 - \sqrt{7}); (3 + \sqrt{7})\} \quad \text{إذن:}$$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$(3 - \sqrt{7})$	$(3 + \sqrt{7})$	$+\infty$	
$P(x) = 0$	+	0	-	0	+

⑥ لدينا:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 + 4 = 0$$

بوضع: $t = x^2$ نجد:

$$\Rightarrow t^2 + 3t + 4 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(4) = -5 < 0$$

$$s = \{\emptyset\} \quad \text{إذن:}$$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 0$		+

◆ الحل 02 ◆ التمرين

$$\alpha = 4, \quad P(x) = mx^2 - 2mx - 4m - 2 \quad ①$$

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(4) = 0$$

$$\Rightarrow m4^2 - 2m4 - 4m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

إذن قيم m حتى يكون α جذر لـ $P(x)$ هي $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$\alpha = -1, \quad P(x) = 2m^2 x^4 + mx - m \quad ②$$

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2(-1)^4 + m(-1) - m = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow 2m(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ \text{أو} \\ m - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{أو} \\ m = 1 \end{cases}$$

إذن قيم m حتى يكون α جذر لـ $P(x)$ هي $\{0; 1\}$

$$\alpha = 2, \quad P(x) = -m^2 x^3 + m(2m-3)x^2 + 3x \quad ③$$

$$P(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow P(2) = 0$$

$$\Rightarrow -m^2(2)^3 + m(2m-3)(2)^2 + 3(2) = 0$$

$$\Rightarrow -8m^2 + 8m^2 - 12m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

إذن قيم m حتى يكون α جذر لـ $P(x)$ هي $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

باستعمال طريقة التحليل لدينا:

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 \\ &= 4x(x+1) - 9(x+1) \\ &= (x+1)(4x-9) \end{aligned}$$

$$\alpha = 2, \quad P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 5 \quad \text{③}$$

$$P(2) = \frac{1}{2}(2)^3 - \frac{1}{4}(2)^2 + (2) - 5 = 0 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$

باستعمال طريقة المطابقة

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} & a &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{3}{4} & b-2a &= -\frac{1}{4} \\ c &= \frac{5}{2} & c-2b &= 1 \\ & & -2c &= -5 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(x-2)(2x^2 + 3x + 10) \end{aligned}$$

$$\alpha = 1, \quad P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \quad \text{④}$$

$$P(1) = 1^4 - 3(1) + 2(1) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$P(x) = (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad \text{ومنه:}$$

باستعمال القسمة الاقليدية نجد:

x^4	$-3x^2$	$+2x$	$x-1$
$-x^4$	$-x^3$	$-3x^2$	$x^3 + x^2 - 2x$
$=0$	x^3	$-3x^2$	$+2x$
$-x^3$	$-x^2$	$-3x^2$	$+2x$
$=0$	$-2x^2$	$+2x$	$+2x$
$-2x^2$	$2x$	$2x$	$2x$
$=0$	0	0	0

إذن:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^3 + x^2 - 2x) \\ &= x(x-1)(x^2 + x - 2) \\ &= x(x-1)(x-1)(x+2) \\ &= x(x+2)(x-1)^2 \end{aligned}$$

◆ الحل 05 ◆ التمرين

① تبين أن المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2 :

$$\Delta = 5^2 - 4(a)\left(\frac{6}{a}\right) = 1 > 0 \quad \text{لدينا:}$$

إذن: المعادلة تقبل حلين متمايزين.

$$x_2 = \frac{-5+1}{2a} = \frac{-4}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-5-1}{2a} = \frac{-6}{2a} \quad \text{لدينا:}$$

الحلين من نفس الإشارة

② مناقشة حسب إشارة a إشارة الحلين x_1 و x_2 :

إشارة الحلين عكس إشارة a :

أي لما $a > 0$ الحلين سالبين، ولما $a < 0$ الحلين موجبين

③ تعيين قيمة a إذا علمنا أن $x_1 + x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 5 &\Rightarrow \frac{-4}{2a} + \frac{-6}{2a} = 5 \\ &\Rightarrow \frac{-10}{2a} = 5 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

- استنتاج الجداء x_1x_2 :

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{لدينا:}$$

$$x_1x_2 = \frac{\frac{6}{-1}}{-1} \quad \text{ومنه:}$$

$$x_1x_2 = 6 \quad \text{إذن:}$$

◆ الحل 06 ◆ التمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية:

$$3x^4 - 8x^2 + 4 = 0 \quad \text{①}$$

$$3t^2 - 8t + 4 = 0 \quad \text{نضع: } t = x^2 \quad \text{نجد:}$$

$$\Delta = 16, \quad \text{ومنه:}$$

$$t = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2(3)} = 2 \text{ أو } t = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2(3)} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad x^2 = t \quad \text{لدينا:}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2}$$

$$\text{أو} \quad \text{ومنه:}$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ أو } x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$s = \left\{ -\sqrt{2}; -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{2} \right\} \quad \text{إذن:}$$

$$-\frac{6x^2}{x^2-1} > \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} \quad \text{②}$$

$$-\frac{6x^2}{x^2-1} > \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow -\frac{6x^2}{x^2-1} - \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{6x^2}{(x-1)(x+1)} + \frac{-3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6x^2 - 3x - 3 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6x^2 - 5x - 1}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{6x^2 + 5x + 1}{(x-1)(x+1)} > 0$$

إذن: $s = [-2; 0]$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \quad \text{⑥}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2 + x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2[(x+1)^2 + x(x-1)] = 1[(x-1)(x+1)]$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1 + x^2 - x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow 2(2x^2 + x + 1) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta' = b' - ac = 1 - 3 \times 3 = -8 < 0$$

إذن المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$

◆ الحل 07 ◆ التمرين

① تبين أن $\frac{3}{2}$ جذر لـ P :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 13\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27\left(\frac{3}{2}\right) - 18 \\ &= 2\frac{27}{8} - 13\frac{9}{4} + 27\frac{3}{2} - 18 = 0 \end{aligned}$$

② إيجاد الأعداد الحقيقية a, b و c :

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x-3)(ax^2+bx+c) \\ \Rightarrow P(x) &= 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx - 3ax^2 - 3bx - 3c \\ \Rightarrow P(x) &= 2ax^3 + (2b-3a)x^2 + (2c-3b)x - 3c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = -13 \\ 2c - 3b = 27 \\ -3c = -18 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

ومنه:

$$P(x) = (2x-3)(x^2-5x+6) \quad \text{إذن:}$$

③ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

$$P(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$$

• لدينا: $2x-3=0$ معناه $x = \frac{3}{2}$

• نحل المعادلة $x^2-5x+6=0$:

$$\Delta = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{ومنه: } x = 2 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

إذن:

$$s = \left\{\frac{3}{2}; 2; 3\right\}$$

④ دراسة إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$		
$2x - 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \frac{6x^2 + 5x + 1}{(x-1)(x+1)} < 0$$

نحلل: $6x^2 + 5x + 1$

$$\Delta = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{ومنه: } x = -\frac{1}{3} \text{ أو } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{إذن: } 6x^2 + 5x + 1 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$6x^2 + 5x + 1$	+	+ 0 - 0 +				+
$x^2 - 1$	+	-	-	-	+	
$\frac{6x^2+5x+1}{x^2-1}$	+	- 0 + 0 -				+

$$\text{إذن: } s = \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$$

$$2x - 9\sqrt{x} + 7 = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{نضع: } t = \sqrt{x} \quad \text{نجد: } 2t^2 - 9t + 7 = 0$$

$$\Delta = 25 \quad \text{لدينا:}$$

$$t = \frac{9 - \sqrt{25}}{2(2)} = 1 \text{ أو } t = \frac{9 + \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{7}{2}$$

$$\sqrt{x} = t \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{ومنه: } \sqrt{x} = \begin{cases} 1 \\ \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{إذن: } x = \begin{cases} 1 \\ \frac{49}{4} \end{cases}$$

إذن:

$$s = \left\{1; \frac{49}{4}\right\}$$

$$\sqrt{5x+2} = x+1 \quad \text{④}$$

$$\sqrt{5x+2} = x+1$$

$$\Rightarrow 5x+2 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow 5x+2 = x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2-3x-1=0$$

$$\text{لدينا: } \Delta = 13, \text{ ومنه: } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{أو} \quad x =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

إذن:

$$s = \left\{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right\}$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt{x^2+1} \quad \text{⑤}$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1-2x \geq x^2+1$$

$$\Rightarrow x^2+2x \leq 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- استنتاج إشارة $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$:

لدينا: $1 \approx \frac{2022}{2021}$ إذن $P\left(\frac{2022}{2021}\right) < 0$

⑤ تعيين حلول المتراجحة: $2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$

$$2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 13x^2 < -27x + 18$$

$$\Rightarrow P(x) < 0$$

إذن:

$$s =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]2; 3[$$

◆ الحل 08 ◆ التمرين

① تعيين قيمة λ حتى يكون (-2) جذر لـ $P(x)$:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow 3(-8) - 2(4) - 19(-2) + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -6$$

② بأخذ $\lambda = -6$:

أ/ حساب $P(3)$:

$$P(3) = 0$$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

لدينا:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$$

$$= (x - 3)(x + 2)(ax + b)$$

$$= (x^2 - x - 6)(ax + b)$$

$$= ax^3 - ax^2 - 6ax + bx^2 - bx - 6b$$

$$= ax^3 + (b - a)x^2 - (6a + b)x - 6b$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - a = -2 \\ -6a - b = -19 \\ -6b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2)(3x + 1) = 0$$

$$3x + 1 = 0 \quad \text{أي} \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$s = \left\{-2; -\frac{1}{3}; 3\right\} \quad \text{إذن:}$$

ب/ دراسة حسب قيم x إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	3	$+\infty$
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$3x + 1$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

- استنتاج حلول المتراجحة $P(x) < 0$:

من جدول الإشارة

لدينا: مجموعة حلول المعادلة $P(x) < 0$ هي:

$$s =]-\infty; -2[\cup \left]-\frac{1}{3}; 3\right[$$

ج/ تعيين حلول المعادلة $P(2 - x) = 0$:

$$s = \left\{-2; -\frac{1}{3}; 3\right\} \quad \text{هي: } P(x) = 0$$

$$-x = \begin{cases} -\frac{4}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{cases} \quad \text{ومنه: } 2 - x = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 3 \end{cases}$$

$$s = \left\{-1; \frac{7}{4}; 4\right\} \quad \text{إذن: } x = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -1 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

- استنتاج تحليل لـ $P(2 - x)$:

$$P(2 - x) = (x + 1)\left(x - \frac{7}{4}\right)(x - 4)$$

◆ الحل 09 ◆ التمرين

① حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^4 + 6x^2 - 8 = 0$

$$x^2 = t \quad \text{نضع:}$$

$$2t^2 + 6t - 8 = 0 \quad \text{نجد:}$$

$$\Delta = 100 \quad \text{لدينا:}$$

$$t = -4 \text{ أو } t = 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$-4 < 0 \quad \text{لدينا: (مرفوض) } t = -4$$

$$x^2 = t \quad \text{لدينا:}$$

$$x^2 = 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$x = -1 \text{ أو } x = 1 \quad \text{إذن:}$$

$$s = \{-1; 1\} \quad \text{إذن:}$$

② تعيين درجة كثير الحدود P :

لدينا:

$$P(x) = -2\alpha(x^4 + 3x^2 - 4) + 2x(x^4 + 3x^2 - 4)$$

$$= -2\alpha x^4 - 6\alpha x^2 + 8\alpha + 2x^5 + 6x^3 - 8x$$

إذن درجة P هي 5

- تبين أن α جذر له:

$$P(\alpha) = -2\alpha(\alpha^4 + 3\alpha^2 - 4) + 2\alpha(\alpha^4 + 3\alpha^2 - 4)$$

$$= 0$$

إذن α جذر لـ P :

③ تعيين كثير الحدود Q حيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$:

بما أن α جذر لـ P , فإنه:

$$P(x) = (x - \alpha)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

باستعمال جدول هورنر لدينا:

	2	-2α	6	-6α	-8	8α
α	0	2α	0	6α	0	-8α
	2	0	6	0	-8	0

$$P(x) = (x - \alpha)(2x^4 + 6x^2 - 8) \quad \text{إذن:}$$

4 استنتج حلول المعادلة: $P(|x| - 1) = 0$

لدينا حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي: $\{\alpha; -1; 1\}$

$$|x| - 1 = \begin{cases} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$|x| = \begin{cases} \alpha + 1 \\ 0 \\ 2 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$x \in \{\alpha + 1; -\alpha - 1; 0; 2; -2\} \quad \text{إذن:}$$

♦ الحل (10) ♦ التمرين

1 حساب $P(1)$:

$$P(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 3 = 0$$

- تحليل $P(x)$:

1 جذر لـ P إذن: $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

ومنه: $P(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ c - b = 0 \\ -c = -3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 3) \quad \text{إذن:}$$

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

$$P(x) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ أو } x - 1 = 0 \quad \text{معناه:}$$

نحل المعادلة $x^2 + 3x + 3 = 0$ باستعمال المميز

$$\Delta = -3 < 0 \quad \text{لدينا:}$$

إذن: المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

وعليه مجموعة حلول المعادلة $P(x) = 0$

$$s = \{1\} \quad \text{هي:}$$

- استنتاج حلول المعادلة $x^6 + 2x^4 - 3 = 0$:

$$\text{نضع: } x^2 = t \quad \text{نجد: } t^3 + 2t^2 - 3 = 0$$

$$\text{ومنه: } x^2 = 1 \quad \text{أي: } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

$$s = \{-1; 1\} \quad \text{إذن مجموعة حلول المعادلة هي:}$$

3 دراسة إشارة $P(x)$:

$$\text{لدينا: } 0 < x^2 + 3x + 3 < 1 \quad \text{لأن } 0 < \Delta < 1 \text{ و } 1 > 0$$

ومنه: إشارة $P(x)$ من إشارة $(x - 1)$

$$\text{لدينا: } x - 1 = 0 \quad \text{معناه: } x = 1$$

وعليه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+

- استنتاج حلول المتراجحة $P(x) < 0$:

$$s =]-\infty; 1[\quad \text{هي } P(x) < 0$$

4

أ/ تعيين قيم x حتى تكون العبارة $Q(x)$ معروفة:

$$\text{لدينا: } -2x^2 - 3x + 5 \neq 0$$

نستعمل المميز لحل المعادلة

$$\Delta = 49 \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{ومنه: } x_1 = \frac{-5}{2} \text{ و } x_2 = 1$$

إذن: $Q(x)$ معرفة لما:

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2}; 1 \right\}$$

ب/ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $Q(x) \leq 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{P(x)}{-2x^2 - 3x + 5} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 + 3x + 3)}{-2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right)} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 3}{-(2x + 5)} \end{aligned}$$

$$\text{لدينا سابقا: } x^2 + 3x + 3 > 0$$

ومنه إشارة $Q(x)$ من إشارة المقام

$$\text{لدينا: } -(2x + 5) = 0$$

$$\text{معناه: } x = -\frac{5}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	+	-	+

$$s = \left] -\frac{5}{2}; +\infty \right[\quad \text{إذن حلول المتراجحة هي:}$$

♦ الحل (11) ♦ التمرين

1 حساب $(1 + \sqrt{3})$:

$$(1 + \sqrt{3}) = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (*):

$$\text{لدينا: } -2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{تكافئ (*)}$$

ومنه:

$$\Delta = 4(4 + 2\sqrt{3}) - 4(-2)(-\sqrt{3}) \quad \text{لدينا:}$$

$$\Delta = 16 + 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \quad \text{ومنه:}$$

$$\Delta = 16 > 0 \quad \text{إذن:}$$

ومنه:

$$x_1 = \frac{-2(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{16}}{2(-2)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{16}}{2(-2)} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن:

$$s = \left\{ \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

• نحل المعادلة: $2x^2 - x - 6 = 0$

لدينا: $\Delta = 49$

ومنه: $x = -\frac{3}{2}$ أو $x = 2$

إذن:

$$s = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right\}$$

وعليه يمكن كتابة $P(x)$ على الشكل:

$$P(x) = (2x + 1)(2x + 3)(x - 2)$$

- استنتاج حلول المعادلة: $4x^2|x| - 13|x| - 6 = 0$

لدينا: $|x| \in \{2\}$ إذن: $x \in \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right\}$

وعليه حلول المعادلة $4x^2|x| - 13|x| - 6 = 0$ هي:

$$s = \{-2; 2\}$$

4 دراسة إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

- استنتاج حلول المتراجحة $0 \leq \frac{P(x)}{4-x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{4-x^2} &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{(2x+1)(2x+3)(x-2)}{(2-x)(2+x)} &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{-(2x+1)(2x+3)(2-x)}{(2-x)(2+x)} &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{(2x+1)(2x+3)}{-x-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$2x + 3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$-x - 2$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$\frac{P(x)}{4 - x^2}$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$

إذن حلول المتراجحة هي:

$$s =]-\infty; 2[\cup \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$$

◆ الحل (13) ◆ التمرين

1 حساب $P(-1)$ و $P(2)$

$$P(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 5(-1)^2 - 3(-1) - 6 = 0$$

$$P(2) = -(2)^4 + (2)^3 + 5(2)^2 - 3(2) - 6 = 0$$

- تحليل $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x+1)(ax^2+bx+c) \\ &= (x^2-x-2)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^4+bx^3+cx^2-ax^3-bx^2-cx-2ax^2-2bx-2c \\ &= ax^4+(b-a)x^3+(c-2a-b)x^2+(-c-2b)x-2c \end{aligned}$$

3 استنتاج حلول الجملة ذات المجهولين الحقيقيين a و b :

نسمي a و b حلي المعادلة (*) فيكون لدينا:

$$s = a + b = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$p = ab = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أن a و b حلين للمعادلة (*) يمكن كتابتها على الشكل:

$$x^2 - sx + p = 0$$

أي:

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

بالضرب في (-2) نجد:

$$-2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

أي:

$$-2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x - \sqrt{3} \dots (*)$$

إذن حلي الجملة هما حلي المعادلة (*)

◆ الحل (12) ◆ التمرين

1 تبين أن P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 & -13x & -6 & x + \frac{1}{2} \\ -4x^3 & +2x^2 & & 4x^2 - 2x - 12 \\ \hline & 0 & -2x^2 & -13x & -6 \\ & & -2x^2 & -x & \\ \hline & & 0 & -12x & -6 \\ & & & -12x & -6 \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

الباقي 0، إذن P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$

2 إيجاد كثير الحدود Q الذي يحقق $P(x) = (2x + 1)Q(x)$

$$Q(x) = 1$$

من حل السؤال الأول نجد أن:

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 2x - 12)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)2(2x^2 - x - 6)$$

$$= (2x + 1)(2x^2 - x - 6)$$

إذن: $Q(x) = 2x^2 - x - 6$

3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

• لدينا: $P(x) = 0$

معناه: $(2x + 1)(2x^2 - x - 6) = 0$

أي: $2x + 1 = 0$ أو $2x^2 - x - 6 = 0$

أي: $x = -\frac{1}{2}$ أو $2x^2 - x - 6 = 0$

وعليه: $x \in [-1; -\sqrt{3} + 1] \cup [\sqrt{3} + 1; 3]$

◆ الحل (14) ◆ التمرين

① تعيين قيم m حتى يكون 1 جذرا لـ P_m :

لدينا: $P_m(1) = 0$

معناه: $(m+1) + (m-1) - (m+2) - m + 2 = 0$

إذن: $0 = 0$

وعليه: $m \in \mathbb{R}$

② التبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$P_m(x) = (x-1)[(m+1)x^2 + 2mx + m-2]$$

لدينا: $P_m(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

باستعمال جدول هورنر نجد:

	$m+1$	$m-1$	$-(m+2)$	$-m+2$
1	0	$m+1$	$2m$	$m-2$
	$m+1$	$2m$	$m-2$	0

إذن:

$$P_m(x) = (x-1)[(m+1)x^2 + 2mx + m-2]$$

③ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P_0(x) \geq 0$:

لدينا: $P_0(x) \geq 0$

معناه: $(x-1)(x^2-2) \geq 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
x^2-2	+	0	-	-	0	+	
$x-1$	-	-	0	+	+		
P_0	-	0	+	0	-	0	+

إذن: $s = [-\sqrt{2}; 1] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

④

أ/ تعيين قيم m التي تجعل $Q(x) < 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$:

لدينا: $Q(x) < 0$

معناه: $\Delta < 0$

أي: $4m^2 - 4(m+1)(m-2) < 0$

أي: $4(m+2) < 0$

ومنه: $m < -2$

إذن: $m \in]-\infty; -2[$

ب/ استنتاج حلول المتراجحة $P_{-3}(x) \geq 0$:

لدينا: $-3 < -2$

إذن: $s = \{\emptyset\}$

◆ الحل (15) ◆ التمرين

① التحقق أن 0 ليس حلا لـ (E) :

$$0^4 - 0x^3 + 2(0)^2 - 4(0) + 1 = 0$$

$$1 = 0$$

وهذا مستحيل، إذن 0 ليس حلا لـ (E)

بعد المطابقة والتبسيط نجد: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$

أي: $P(x) = (x-2)(x+1)(-x^2+3)$

نحل المعادلة $-x^2+3=0$:

لدينا: $-x^2 = -3$

معناه: $x = -\sqrt{3}$ أو $x = \sqrt{3}$

إذن: $P(x) = (x-2)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

② دراسة إشارة $P(x)$:

نضع: $\begin{cases} -x^2+3=0 \dots (*) \\ (x-2)(x+1) \dots (**) \end{cases}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$*$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$**$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

- استنتاج حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$:

من جدول الإشارة نجد حلول التراجحة $P(x) \geq 0$ هي:

$$s = [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; 2]$$

③ حل في $\mathbb{R}_+$ المتراجحة:

$$x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$$

المعادلة: $x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$

تكافئ: $-x^2 + x\sqrt{x} + 5x - 3\sqrt{x} - 6 \leq 0$

نضع: $\sqrt{x} = t$ أي: $x = t^2$

نجد: $-(t^2)^2 + t^2t + 5t^2 - 3t - 6 \leq 0$

أي: $-t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 6 \leq 0$

أي: $P(t) \leq 0$

ومنه: $t \in]0; \sqrt{3}] \cup [2; +\infty[$

إذن: $x \in]0; 3] \cup [4; +\infty[$

④ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

نضع: $t = x - 1$ أي: $x = t + 1$

نجد: $|t|^3 + 5t^2 = t^4 + 3|t| + 6$

المعادلة: $|t|^3 + 5t^2 = t^4 + 3|t| + 6$

تكافئ: $\begin{cases} t^3 + 5t^2 = t^4 + 3t + 6 ; t \geq 0 \\ -t^3 + 5t^2 = t^4 + 3t + 6 ; t \leq 0 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} -t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 6 = 0 ; t \geq 0 \\ -t^4 - t^3 + 5t^2 + 3t - 6 = 0 ; t \leq 0 \end{cases}$

أي:

$\begin{cases} -t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 6 = 0 ; t \geq 0 \\ -(-t)^4 + (-t)^3 + 5(-t)^2 - 3(-t) - 6 = 0 ; t \leq 0 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} P(t) = 0 ; t \geq 0 \\ P(-t) = 0 ; t \leq 0 \end{cases}$

إذن: $t \in [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$

② اثبات أن (E) تكافئ المعادلة (E'):

لدينا: $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

نخرج x^2 كعامل مشترك

نجد: $x^2 \left(x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$

أي: $x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

وهو المطلوب

③ تبين أن (E') تكتب كما يلي:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

لدينا: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

معناه: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 4x - \frac{4}{x} = 0$

وهو المطلوب

④ استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

تكافئ: $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - 4\right) = 0$

إذن: $x + \frac{1}{x} - 4 = 0$ أو $x + \frac{1}{x} = 0$

لدينا: $x + \frac{1}{x} = 0$

معناه: $\frac{x^2 + 1}{x} = 0$

أي: $x^2 + 1 = 0$ وهذا مستحيل

ولدينا: $x + \frac{1}{x} - 4 = 0$

معناه: $x^2 + 1 - 4x = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ

لدينا: $\Delta = 12$

ومنه: $x = 2 - \sqrt{3}$ أو $x = 2 + \sqrt{3}$

إذن حلول المعادلة (E) هي:

$$s = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$$

◆ الحل 16 ◆ التمرين

نعتبر كثير الحدود P_m حيث:

$$P_m(x) = (2m - 1)x^3 + (5m - 5)x^2 + (4m - 8)x + m - 4$$

① تبين أن P_m يقبل القسمة على $x + 1$ مهما كانت قيمة

m :

نستعمل القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m-4 & x+1 \\ \hline -(2m-1)x^3 + (2m-1)x^2 & \\ \hline 0 & + (3m-4)x^2 + (4m-8)x + m-4 \\ & -(3m-4)x^2 + (3m-4)x \\ \hline 0 & + (m-4)x + m-4 \\ & -(m-4)x + (m-4) \\ \hline 0 & \end{array}$$

الباقى 0 إذن P_m يقبل القسمة على $x + 1$ مهما كانت قيمة

m

② ايجاد كثير الحدود Q_m :

من القسمة الاقليدية وجدنا أن:

$$Q_m(x) = (2m - 1)x^2 + (3m - 4)x + (m - 4)$$

③ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

لدينا: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

تكافئ: $\frac{7x^3 + 15x^2 + 8x}{x^3 - 4x - 3} \geq 0$

ومنه: $\frac{x(7x^2 + 15x + 8)}{x^3 - 4x - 3} \geq 0$

• نحلل $(7x^2 + 15x + 8)$

لدينا: $\Delta = 1$

ومنه: $x = -\frac{8}{7}$ أو $x = -1$

ومنه: $7x^2 + 15x + 8 = 7(x + 1)\left(x + \frac{8}{7}\right)$

إذن: $7x^2 + 15x + 8 = (x + 1)(7x + 8)$

• نلاحظ أن -1 جذر لـ $x^3 - 4x - 3$

إذن: $x^3 - 4x - 3 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

بعد النشر والمطابقة

نجد أن: $x^3 - 4x - 3 = (x + 1)(x^2 - x - 3)$

نحلل: $(x^2 - x - 3)$

لدينا: $\Delta = 13$

ومنه: $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ أو $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

إذن:

$$x^3 - 4x - 3 = (x + 1)\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

إذن: $\frac{x(7x^2 + 15x + 8)}{x^3 - 4x - 3} \geq 0$

تكافئ: $\frac{x(x+1)(7x+8)}{(x+1)\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$

أي: $\frac{x(7x+8)}{\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$

ومنه جدول الإشارة:

نضع:

$$x(7x + 8) \dots (*)$$

$$\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \dots (**)$$

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$	$-\frac{8}{7}$	0	$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$*$	+	+	0	-	0	+
$**$	+	-	-	-	-	+
$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}$	+	-	0	+	0	-

إذن:

$$s = \left] -\infty; \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right[\cup \left] -\frac{8}{7}; 0 \right[\cup \left] \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right[$$

لما: $m \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[\dots (3)$

تقاطع المجالات (1) و (2) و (3) هو:

$m \in]-\infty; -12[\cup]4; +\infty[$

بالتوفيق

♥ لا تنسوننا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم إبراهيم الفليل

4 تعيين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متميزة:

لدينا:

$$\begin{aligned} P_m(x) &= (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m-4 \\ &= (x+1)Q(x) \\ &= (x+1)[(2m-1)x^2 + (3m-4)x + (m-4)] \end{aligned}$$

المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متميزة

معناه المعادلة $Q(x) = 0$ تقبل حلين

أي: $\Delta > 0$

أي: $(3m-4)^2 - 4(2m-1)(m-4) > 0$

أي: $m^2 + 12m > 0$

أي: $m(m+12) > 0$

x	$-\infty$	-12	0	$+\infty$
Δ	+	0	-	+

إذن: $s =]-\infty; -12[\cup]0; +\infty[$

ب/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا:

المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

معناه المعادلة $Q(x) = 0$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$

أي: $\Delta < 0$

إذن: $s =]-12; 0[$

ج/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة تماماً:

المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة تماماً

معناه المعادلة $Q(x) = 0$ تقبل حلين سالبين تماماً

أي: $\Delta > 0$ و $\frac{m-4}{2m-1} > 0$ و $\frac{-(3m-4)}{2m-1} < 0$

أي: $\Delta > 0$ و $\frac{m-4}{2m-1} > 0$ و $\frac{3m-4}{2m-1} > 0$

لدينا: $\Delta > 0$

لما: $m \in]-\infty; -12[\cup]0; +\infty[\dots (1)$

ولدينا: $\frac{m-4}{2m-1} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$m-4$	-	-	0	+
$2m-1$	-	+	+	+
$\frac{m-4}{2m-1}$	+	-	0	+

لما: $m \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[\dots (2)$

ولدينا: $\frac{3m-4}{2m-1} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3m-4$	-	-	0	+
$2m-1$	-	+	+	+
$\frac{m-4}{2m-1}$	+	-	0	+