

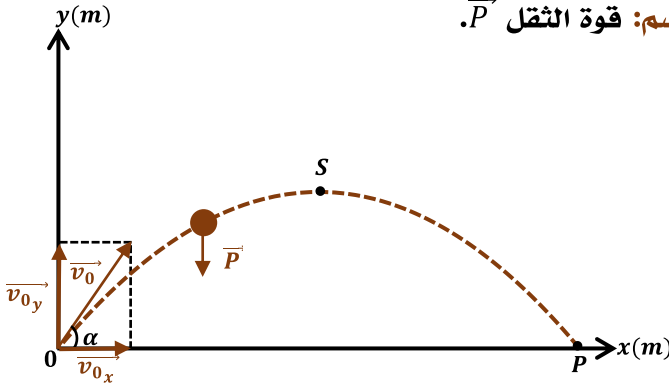
الوحدة 2: تطور جملة ميكانيكية

دراسة حركة القذيفة:

نقذف جسما صلبا (S) كتلته m بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ يصنع حاملها الزاوية α مع المستوي الأفقي.

1. تمثيل القوى الخارجية المطبقة على الجسم:

القوى المؤثرة على الجسم: قوة الثقل $\vec{P}$.



2. الشروط الابتدائية:

مركبتي شعاع السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) \quad \text{لدينا:}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \quad \text{ولدينا:}$$

مركبتي شعاع الموضع الابتدائي $\vec{r}$:

$$\vec{r} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

3. دراسة طبيعة حركة القذيفة على المحورين:

الجملة المدروسة: الجسم.

المرجع المناسب: سطحي أرضي باعتباره غاليلي.

القوى المؤثرة: قوة الثقل $\vec{P}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لدينا: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$ ومنه: $\vec{P} = \vec{a}_G$
 بالإسقاط على المحور Ox نجد: $0 = ma_x$ ومنه: $a_x = 0$
 إذن: طبيعة الحركة مستقيمة منتظمة.

بالإسقاط على المحور Oy نجد: $-P = ma_y$ ومنه: $-mg = ma_y$ ومنه: $a_y = -g$
 إذن: طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

4. المعادلات التفاضلية للسرعة والموضع:

المحور Oy

المعادلة التفاضلية للسرعة:

لدينا: $a_y = -g$ و $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

إذن: $\frac{dv_y}{dt} = -g$

المعادلة التفاضلية للموضع:

لدينا: $a_y = -g$ و $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$

إذن: $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

المحور Ox

المعادلة التفاضلية للسرعة:

لدينا: $a_x = 0$ و $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

إذن: $\frac{dv_x}{dt} = 0$

المعادلة التفاضلية للموضع:

لدينا: $a_x = 0$ و $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$

إذن: $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

5. المعادلات الزمنية للسرعة والموضع على المحورين:

المحور Oy

لدينا: $a_y = -g$

بالتكامل: $v_y(t) = -gt + C_3$

بالتكامل: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4$

لما $t = 0$:

$$\begin{cases} v_{0y} = -g \times 0 + C_3 \\ y_0 = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + C_3 \times 0 + C_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0y} = C_3 = v_0 \sin(\alpha) \\ y_0 = C_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \end{cases}$$

المحور Ox

لدينا: $a_x = 0$

بالتكامل: $v_x(t) = C_1$

بالتكامل: $x(t) = C_1t + C_2$

لما $t = 0$:

$$\begin{cases} v_{0x} = C_1 \\ x_0 = C_1 \times 0 + C_2 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \end{cases}$$

6. إيجاد معادلة المسار:

لدينا: $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \dots (1)$ ولدينا: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \dots (2)$ من العلاقة (1) لدينا: $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)$$

ومنه:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x$$

7. الذروة S:

هي أعلى نقطة تبلغها القذيفة والتي تنعدم عندها مركبة السرعة على المحور Oy .

$$\begin{cases} v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \dots (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \dots (2) \end{cases} \text{ حيث لدينا:}$$

عند اللحظة t_S يكون: $v_y = 0$ بالتعويض في العلاقة (1) نجد: $0 = -gt_S + v_0 \sin(\alpha)$

$$t_S = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \text{ ومنه:}$$

بالتعويض في العلاقة (2):

$$y_S = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \right)$$

$$y_S = -\frac{1}{2}g \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} \text{ ومنه:}$$

$$y_S = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} \text{ ومنه:}$$

إذن:

$$y_S = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

8. المدى الأفقي OP :

هو أكبر مسافة أفقية تقطعها القذيفة وفق المحور الأفقي Ox .

تحديد المدى OP : أي إيجاد قيمة الفاصلة x_P

لدينا عند P يكون: $y_P = 0$

بالتعويض في معادلة المسار نجد:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_P^2 + \tan(\alpha) x_P$$

$$0 = x_P \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_P + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) \quad \text{ومنه:}$$

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_P + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 0 \quad \text{أو} \quad x_P = 0 \quad (\text{مرفوض}) \quad \text{معناه: إما}$$

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_P = \sin(\alpha) \quad \text{ومنه:} \quad \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_P = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{ومنه:}$$

$$x_P = \frac{\sin(\alpha) 2v_0^2 \cos(\alpha)}{g}$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \quad \text{نعلم أن:}$$

$$x_P = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad \text{بالتعويض نجد:}$$

ملاحظات:

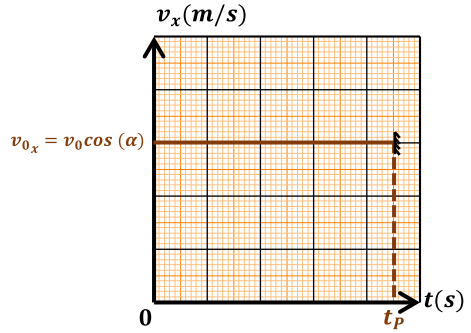
- المدى x_P يتعلق بالسرعة الابتدائية v_0 والزاوية α .
- كلما كانت قيمة سرعة القذيفة v_0 أكبر نحصل على مدى أكبر.
- بالنسبة لزاوية القذف α ، يكون المدى أعظمي إذا كان $\sin(2\alpha) = 1$ ومنه $2\alpha = 90^\circ$ إذن: $\alpha = 45^\circ$

9. حساب سرعة القذيفة عند كل لحظة:

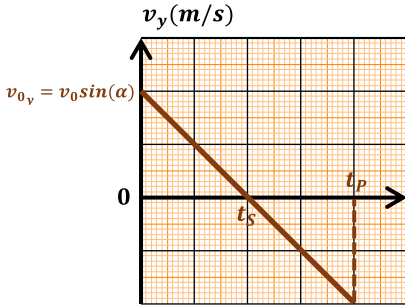
$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{ومنه لحساب سرعة القذيفة:}$$

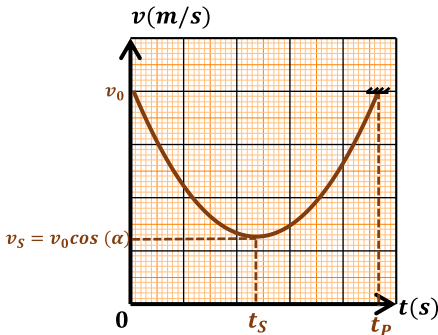
10. منحنيات خاصة بالمثال السابق:

أ. المنحنى $v_x(t)$:استغلال المنحنى $v_x(t)$:

إيجاد قيمة v_{0x} عند اللحظة $t = 0$.
إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_p .

ب. المنحنى $v_y(t)$:استغلال المنحنى $v_y(t)$:

إيجاد قيمة v_{0y} عند اللحظة $t = 0$.
إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى الذروة t_s .
إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_p .

استغلال المنحنيين $v_x(t)$ و $v_y(t)$:إيجاد قيمة v_0 حيث: $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ إيجاد قيمة زاوية القذف α حيث: $\tan(\alpha) = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}$ ج. منحنى السرعة $v(t)$:استغلال المنحنى $v(t)$:إيجاد قيمة السرعة الابتدائية v_0 إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى الذروة t_s .إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_p .إيجاد قيمة v_{0x} .

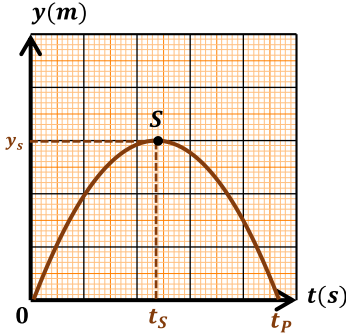
د. المنحنى $y(t)$:

استغلال المنحنى $y(t)$:

إيجاد أقصى ارتفاع تباعه القذيفة y_s .

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى الذروة t_s .

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_p .



د. المنحنى $x(t)$:

استغلال المنحنى $x(t)$:

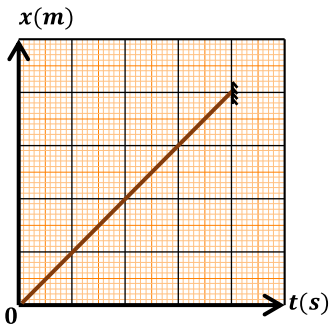
العبرة البيانية:

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ
معادلته من الشكل $x = At$ حيث A يمثل ميل
المستقيم.

العبرة النظرية:

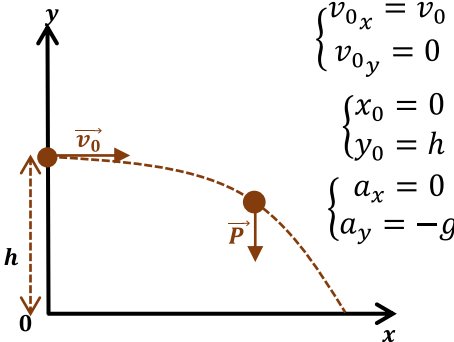
لدينا: $x = v_0 \cos(\alpha) t$

بالمطابقة بين العبارتين نجد: $A = v_0 \cos(\alpha)$



11. استخراج الشروط الابتدائية في حالات أخرى:

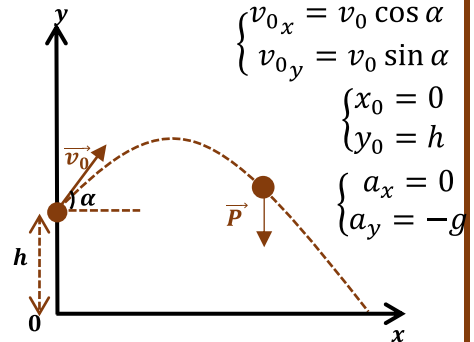
الحالة 02:



$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = h \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

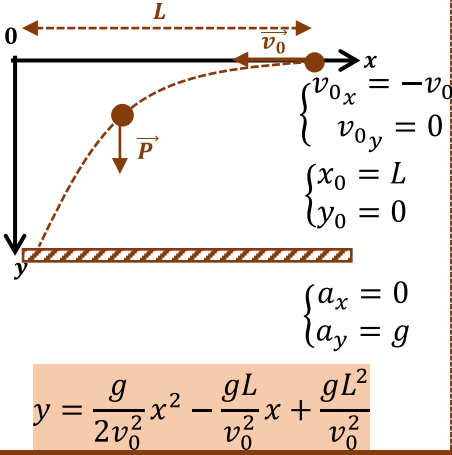
الحالة 01:



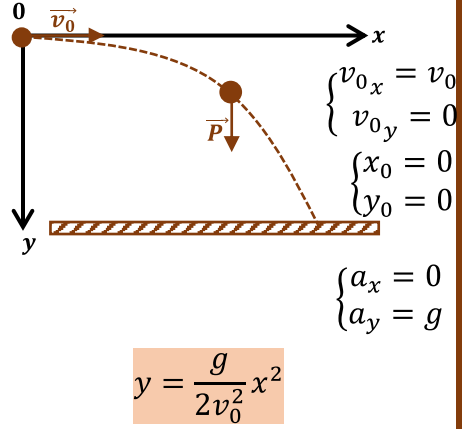
$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x + h$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \\ x_0 = 0 \\ y_0 = h \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

الحالة 04:



الحالة 03:



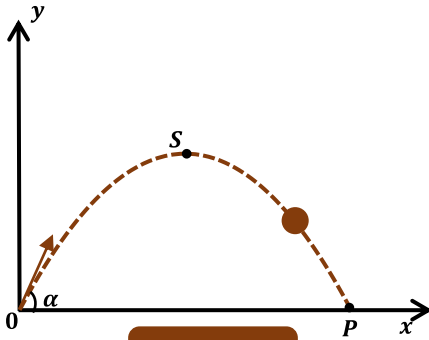
ملاحظات:

Handwriting practice area with 20 sets of horizontal dotted lines for text entry.

جزء التمارين

التمرين الأول:

يقذف جسم من النقطة O على الأرض بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ تصنع زاوية α مع الأفق كما في الشكل -1-، لنفرض أن احتكاكات الهواء مهملة.



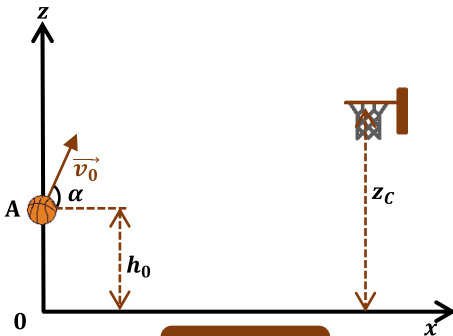
الشكل 1

1. ادرس طبيعة حركة القذيفة.
2. أوجد المعادلتين الزميتين $x(t)$ و $y(t)$ في المعلم $O, \vec{i}, \vec{k}$ ثم استنتج معادلة مسار حركتها.
3. احسب أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة.
4. احسب المدى OP .
5. إذا علمت أن السرعة ثابتة على المحور Ox

- عين قيمة α التي من أجلها يكون المدى أعظمي.

المعطيات: $v_0 = 10 \text{ m/s}$ ، $\alpha = 50^\circ$.

التمرين الثاني:



الشكل 2

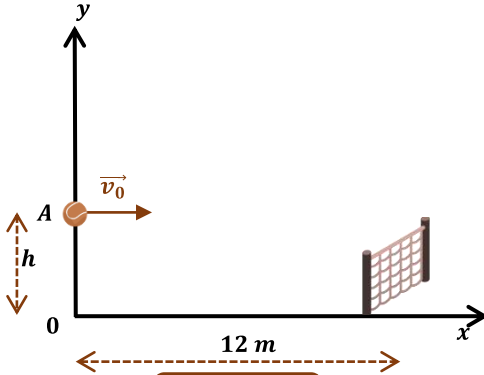
قام لاعب في مقابلة لكرة السلة، بتسديد الكرة نحو السلة من النقطة A منطبقة على مركز الكرة الموجودة على ارتفاع $h_0 = 2.1 \text{ m}$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0 = 8 \text{ m/s}$ يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37^\circ$ مع الأفق (الشكل -2-)، ليمر مركز الكرة G بمركز السلة الذي إحداثياته

($x_c = 4,50 \text{ m}$; z_c) في المعلم السطحي الأرضي ($\vec{Ox}, \vec{Oz}$) الذي نعتبره غاليليا.

1. أوجد المعادلات الزمنية للسرعة والموضع ثم استنتج معادلة مسار حركتها.
2. احسب z_c .
3. يعبر مركز عطالة الكرة من مركز السلة بسرعة v_c التي يصنع حاملها مع الأفق زاوية β .
- أوجد قيمتي كل من $\vec{v}_c$ و β .

المعطيات: $g = 9,8m.s^{-2}$.

التمرين الثالث:



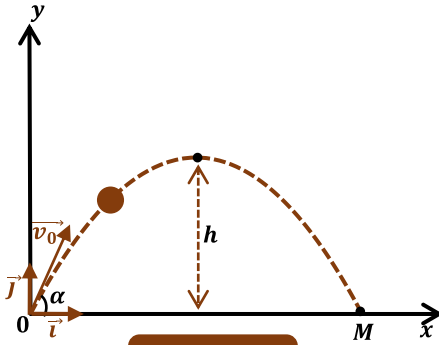
الشكل 3

لإنجاز ارسال يقذف لاعب تنس بمضربه الكرة بسرعة أفقية $\vec{v}_0$ ومن النقطة A الواقعة على ارتفاع $h = 2m$ من سطح الأرض وعليها أن تجتاز الشباك علوه $0,90 m$ (الشكل - 3). البعد بين اللاعب والشباك هو $12 m$.

1. ادرس طبيعة حركة مركز عطالة الكرة في المعلم $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة ضرب الكرة مع اهمال تأثير الهواء عليه.
2. اكتب المعادلات الزمنية للسرعة والموضع.
3. بين أن معادلة المسار هي: $y = -\frac{g}{2v_0^2} \times x^2 + y_0$
4. ماهي قيمة السرعة حتى تمر الكرة ب $10 cm$ فوق الشباك؟
5. احسب قيمة السرعة عند اجتياز الشباك.
6. احسب مدة السقوط، ثم استنتج مدى القذيفة.

المعطيات: $g = 9,8m.s^{-2}$.

التمرين الرابع:



الشكل 4

نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة كتلتها m بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ من النقطة O كما هو مبين في (الشكل 4-). نعتبر أن حركة الجسم تتم في المستوي المزود بمعلم $\vec{i}, \vec{j}$ و O ، وتدرس بالنسبة للمرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا، نهمل كلا من مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس. يمثل البيان الموضح في الشكل-5- تغيرات قيمة سرعة القذيفة بدلالة الزمن بين الموضعين O و M .

1. مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب.

2. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين طبيعة الحركة.

3. أوجد المعادلات الزمنية لكل من السرعة والموضع.

4. أوجد من البيان:

1.4. القيمة v_0 لشعاع السرعة $\vec{v}_0$.

2.4. قيمة المركبة v_{0x} لشعاع السرعة $\vec{v}_0$.

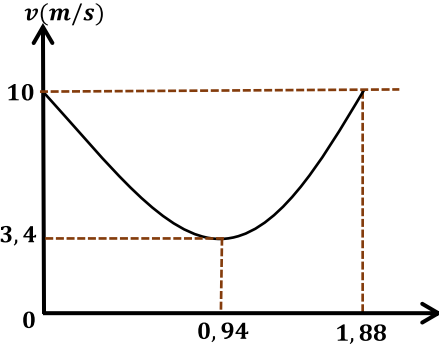
5. استنتج قيمة كل من الزاوية α التي قذف بها الجسم وقيمة v_{0y} .

6. مثل كل من $v_x(t)$ و $v_y(t)$ في المجال الزمني $(0 \leq t \leq 1,88)s$

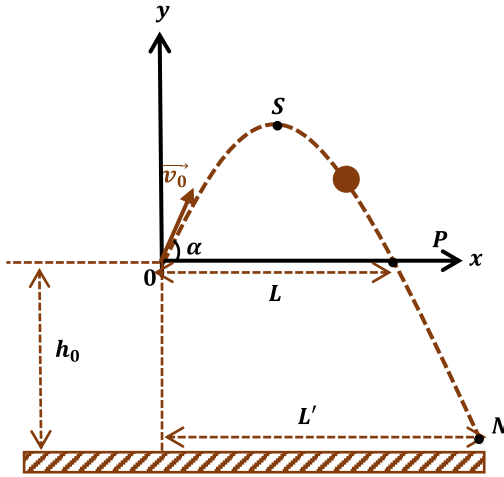
7. استنتج من المنحنيين كل من المسافة الأفقية OM وأقصى ارتفاع تبلغه القذيفة h .

التمرين الخامس:

من النقطة O تقع على ارتفاع $h_0 = 5m$ من سطح الأرض نقذف عند اللحظة $t = 0s$ كرة S كتلتها m بسرعة ابتدائية $v_0 = 20m.s^{-1}$ يصنع شعاعها الزاوية $\alpha = 60^\circ$ ، نهمل كل قوى الاحتكاك وكذا دافعة أرخميدس، نعتبر مبدأ الأزمنة والفاصل عند النقطة O (الشكل-6-).



الشكل 5

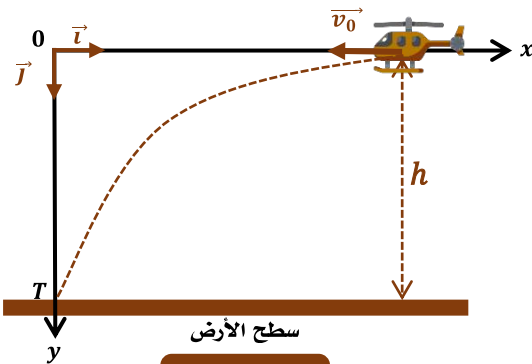


الشكل 6

1. ادرس طبيعة لحركة الكرة.
2. اكتب المعادلات الزمنية للسرعة والموضع.
3. اكتب معادلة المسار وما طبيعته.
4. أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض.
5. أوجد مدى الكرة L وكذا الزمن اللازم لذلك.
6. تأكد أن زمن بلوغ المدى ضعف زمن بلوغ الذروة.
7. احسب المسافة الأفقية L' بين موضع سقوط الكرة على الأرض والمحور Oy .
8. 1.8 احسب سرعة الكرة عند المواضع N, P, S .
- 2.8. ماذا تلاحظ فيما يخص السرعة عند P .

المعطيات: $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

التمرين السادس:



الشكل 7

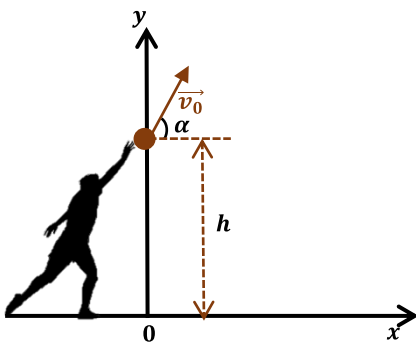
- تستعمل الطائرات المروحية في بعض الحالات لإيصال مساعدات إنسانية إلى مناطق منكوبة يتعذر الوصول إليها.
- تتحرك طائرة مروحية على ارتفاع $h = 450 \text{ m}$ من سطح الأرض بسرعة أفقية $v_0 = 50 \text{ m.s}^{-1}$ ثابتة، ونسقط الصندوق نعتبره نقطي عند اللحظة $t = 0$ انطلاقاً من النقطة $A(450 \text{ m} ; 0)$ فيرتطم بالأرض عند النقطة T .

ندرس حركة الصندوق في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا (الشكل-7) ، نهمل تأثير الهواء:

1. ادرس طبيعة الحركة.
2. أوجد المعادلات الزمنية للسرعة والموضع.
3. بين أن معادلة المسار تكتب من الشكل: $y = 2 \times 10^{-3}x^2 - 1.8x + 405$.
4. احسب لحظة ارتطام الصندوق بالأرض.
5. ماهي سرعة الصندوق لحظة ارتطامها بالأرض.

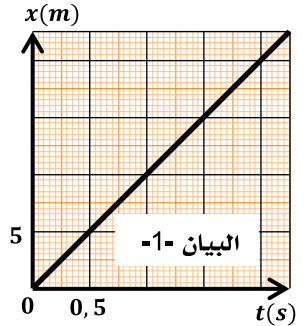
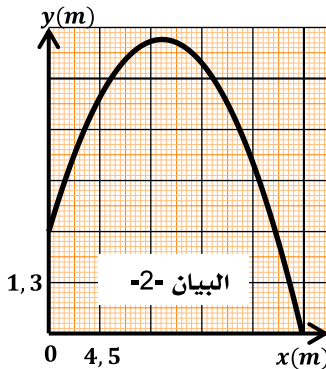
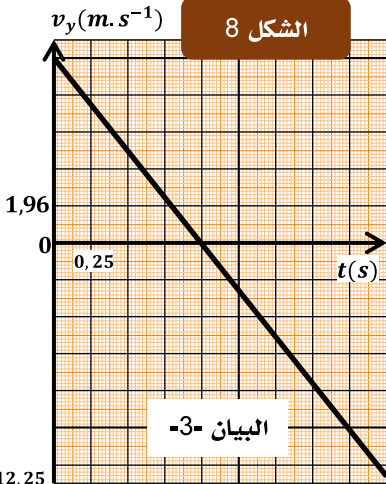
التمرين السابع:

خلال الألعاب الأولمبية التي جرت بالبرازيل سنة 2016 . تحصل الأمريكي ريان كروزي (Rayan Crouser) على الميدالية الذهبية في رياضة رمي الجلة لألعاب القوى على إثرمية قدرها (D).



بإهمال تأثير الهواء، تمت دراسة محاكات حركة مركز عطالة الجملة G في المعلم (O, x, y) المرتبط بالمرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا، ابتداء من لحظة رميها $(t = 0)$ على ارتفاع h من سطح الأرض إلى غاية ارتطامها به (الشكل-8) فتم الحصول على المنحنيات البيانية التالية:

الشكل 8



1. بالاعتماد على المنحنيات البيانية:

1.1. حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجملة G على كل من المحورين Ox و Oy مع تبرير إجابتك.

2.1. حدد قيمة المقادير التالية: مركبتي السرعة الابتدائية v_{0x} و v_{0y} ، مركبة التسارع a_x و a_y والارتفاع h .

3.1. اكتب المعادلتين الزمئيتين $x(t)$ و $y(t)$ لحركة G في المعلم (O, x, y) .

4.1. اكتب معادلة البيان -2- ، ماذا تمثل؟

5.1. ماهي قيمة كل من الزاوية α والسرعة التي قذفت بها الجلة v_0 ؟

6.1. ماهي قيمة المسافة الأفقية D التي مكنت الرياضي من الفوز بالمداوية الذهبية.

2. أنجز مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة (الجلة) بين اللحظتين $t = 0$

و $t = 2.25s$ ثم اكتب معادلة انحفاظ الطاقة واستنتج سرعة مركز عطالة الجلة عند لحظة ارتطامها بسطح الأرض $t = 2.25s$.

3. حدد خصائص شعاع سرعة مركز عطالة G عند اللحظة $t = 2.25s$.

4. جد عبارة الطاقة الكلية للجملة (جلة+الأرض) عند اللحظتين المذكورتين سابقا بدلالة كل من v_0 ، h ، g و m (كتلة الجلة). ماذا تستنتج؟
(نعتبر مستو سطح الأرض مرجعا لقياس الطاقة الكامنة الثقالية).

المعطيات : $g = 9,8 m.s^{-2}$

