



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة عددية

4

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 08

① نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 1$$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② احسب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,2)$ و $g(-0,1)$ إلى 10^{-1} .

③ استنتج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $[-0,2; -0,1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$.

④ استنتج إشارة الدالة g على المجال $[-1, +\infty[$.

② نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

① أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

② عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $[-1, +\infty[$ يكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

③ أ/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) .

④ أ/ بين أنه من أجل كل x من $[-1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2.

⑥ بين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

⑦ عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.

③ نعتبر الدالة المعرفة على $[-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x > -1 \\ f(-x-2) & ; x < -1 \end{cases}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

① بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني (C_h) .

② (نقبل أن $f(\alpha) \approx -0,1$) ، مثل بياناً (C_f) ، ثم استنتج التمثيل البياني لـ (C_h) .

① دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^3 + 6x^2 + 7x + 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(2 + \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] \\ &= +\infty \\ \bullet f(-1) &= 2(-1)^3 + 6(-1)^2 + 7(-1) + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2 + 12x + 7$$

لدينا:

$$\Delta = 12^2 - 4(6)(7) = -24$$

$$\Delta < 0$$

ومنه المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

$$g'(x) > 0 \text{ إذن}$$

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-2	$+\infty$

② حساب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0.2)$ و $g(-0.1)$ إلى 10^{-1} :

$$g(-0.1) \cong 0.1, \quad g(-0.2) \cong -0.1$$

③ استنتاج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2; -0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-1, +\infty[$

$$g(-0.2) \times g(-0.1) < 0 \text{ ولدينا:}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2; -0.1[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

④ استنتاج إشارة الدالة g على المجال $[-1, +\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

① أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{0^+} \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

② تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c :

$$\begin{aligned}f(x) &= ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1)^2 + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b+c)x + b}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 4 \\ a + 2b + c = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = 2x - \frac{x}{(x+1)^2}$$

③ أ/ تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \frac{x}{(x+1)^2} - 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{(x+1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) :

ندرس إشارة الفرق $(f(x) - y)$:

$$f(x) - y = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$

ومنه:

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y = -x$	+	0	-

الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-1; 0[$.
- (C_f) يقطع (D) في المبدأ $(0; 0)$.
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]0; +\infty[$.

④ أ/ تبين أنه من أجل كل x من $]-1, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(6x^2 + 8x + 1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3 + 4x^2 + x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(6x^2 + 8x + 1)(x+1) - 2(2x^3 + 4x^2 + x)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x+1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا:

$$x \in]-1; +\infty[\text{ لما } (x+1)^3 > 0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

⑤ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2 :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ &= \frac{55}{9}(x - 2) + \frac{34}{9} \\ &= \frac{55}{9}x - 2\left(\frac{55}{9}\right) + \frac{34}{9} \\ &= \frac{55}{9}x - \frac{76}{9}\end{aligned}$$

⑥ تبين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{g'(x)(x+1)^3 - 3(x+1)^2 g(x)}{(x+1)^6} \\ &= \frac{g'(x)(x+1) - 3g(x)}{(x+1)^7} \\ &= \frac{(6x^2 + 12x + 7)(x+1) - 3(2x^3 + 6x^2 + 7x + 1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-2x + 4}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

لدينا المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف في النقطة A ذات

الفاصلة 2

⑦ تعيين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل:

▶ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ◀

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2} = 0 \\
 &\Rightarrow 2x^3 + 4x^2 + x = 0 \\
 &\Rightarrow x(2x^2 + 4x + 1) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

لدينا: $2x^2 + 4x + 1 = 0$

ومنه:

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{4} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 x_2 &= \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{4} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$x_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ مرفوض، لأنه خارج المجال $]-1, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي: $s = \left\{0; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

اذن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في النقط ذات الفواصل 0 و $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3

① تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني (C_h) :

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$



- اثبات أن $[2(-1) - x] \in D_h$

لدينا $]-1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ معناها: $x < -1$ أو $x > -1$

معناه: $-x > 1$ أو $-x < 1$

معناه: $-2 - x > -1$ أو $-2 - x < -1$

ومنه: $(-2 - x) \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

- اثبات $h(2(-1) - x) = h(x)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} h(-2 - x) &= \begin{cases} f(-2 - x) & ; \quad -2 - x > -1 \\ f(-(-2 - x) - 2) & ; \quad -2 - x < -1 \end{cases} \\ \Rightarrow h(-2 - x) &= \begin{cases} f(-2 - x) & ; \quad -x > 1 \\ f(2 + x - 2) & ; \quad -x < 1 \end{cases} \\ \Rightarrow h(-2 - x) &= \begin{cases} f(-2 - x) & ; \quad x < -1 \\ f(x) & ; \quad x > -1 \end{cases} \\ \Rightarrow h(-2 - x) &= h(x) \end{aligned}$$

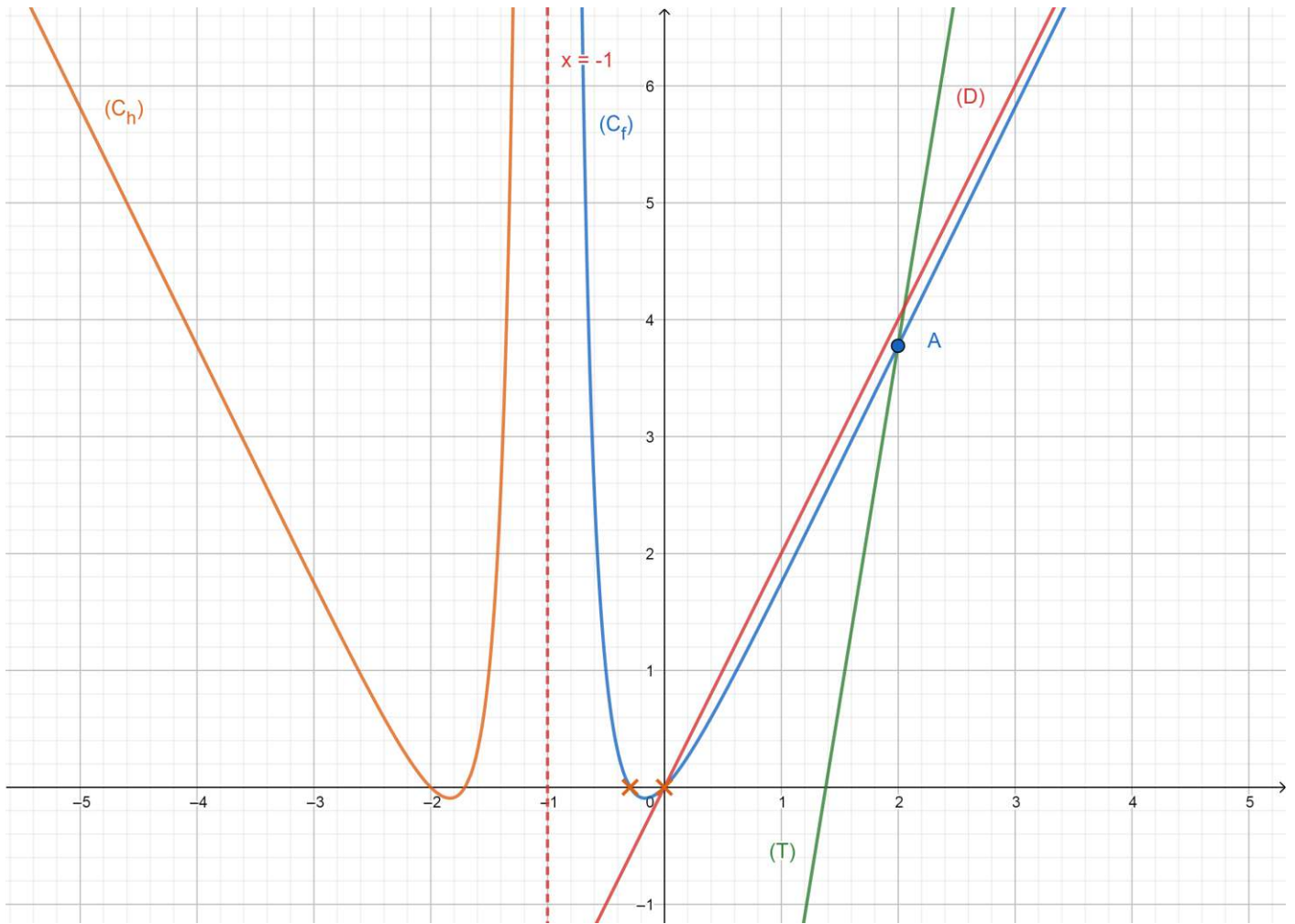
ومنه المستقيم $x = -2$ محور تناظر ل (C_h)

② التمثيل البياني:

لدينا:

لما $x > -1$ المنحني (C_h) ينطبق على المنحني (C_f)
ولما $x < -1$ المنحني (C_h) يناظر المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم $x = -1$
خطوات إنشاء (C_f) و (C_h) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = 2x$
- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم (C_f)
- ثم نرسم (C_h)



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶