



درس شامل حول المرح في المستوى

مرح نقطتين.

تعريف مرجح نقطتين: لتكن A و B نقطتين متميزتين وليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$.

(1) إذا كانت نقطة A مرفقة بالعدد الحقيقي α الثنائية $(A; \alpha)$ تسمى نقطة مثقلة.

(2) الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين.

(3) النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

(4) إذا كان $\alpha = \beta \neq 0$

فإن G تسمى مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B .

وفي هذه الحالة نأخذ $\alpha = \beta = 1$.

النقطة G منتصف القطعة $[AB]$.

(5) إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن النقطة A ، B و G على استقامة واحدة.

(6) إذا كانت A منطبقة على B فإن G ينطبق على A .

خواص

(1) وحيدة G

$$\text{لأن } \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \text{ إنشاء } G$$

(4) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$

حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

أي: (إذا ضربنا المعاملات في نفس العدد الحقيقي غير المعدوم لا يتغير المرح).

(5) من أجل كل نقطة M من المستوى،

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$$

ملاحظة:

إذا كان المرح G منتصف القطعة $[AB]$ فإن من أجل كل نقطة M $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MG}$

احداثيات المرح: إذا كان $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ و $G(x_G; y_G)$

فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

حالات خاصة: إذا كانت النقطة G منتصف القطعة $[AB]$ ، فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_G = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

مرجح ثلاث نقط.

تعريف مرجح ثلاث نقط: A, B, C ثلاث نقط: α, β, γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

نسمي مرجح النقط A, B, C المرفقة بالمعاملات α, β, γ على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$.

(1) إذا كانت نقطة C مرفقة بالعدد الحقيقي γ الثنائية (C, γ) تسمى نقطة مثقلة.

(2) الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ تسمى جملة ثلاث نقط مثقلة.

(3) G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

(4) إذا كان $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$

فإن G تسمى مركز المسافات المتساوية للنقط A, B, C .

وفي هذه الحالة نأخذ $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

وإذا كانت النقط A, B, C ليست في استقامة

فإن G مركز ثقل المثلث ABC .

(5) إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ وكانت النقط A, B, C في استقامة فإن النقط

G في استقامة.

(6) إذا كانت A منطبقة على B و C فإن G ينطبق عليهم

خواص $G(1)$ وحيدة

$$\text{لأن } \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$

(4) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

أي: (إذا ضربنا المعاملات في نفس العدد الحقيقي غير المعدوم لا يتغير المرجح).

(5) من أجل كل نقطة M من المستوي،

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}$$

ملاحظة: إذا كان المرجح G مركز ثقل المثلث ABC فإن من أجل كل نقطة M $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

خاصية التجميع:

مبرهنة:

G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب. إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ وكانت النقطة D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.

فإن: G مرجح النقطتين D و C المرفقة بالمعاملات $\alpha + \beta$ و γ على الترتيب.

احداثيات المرجح: إذا كان $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ ، $C(x_C; y_C)$ و $G(x_G; y_G)$ فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

حالات خاصة: إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC ، فإن:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

مرجح عدة نقط واستعمالات المرجح

يُمكن تعريف وبنفس الطريقة جملة n نقطة مثقلة).

مرجح عدة نقط (مرجح n نقطة حيث $n > 3$)

يُمكن التعميم. الخواص المعروفة في مرجح ثلاث نقط تبقى صحيحة في مرجح n نقطة.

تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح.

الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي k المجموعة (Γ_k) مجموعة النقط M من المستوي التي

$$\|\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}\| = k \text{ تحقق}$$

إذا كان لدينا: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

$$MG = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|} \text{ نجد: (هي } G \text{ المرجح)}$$

$$k > 0$$

$$k = 0$$

$$k < 0 \text{ في حالة}$$

فإن:

$$M = G / (\Gamma_k) = \{ \} \text{ أي: } M \text{ تنطبق على } G$$

$$(\Gamma_k) = \{G\}$$

المجموعة (Γ_k) هي دائرة مركزها G مرجح الجملة المثقلة

$$.r = \frac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|} \{ (A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) \} \text{ ونصف قطرها}$$

سلسلة تمارين حول المرجح في المستوي

التمرين رقم (01):

ABC مثلث

$$(1) \quad \vec{AI} = \frac{4}{5} \vec{AB} \quad \text{نقطة } I \text{ من المستوي معرفة كما يلي:}$$

1. بين أن النقطة I هي مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما.

2. أنشئ النقطة I

$$(2) \quad J \text{ مرجح الجملة المثقلة } \{(B; 2), (C; -1)\} \text{ أنشئ النقطة } J$$

$$(3) \quad G \text{ مرجح الجملة المثقلة } \{(A; 1), (B; 4), (C; -2)\} \text{ أنشئ النقطة } G$$

$$(4) \quad \text{نسمي } (E) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق } \|\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = 5 \|\vec{2MB} - \vec{MC}\|$$

$$(5) \quad \text{و } (F) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق: } \|\vec{MA} + 4\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = \|\vec{4MA} - 4\vec{MC}\|$$

1. عين ثم أنشئ كلا من المجموعتين (E) و (F) .

التمرين رقم (02):

ليكن ABCD مربعا مركزه O و G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 2), (C; 3), (D; 6)\}$

1) أنشئ المرجح الجملة $\{(A; 1), (C; 3)\}$ و المرجح الجملة $\{(B; 2), (D; 6)\}$.

2) بين أن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب ثم أنشئ G

3) لتكن M نقطة من المستوي. عين ثم أنشئ المجموعة (E) للنقط M التي تحقق :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD}\| = 12 \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

4) المستوي منسوب إلى معلم $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$

• اوجد إحداثي G.

• اوجد إحداثي G' مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 3), (B; 6), (C; 1), (D; 2)\}$

• استنتج أن النقط O، G، G' في استقامية

التمرين رقم (03):

ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A حيث: $AB = AC = 4cm$

$$1. \quad \vec{AG} = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{AC}) \quad \text{نعرف النقطة } G \text{ بالعلاقة:}$$

بين أن النقطة G مرجح للنقط A، B، C المرفقة بالمعاملات α, β, γ على الترتيب يطلب تعيينها.

2. لتكن M نقطة كيفية من المستوي.

$$أ. \text{ عبر عن الشعاع } \vec{MG} \text{ بدلالة الشعاع } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

$$ب. \text{ بين أنه يمكن كتابة الشعاع } \vec{MG} = -2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \text{ على الشكل } \vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}.$$

$$ج. \text{ أنشئ النقطة } D \text{ المعرفة بـ: } \vec{AD} = \vec{v}$$

د. أحسب AD و AG بالسنتيمتر.

3. استنتج من الأسئلة السابقة المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث

$$\|\vec{2MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{-2MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$$

التمرين رقم (04):

ليكن ABC مثلثا قائم في B ومتساوي الساقين حيث: $BA = 1$

نعتبر النقطتين G و H المعرفتين كما يلي: من أجل كل نقطة M من المستوي

$$3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MH} \quad , \quad 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG}$$

(1) عبر عن $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BH}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

(2) استنتج أن $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BH}$ مرتبطان خطيا.

(2) عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $2\|3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\|$

(4) بين أن الشعاع $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M

(5) إستنتج مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

مع تحديد عناصرها المميزة. (علما أن $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}$).

التمرين رقم (05):

$ABCD$ متوازي أضلاع ، m عدد حقيقي ، نرمز بـ G_m لمركز الجملة المثقلة $\{(A, 2m), (B, 1 - m), (C, 2 - m)\}$.

1. بين أن G_m موجود من أجل كل عدد حقيقي m .

2. أنشئ النقطة G_1 .

3. عين مجموعة النقط M التي تحقق: $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{3}{2}AB$

4. عبر عن $\overrightarrow{AG_m}$ بدلالة m و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

التمرين رقم (06):

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(-2, 0)$ ، $B(4, -2)$ ، $C(2, 3)$.

H نقطة معرفة كما يلي : $-\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{BH} = \vec{0}$ و G_α مركز الجملة $\{(A, \alpha), (B, \alpha^2 + 1), (C, 4\alpha - 1)\}$.

①- بين أن النقطة H هي مركز النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بمعاملين يطلب تعيينهما.

②- علم النقط A و B و C ، ثم أنشئ النقطة H .

③- عين قيم α التي من أجلها تكون G_α موجودة . ثم أنشئ النقطة G_1 .

④- بين أن النقط C و H ، G_1 على استقامة واحدة.

⑤- عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي في الحالتين الآتيتين :

$$. (E_1): \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$$

$$. (E_2): \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$$

التمرين رقم (07):

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB = 3cm$

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$

(1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 2), (B, -1), (C, -3)\}$

(2) عين مجموعة النقط (S) .

(3) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (S) .

(4) أنشئ المجموعة (S) .

التمرين رقم (08): المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) مثل النقط $A(\frac{3}{2}, -3), B(0, 4), C(3, 0)$.

(2) لتكن I مرجح الجملة $\{(A, -1), (B, -2)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B, 2), (C, 3)\}$ و G مرجح الجملة

$$\{(A, -1), (B, 2), (C, -3)\}$$

عين احداثي كل من النقط I, J, G ثم مثلها في المعلم السابق.

(3) عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق:

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \frac{3}{5} \|2\vec{MB} + 3\vec{MC}\|$$

(4) عين ثم أنشئ المجموعة (F) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق:

$$\|-\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 2 \|\vec{GA}\|$$

التمرين رقم (09): مثلث ABC مثلث كيفي

1. أنشئ النقط E, F, G حيث:

E مرجح الجملة المثقلة $\{(B, 3), (C, 1)\}$ ، F معرفة كمايلي: $\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ و G منتصف القطعة $[AB]$

2. عين العددين الحقيقيين α و β حيث F مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (C, \beta)\}$

3. لتكن النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3), (B, 3), (C, 1)\}$

(أ) بين أن النقط A, I, E على استقامة واحدة

(ب) بين أن المستقيمات $(AE), (BF), (CG)$ تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها

4. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق: $\|3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}\| = 7 \|\vec{MI} - \vec{MB}\|$
5. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق: $\|3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{7}{4} \|3\vec{MB} + \vec{MC}\|$

التمرين رقم (10): نعتبر ABC مثلث ، I و J نقطتين معرفتين كمايلي : $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ و $\vec{AJ} = 3\vec{AB}$

النقطة G نظيرة النقطة B بالنسبة لـ I

1. أنشئ المثلث ABC والنقطتين I و J
2. (أ) أكتب $\vec{GB}$ بدلالة $\vec{GA}$ و $\vec{AC}$
(ب) استنتج أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2); (B, -3); (C, 4)\}$
3. بين أن النقط G ، C و J على استقامة واحدة
4. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق: $\|2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 4\vec{MC}\| = 3 \|2\vec{MA} - 3\vec{MB}\|$

التمرين رقم (11): ABC مثلث. I نقطة من (AB) حيث $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

G نقطة من (IC) حيث $\vec{0} = \vec{2GC} - \vec{3GI}$. المستقيم (AG) يقطع المستقيم (BC) في H .

(1) ارسم شكلا.

(2) بين أن G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 1); (C, -2)\}$

(3) لتكن النقطة L مرجح الجملة $\{(B, 1); (C, -2)\}$

(4) أ- بين أن النقطة L تنتمي إلى المستقيمين (BC) و (AG)

ب- استنتج العدد الحقيقي k حيث $\vec{BH} = k\vec{BC}$

التمرين رقم (12): ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 8cm$ و $BC = 4cm$ و $AC = 6cm$.

(1) لتكن I مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4)\}$. أنشئ النقطة I .

(2) لتكن J مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, -1)\}$. أنشئ النقطة J .

(3) نرمز بـ G إلى مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$ بين أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ) .

(4) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = 5 \|\vec{2MB} - \vec{MC}\|$.

(5) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} + 4\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = 4 \|\vec{MA} - \vec{MC}\|$.

التمرين رقم (13): ABC مثلث متقايس الأضلاع. طول ضلعه $2cm$ و H منتصف القطعة $[AC]$

(1) أنشئ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1); (B, -4); (C, 1)\}$

(2) عين و أنشئ مجموعات النقط M من المستوي في كا حالة من الحالات التالية:

$$\| \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 4 \dots\dots\dots (E_1)$$

$$\| \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \| \dots\dots\dots (E_2)$$

$$\| \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| \dots\dots\dots (E_3)$$

التمرين رقم (14): ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. نعتبر النقطتين I و J حيث I مرجح $(A, -\frac{1}{2})$ و J مرجح $(A, 2)$ و $(D, -3)$

(1) أنشئ النقطتين I و J .

$$\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} \text{ و } \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$

(3) بين أن النقط C ، I و J في استقامية.

(4) لتكن K منتصف القطعة $[DJ]$ و L نقطة حيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BL}$

أ- بين أن C منتصف $[KL]$.

ب- بين أن (KL) و (BD) متوازيان.

$$2\|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\|$$

(5) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

التمرين رقم (15): ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 8cm$ و $BC = 4cm$ و $AC = 6cm$.

(1) لتكن I مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4)\}$. أنشئ النقطة I .

(2) لتكن J مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, -1)\}$. أنشئ النقطة J .

(3) نرمز بـ G إلى مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$ بين أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ) .

$$\| \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} \| = 5 \| 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$$

(4) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\| \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \| = 4 \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \|$$

(5) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث:

التمرين رقم (16): المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) مثل النقط $A(\frac{3}{2}, -3)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(3, 0)$.

(2) لتكن I مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, -2)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, 3)\}$ و G مرجح الجملة

$\{(A, -1); (B, 2), (C, -3)\}$ عين احداثي كل من النقط I, J و G ثم مثلها في المعلم السابق.

(3) عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق:

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \frac{3}{5} \|2\vec{MB} + 3\vec{MC}\|$$

(4) عين ثم أنشئ المجموعة (F) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق:

$$\|-\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 2 \|\vec{GA}\|$$

التمرين رقم (17): $ABCD$ مربع طول ضلعه $2cm$.

(1) أنشئ النقطتين I و J حيث: B مرجح الجملة $\{(I, -2); (A, 1)\}$ و J منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

(2) لتكن M نقطة كيفية من المستوي، وليكن $\vec{u}$ الشعاع المعرف كما يلي: $\vec{u} = \vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$.

(أ) بين أن الشعاع $\vec{u}$ ثابت (مستقل عن M).

(ب) استنتج أن $\vec{u} = -2\vec{AB}$.

(3) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}\|$$

(أ) بين أن النقطتين I و J تنتميان الى (γ) .

(ب) عين طبيعة المجموعة (γ) ثم أنشئها.

التمرين رقم (18): ليكن $(ABCD)$ متوازي أضلاع. ولتكن النقطتين I و J حيث:

I مرجح الجملة $\{(A; -\frac{1}{2}); (B; \frac{3}{2})\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; 2); (D; -3)\}$

(1) أنشئ النقطتين I و J

(2) بين أن: $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{BC}$ و $\vec{CJ} = 2\vec{AD} - \vec{DC}$

(3) بين أن النقط C, I, J على استقامة واحدة

(4) لتكن K منتصف القطعة $[DJ]$ و L نقطة حيث: $\vec{AB} = \vec{BL}$

(أ) بين أن C منتصف $[KL]$

(ب) بين أن (KL) و (BD) متوازيان

التمرين رقم (19): A و B نقطتان من المستوى مرفقتان بالمعاملين $1 + 4\alpha^2 - 2\alpha$.

(1) عين α حتى تكون النقطة G_α مرجح A و B مرفقتين بالمعاملين $1 + 4\alpha^2 - 2\alpha$ على الترتيب.

(2) عين مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في $R - \{-1, 3\}$.

التمرين رقم (20): مثلث ABC مثلث I نقطة من (AB) حيث: $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

G نقطة من (IC) حيث $\vec{0} = 3\vec{GI} - 2\vec{GC}$. المستقيم (AG) يقطع المستقيم (BC) في H .

(1) ارسم شكلا.

(2) بين أن G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 1); (C, -2)\}$

(3) لتكن النقطة L مرجح الجملة $\{(B, 1); (C, -2)\}$

أ- بين أن النقطة L تنتمي إلى المستقيمين (BC) و (AG)

ب- استنتج العدد الحقيقي k حيث $\vec{BH} = k\vec{BC}$

التمرين رقم (21): مثلث ABC مثلث كيفي.

(1) لتكن I مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, -2)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, 3)\}$ و G مرجح الجملة

$\{(A, -1); (B, 2); (C, -3)\}$ أنشئ النقط I, J و G .

(2) عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق:

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \frac{3}{5} \|2\vec{MB} + 3\vec{MC}\|$$

عين ثم أنشئ المجموعة (F) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق:

$$\|-\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 2 \|\vec{GA}\|$$

التمرين رقم (22): لتكن النقط A, B, C و D إحداثياتها على الترتيب $(3; 3)$, $(-1; -1)$, $(-2; -3)$ و $(3; -3)$.

(1) عين إحداثيتي النقطة E بحيث يكون الرباعي $BCDE$ متوازي أضلاع.

(2) عين إحداثيتي النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1); (D, 1); (E, 1)\}$

(3) ليكن L مركز متوازي أضلاع $BCDE$. برهن أن النقط A, G و L في استقامة.

(4) أ) بين أن: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GD} = \vec{0}$

ب) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABD ؟

(5) لتكن I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[DE]$. برهن أن G مركز ثقل المثلث AIJ .

التمرين رقم (23):

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. نعتبر النقطتين I و J حيث I مرجح $(A, -\frac{1}{2})$ و J مرجح $(B, \frac{3}{2})$ و $(D, -3)$ و $(A, 2)$

(1) أنشئ النقطتين I و J .

(2) بين أن: $\vec{CJ} = 2\vec{AD} - \vec{DC}$ و $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{BC}$

(3) بين أن النقط I ، C و J في استقامية.

(4) لتكن K منتصف القطعة $[DJ]$ و L نقطة حيث: $\vec{AB} = \vec{BL}$

أ- بين أن C منتصف $[KL]$.

ب- بين أن (KL) و (BD) متوازيان.

(5) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق: $2\|\vec{MA} - 3\vec{MD}\| = \|\vec{MA} - 3\vec{MB}\|$

التمرين رقم (24): ABC مثلث متقايس الأضلاع. طول ضلعه $2cm$ و H منتصف القطعة $[AC]$

(1) أنشئ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1); (B, -4); (C, 1)\}$

(2) عين و أنشئ مجموعات النقط M من المستوى في كل حالة من الحالات التالية:

$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = 4 \dots \dots \dots (E_1)$

$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MC}\| \dots \dots \dots (E_2)$

$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| \dots \dots \dots (E_3)$

التمرين رقم (25): في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, i, j) ، نعتبر النقط A, B, C, G حيث:

$A(1, 3), B(1, 0), C(-2, 3)$ والنقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{A(2), B(-3), C(-1)\}$.

عين في كل حالة مما يلي النتيجة الصحيحة مع التبرير.

1. إحداثيا النقطة G هي:

$G\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ③

$G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ②

$G\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ①

2. النقطة A مرجح الجملة المثقلة $\{G(\alpha), B(\beta), C(\lambda)\}$ إذن :

$$\alpha = -2, \beta = 3, \lambda = 1 \quad \textcircled{3} \quad \alpha = 4, \beta = -6, \lambda = -2 \quad \textcircled{2} \quad \alpha = -2, \beta = -3, \lambda = -1 \quad \textcircled{1}$$

3. مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|2\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$

① دائرة ② مستقيم ③ مجموعة خالية ④ نقطة

فرع (2)

$EFNM$ مستطيل وتكن النقطة H مرجح الجملة المثقلة $\{E(1), F(3), N(1), M(1)\}$.

✓ أنشئ المستطيل $EFNM$ والنقطة H .

التمرين رقم (26): المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ثلاث نقط من المستوي C, B, A .

احداثياها $(-1, 3)$, $(2, -2)$, $(1, 2)$ على الترتيب.

1. بين ان النقط C, B, A ليست في استقامية.

2. نعتبر النقطة G مرجح النقط C, B, A المرفقة بالمعاملات 1, 3, -2 على الترتيب.

➤ احسب احداثي النقطة G ثم علم النقط C, B, A, G .

➤ عين ثم انشئ المجموعة (E) النقط M من المستوي بحيث: $\|\vec{MA} + 3\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$

➤ عين ثم انشئ المجموعة (T) النقط M من المستوي بحيث: $\|\vec{MA} + 3\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = 4$

التمرين رقم (27): A, B نقطتان متميزتان من المستوي و m عدد حقيقي.

(1) ناقش وجود النقطة G مرجح الجملة $\{(A, m^2 + 2); (B, m^2 + m - 3)\}$

(2) أنشئ G في الحالة $m = 0$ وفي الحالة $m = 1$

التمرين رقم (28): ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 8cm$ و $BC = 4cm$ و $AC = 6cm$.

(1) أ- لتكن I مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4)\}$. أنشئ النقطة I .

ب- لتكن J مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, -1)\}$. أنشئ النقطة J .

(3) نرمزب G إلى مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$

بين أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ) .

(4) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = 5 \|\vec{2MB} - \vec{MC}\|$.

(5) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} + 4\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = 4 \|\vec{MA} - \vec{MC}\|$.

التمرين رقم (29): ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A حيث: $AB = AC = 4cm$.

(1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$.

(2) لتكن M نقطة كيفية من المستوي.

أ- عبر عن الشعاع $\vec{2MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ بدلالة الشعاع $\vec{MG}$.

ب- بين أنه يمكن كتابة الشعاع $\vec{v} = -2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ على الشكل $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

ج- أنشئ النقطة D المعرفة بـ: $\vec{AD} = \vec{v}$.

د- أحسب AG و AD بالسنتيمتر.

(3) أ- استنتج من الأسئلة السابقة المجموعة E ، مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\|\vec{2MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{-2MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$$

ب - أنشئ المجموعة E .

التمرين رقم (30): المستوي منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن النقطة G مرجح النقط A, B, C و المرفقة بالمعاملات α, β, γ على

الترتيب. نضع $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

1- أثبت أن إحداثيا النقطة G هي $(x_G; y_G)$ حيث:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ و } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

2- أوجد إحداثيا النقطة G حيث $A(1, 1), B(0, -3), C(2, 4)$ و $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2$.

..... عطلة سعيدة

<https://www.facebook.com/groups/28704540>

الأستاذ: "تونس ن" يتمنى لكم التوفيق والنجاح

لا تنسونا من صالح دعائكم

البريد الإلكتروني: tounsi_nawri@yahoo.com