



**أسئلة**  
**الدوال الأصلية**  
**و الحساب التكاملي**  
**في البكالوريا**  
**مع حلولها**  
**لشعبة : علوم تجريبية**  
**من 2008 إلى 2019**

✍ إعداد و تقديم : خالد بخاخشة

# أسئلة الروال الأصلية والكاميرات

## التمرين [1] [إباك 2008] [1م]

- $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$  .
- $H$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان .
- عين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$  . استنتج الدالة الأصلية للدالة  $g$  والتي تنعدم عند القيمة 0 .

## التمرين [2] [إباك 2008] [2م]

- $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$  .
- أكتب  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x-1)^2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .
- عين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تحقق  $F(1) = 2$  .

## التمرين [3] [إباك 2009] [1م]

- $k$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي :  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$  ،  $(C_k)$  تمثيلها البياني .
- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $x = -\frac{1}{2}$  ،  $x = \frac{1}{2}$  ،  $y = 0$  .

## التمرين [4] [إباك 2009] [2م]

- $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .
- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $y = x - 1$  ،  $x = 0$  ،  $x = 1$  .

## التمرين [5] [إباك 2011] [1م]

- $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ :  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  ، و  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  .
- $\alpha$  عدد حقيقي . بين أن الدالة  $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x - \alpha)$  على المجال  $]\alpha; +\infty[$  .
- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$  ، ثم عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  .

## التمرين [6] [إباك 2011] [2م]

- $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = e^x - ex - 1$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .
- أحسب بدلالة  $\alpha$  ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما :  $x = \alpha$  ،  $x = 0$  .  $\alpha \in ]1,75; 1,76[$  و يحقق  $f(\alpha) = 0$  .
- أثبت أن :  $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$  (  $ua$  هي وحدة المساحات )

## التمرين [7] [إباك 2012] [1م]

- $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-\infty; 0[$  كما يلي :  $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .
- لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 0[$  كما يلي :  $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$  .
- بين أن  $g$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0[$  .

**التمرين [8] [باك 2012] [2م]**

$g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 - xe^x$ .

•  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = (ax + b)e^x$

- أ- عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^x$  على  $\mathbb{R}$ .  
 ب- إستنتج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

**التمرين [9] [باك 2015] [1م]**

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ .

- $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  والتي تحقق:  $F(1) = -3$ .  
 (1) بين أن منحنى الدالة  $F$  يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.  
 (2) بين أن  $x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln x$  على  $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة  $F$ .

**التمرين [10] [باك 2015] [2م]**

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ .

- تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$ .  
 • إستنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**التمرين [11] [باك 2016] [الدورة الأولى] [1م]**

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$ ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

• أ- جد دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

- ب- أحسب  $I_n$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$ ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 1$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = n$  حيث  $n$  عدد طبيعي ( $n > 1$ ).  
 ج- عين أصغر عدد طبيعي  $n_0$  بحيث إذا كان  $n > n_0$  فإن  $I_n > 2$ .

**التمرين [12] [باك 2016] [الدورة الأولى] [2م]**

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

•  $h$  و  $H$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = x + f(x)$  و  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ .

- (1) عين الأعداد الحقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  بحيث تكون الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$ .  
 (2) أ- أحسب التكامل التالي:  $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما وفسر النتيجة هندسيا.  
 ب- أحسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

**التمرين [13] [باك 2016] [الدورة الثانية] [1م]**

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

• بين أن الدالة  $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 0$  و  $x = 1$ .

**التمرين [14] [باك 2017] [الدورة العادية] [2م]**

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

•  $F$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$  .

تحقق أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما:  $x = 0$  و  $x = 1$  .

**التمرين [15] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [2م]**

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

•  $(\gamma)$  المنحنى الذي معادلته:  $y = e^{-x} - 2$  .

• ليكن  $n$  عددا طبيعيا و  $A(n)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\gamma)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = -e^n \text{ و } x = -e^{n+1} .$$

أحسب العدد الحقيقي  $l$  حيث:  $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$  .

**التمرين [16] [باك 2018] [1م]**

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

• باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة  $xe^{-x} \mapsto x$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$  .

• أحسب العدد  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلتهما:  $x = 1$  ،  $x = 3$  و  $y = 2x + 1$  .

**التمرين [17] [باك 2018] [2م]**

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

•  $n$  عدد طبيعي حيث  $n > 1$  ،  $I_n$  مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين

معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = n$  .

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n > 1$ :  $I_n = \ln(1 + n \ln n)$  .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  .

**التمرين [18] [باك 2019] [1م]**

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

•  $H$  الدالة المعرفة على المجال  $]3; +\infty[$  بـ:  $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$  حيث  $t$  متغير حقيقي موجب تماما .

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن عبارة  $H(x)$  بدلالة  $x$  .

ب- أحسب  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين:  $x = 3$  و  $x = 4$  .

## حلول مقترمة

### حل مقترح للتمرين [1]

- $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$  .
- $H$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان
- تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$  .
- الدالة  $H$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  ، و  $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$  ،
- $H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$  معناه :  $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$  ومنه نجد :  $\alpha = 1$  و  $\beta = 2$  .
- لدينا :  $g(x) = g(x) + 1 - 1 = H'(x) + 1$  ومنه الدالة الأصلية للدالة  $g$  من الشكل :  $G(x) = H(x) + x + c$
- الدالة الأصلية للدالة  $g$  والتي تنعدم عند 0 هي :  $G(x) = (x + 2)e^{-x} + x + 2$  .

### حل مقترح للتمرين [2]

- $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x + 1)^2}$  .
- كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x - 1)^2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .
- $$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^3 + 1}{(x + 1)^2} = x + 1 + \frac{1}{(x + 1)^2}$$
- تعيين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تحقق  $F(1) = 2$  .
- الدالة  $f$  مستمرة على  $]-1; +\infty[$  وبالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق  $F(1) = 2$  هي الدالة  $F$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ :
- $$F(x) = \int_1^x \left( t + 1 + \frac{1}{(t + 1)^2} \right) dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{t + 1} \right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x + 1} + 1$$
- ومنه :  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

### حل مقترح للتمرين [3]

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $x = -\frac{1}{2}$  ،  $x = \frac{1}{2}$  ،  $y = 0$  .
- $$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( -x + \frac{4}{x + 1} \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left( x + \frac{4}{x + 1} \right) dx$$
- $$= \left[ -\frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(x + 1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[ \frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(x + 1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 4 \ln 3$$

### حل مقترح للتمرين [4]

- $f$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .
- حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $y = x - 1$  ،  $x = 0$  ،  $x = 1$  .
- $$S = \int_0^1 [(x - 1) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln(x + 1))^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

### حل مقترح للتمرين [5]

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ :  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  ، و  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

• تبين أن الدالة  $h$  بحيث  $h(x) = (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $\ln(x - \alpha)$  على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[\alpha; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[\alpha; +\infty[$  :

$$h'(x) = 1 \times \ln(x - \alpha) + \frac{1}{x - \alpha} \times (x - \alpha) - 1 = \ln(x - \alpha)$$

• التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$  ،  
تعيين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$  ،  
وبالتالي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  من الشكل :

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + [(x-1)\ln(x-1) - x] - [(x+1)\ln(x+1) - x] = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$

### حل مقترح للتمرين [6]

الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = e^x - ex - 1$  .  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

• حساب ، بدلالة  $\alpha$  ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين  
معادلتيهما :  $x = \alpha$  ،  $x = 0$  .

$$A(\alpha) = -\int_0^\alpha f(x) dx = -\int_0^\alpha (e^x - ex - 1) dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x\right]_0^\alpha = 1 - \left(e^\alpha - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha\right)$$

• إثبات أن :  $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$  (  $ua$  هي وحدة المساحات )

لدينا :  $f(\alpha) = 0$  و منه  $e^\alpha - e\alpha - 1 = 0$  أي  $e^\alpha = e\alpha + 1$  وبالتالي :

$$A(\alpha) = -e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$$

### حل مقترح للتمرين [7]

الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$  كما يلي :

• لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$  كما يلي :

تبين أن  $g$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  و من أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6x}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x} = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = f(x)$$

ومنه الدالة  $g$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

### حل مقترح للتمرين [8]

$g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 - xe^x$ .

• الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = (ax + b)e^x$ .

أ- تعيين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^x$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ .

الدالة  $h$  أصلية للدالة  $x \mapsto xe^x$  يعني:  $h'(x) = xe^x$ ، ومنه بالمطابقة نجد:  $a = 1$  و  $b = -1$ . أي  $h(x) = (x - 1)e^x$ .  
ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ :

لدينا:  $g(x) = 1 - xe^x$  ومنه دالة أصلية للدالة  $g$  من الشكل:  $G(x) = x - (x - 1)e^x$ .

### حل مقترح للتمرين [9]

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ .

$F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  والتي تحقق:  $F(1) = -3$ .

• تبين أن منحنى الدالة  $F$  يقبل مماسين موازيين لحامل محاور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

$F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  يعني: من أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$ ،  $F'(x) = f(x)$ .

$F'(x) = 0$  تكافئ  $f(x) = 0$  تكافئ:  $x = 1$  أو  $x = e^2$ ، ومنه منحنى الدالة  $F$  يقبل مماسين موازيين لحامل محاور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و  $e^2$ .

• تبين أن  $x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln x$  على  $]0; +\infty[$ :

نضع:  $u(x) = x \ln x - x$

الدالة  $u$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ومن أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$ ،  $u'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$ .

ومنه الدالة  $u$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln x$  على  $]0; +\infty[$ .

إستنتاج عبارة الدالة  $F$ :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \left( \ln t - 2 - \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{t} \right) dt = \left[ t \ln t - t - 2t - \frac{1}{2}(\ln t)^2 - 2 \ln t \right]_1^x = (2 + x) \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 3x$$

### حل مقترح للتمرين [10]

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ .

• التحقق: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

• إستنتاج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

لدينا: من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ ،  $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$ .

ومنه  $f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2}e^{2x+2}$ .

وبالتالي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  من الشكل:  $F(x) = \frac{1}{2} \left[ -f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c$ .

أي:  $F(x) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c$ .

### حل مقترح للتمرين [11]

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

أ- إيجاد دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  على  $]0; +\infty[$  من الشكل:  $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$  . (لاحظ أن  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  من الشكل  $u' \times u$ )

ب- حساب  $I_n$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 1$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = n$  حيث  $n$  عدد طبيعي ( $n > 1$ ) .

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x - 1)] dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي  $n_0$  بحيث إذا كان  $n > n_0$  فإن  $I_n > 2$  .

$I_n > 2$  معناه  $(\ln n)^2 > 4$  أي  $\ln n > 2$  أو  $\ln n < -2$  (مرفوض) ومنه  $n > e^2$  وعليه: أصغر قيمة لـ  $n_0$  هي  $n_0 = 8$  .

### حل مقترح للتمرين [12]

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

أ-  $h$  و  $H$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$  و  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  .

(1) تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث تكون الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  :

دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  يعني: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $H'(x) = h(x)$  .

الدالة  $H$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

ومنه بالمطابقة نجد:  $a = -1$  ،  $b = -5$  و  $c = -7$  أي  $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$  .

(2) أ- حساب التكامل:  $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$  ، حيث  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  .

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx = [H(x)]_0^\lambda = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$

التفسير الهندسي:

$A(\lambda)$  يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  والمستقيمين اللذين

معادلتيهما  $x = 0$  و  $x = \lambda$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  .

ب-  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7$  .

### حل مقترح للتمرين [13]

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $] -1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

أ- تبيان أن الدالة  $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  على المجال  $] -1; +\infty[$  .

نضع:  $h(x) = \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$  ، الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $] -1; +\infty[$  ومن أجل كل  $x \in ] -1; +\infty[$  :

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1)] + \left( \frac{1}{x+1} \right) \times \left( \frac{-1}{x+1} \right) = \frac{1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادليهما  $x = 0$  و  $x = 1$

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[ \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] dx = \left[ e \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} [1 + \ln(x+1)] \right]_0^1 = \frac{1 + (2e-1)\ln 2}{2}$$

#### حل مقترح للتمرين [14]

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

•  $F$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$  .

- التحقق أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :

الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2 e^{1-x} = f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادليهما:  $x = 0$  و  $x = 1$  .

$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) \text{ u.a.}$$

#### حل مقترح للتمرين [15]

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني . المنحنى الذي معادلته:  $y = e^{-x} - 2$  .

•  $n$  عدد طبيعي و  $A(n)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\gamma)$  والمستقيمين اللذين معادليهما:

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n .$$

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left( -\frac{e}{x} \right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left( \frac{1}{x} \right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي  $l$  :  $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e$  .

#### حل مقترح للتمرين [16]

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

• تعيين دالة أصلية للدالة  $xe^{-x} \mapsto x$  على  $\mathbb{R}$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$  .

الدالة  $xe^{-x} \mapsto x$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  وبالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $F(x) = \int_1^x te^{-t} dt$  .

$$\text{نضع } u(t) = t \text{ ، } v'(t) = e^{-t} \text{ ومنه } u'(t) = 1 \text{ ، } v(t) = -e^{-t}$$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x) = [-te^{-t}]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومن الدالة الأصلية للدالة  $xe^{-x} \mapsto x$  على  $\mathbb{R}$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$  هي:  $F(x) = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$  .

• حساب العدد  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها:  $x = 1$  ،  $x = 3$  و  $y = 2x + 1$  .

$$A = \int_1^3 ((2x + 1) - f(x)) dx = \int_1^3 xe^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} \text{ (u.a.)}$$

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

•  $n$  عدد طبيعي حيث  $n > 1$  ،  $I_n$  مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = n$  و  $x = 1$  .

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n > 1$  :  $I_n = \ln(1 + n \ln n)$  .

لدينا :  $I_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left( \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) dx = \left[ \ln(1 + x \ln x) \right]_1^n = \ln(1 + n \ln n)$  (لاحظ أن  $f$  من الشكل :  $\frac{u'}{u}$ )

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  :

ندرس إشارة الفرق :  $I_{n+1} - I_n$

لدينا :  $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$

ومن أجل  $n > 1$  :  $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$  وبالتالي المتتالية  $(I_n)$  متزايدة تماما .

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]2; +\infty[ \cup ]2; 3]$  بـ :  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$  .  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

(1)  $H$  الدالة المعرفة على المجال  $]3; +\infty[$  بـ :  $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$  حيث  $t$  متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة  $H(x)$  بدلالة  $x$  .

نضع  $u(t) = \ln(t)$  ،  $v'(t) = 1$  و منه  $u'(t) = \frac{1}{t}$  ،  $v(t) = t$  ،

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x) = [t \ln t]_3^x - \int_3^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 3 \ln 3 - \int_3^x dt = x \ln x - 3 \ln 3 - [t]_3^x$$

ومنه  $H(x) = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3$  أي  $H(x) = x \ln x - 3 \ln 3 - (x - 3)$

ب- حساب  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين :  $x = 3$  و  $x = 4$  .

$$A = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x-2} + \ln x \right) dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x-2} \right) dx + \int_3^4 \ln x dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x-2} \right) dx + H(4) = [\ln|x-2|]_3^4 + H(4)$$

ومنه  $A = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)(u.a)$  أي  $A = \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3 + 3$

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020