



الشعب:

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

8

آخر تحدیث:

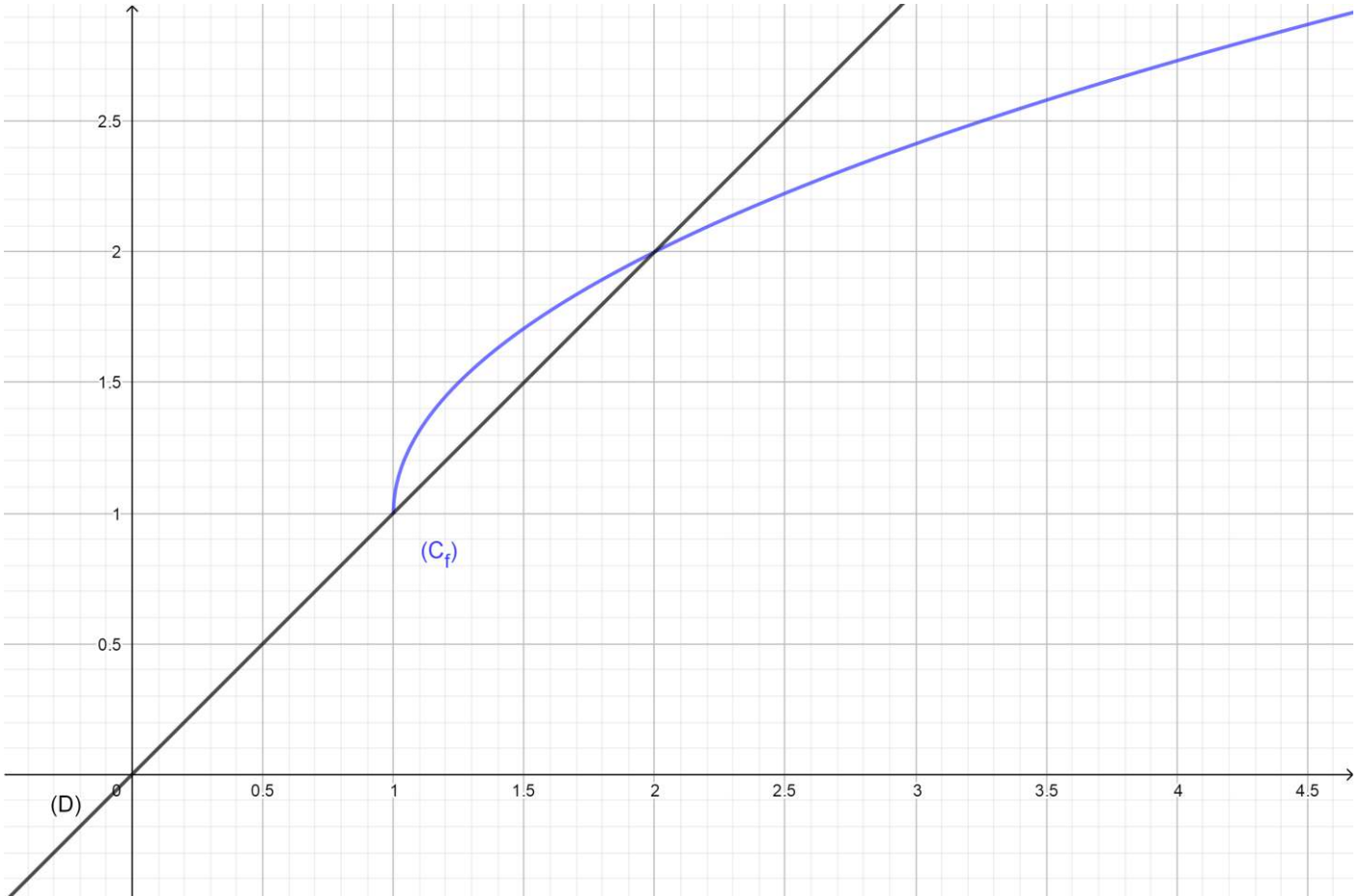
2021 / 01 / 31

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

وليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



ونعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

①

① باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (D) ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3

مبرزاً خطوط التمثيل.

② ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

②

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

② اثبت ان المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

③ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

③ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي كما يلي:

$$v_n = \ln(u_n - 1)$$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1/2$ وعين حدها الأول v_0 .

② اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ عين نهاية (u_n) .

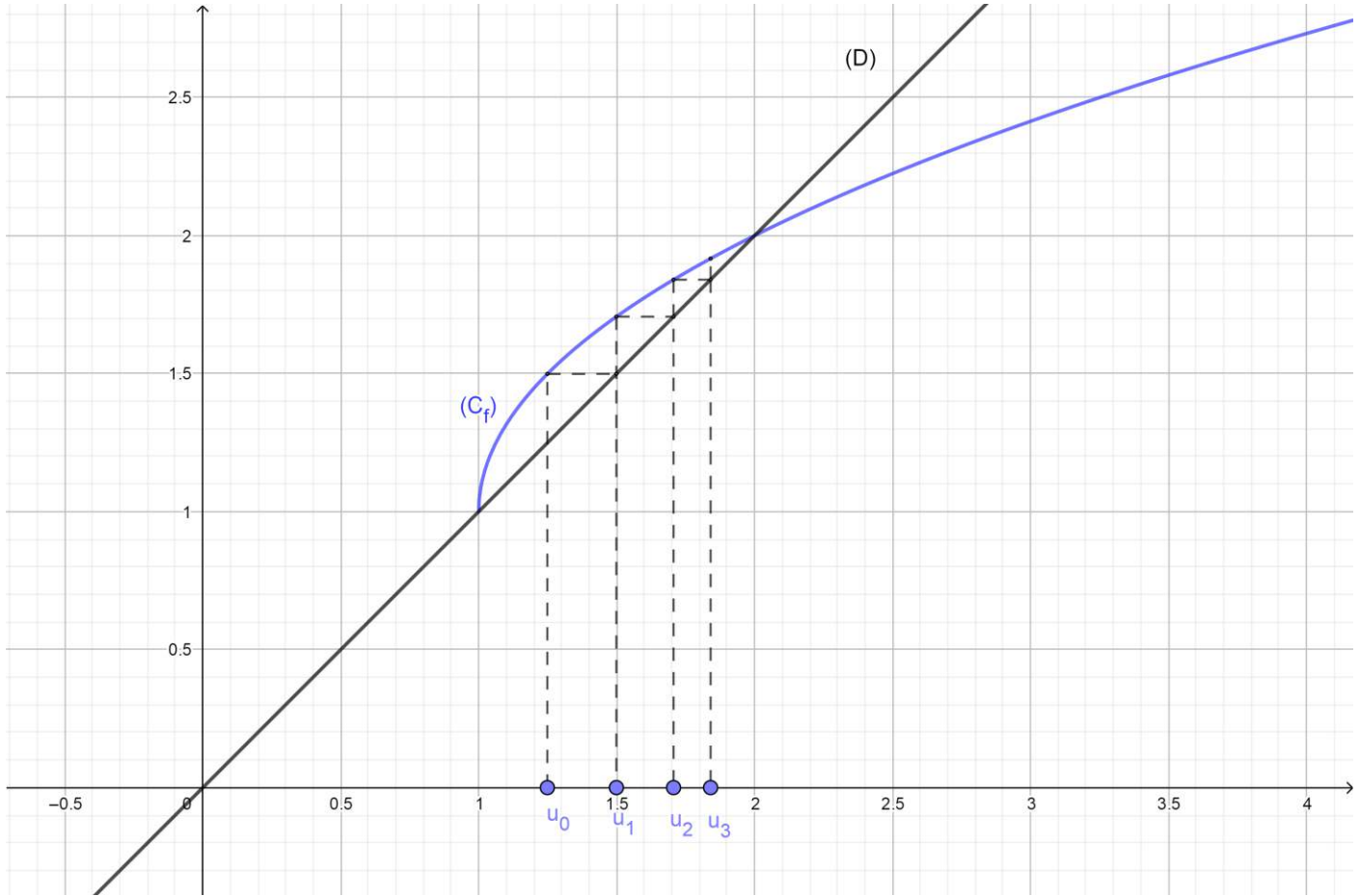
④ اكتب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$$

①

① تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 :



② وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

يظهر لنا من تمثيل الحدود الأولى للمتتالية (u_n) أنها متزايدة وتتقارب نحو القيمة 2 .

②

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n < 2$:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$1 < u_0 < 2 \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} < 2 \dots (*)$$

• نفرض أن $(1 < u_n < 2)$ ونثبت أن $(1 < u_{n+1} < 2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 1 < u_n < 2 &\Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < \sqrt{u_n - 1} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2 \\ &\Rightarrow 1 < f(u_n) < 2 \\ &\Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2 \dots (**) \end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد:

$$\boxed{1 < u_n < 2}$$

② اثبات ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n \\ &= \frac{(1 - u_n + \sqrt{u_n - 1})(1 - u_n - \sqrt{u_n - 1})}{1 - u_n - \sqrt{u_n - 1}} \\ &= \frac{(1 - u_n)^2 - (u_n - 1)}{1 - \sqrt{u_n - 1} - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2 - (u_n - 1)}{1 - \sqrt{u_n - 1} - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(u_n - 1 - 1)}{1 - \sqrt{u_n - 1} - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{1 - u_n - \sqrt{u_n - 1}} \\ &= \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n - 1 + \sqrt{u_n - 1}} \end{aligned}$$

بما أن: $(1 < u_n < 2)$

لدينا: $u_n - 1 \geq 0$ ومنه: $(u_n - 1 + \sqrt{u_n - 1}) \geq 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$\begin{aligned} -(u_n - 1)(u_n - 2) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} u_n - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ u_n - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_n = 1 \\ \text{أو} \\ u_n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

u_n	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$u_{n+1} - u_n$	-	0	+	0	-

إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

③ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 2 فهي متقاربة

3

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\&= \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1) \\&= \ln(\sqrt{u_n - 1}) \\&= \ln\left((u_n - 1)^{\frac{1}{2}}\right) \\&= \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) \\&= \frac{1}{2} v_n\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}v_0 &= \ln(u_0 - 1) \\&= \ln\left(\frac{5}{4} - 1\right) \\&= \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\&= -\ln 4\end{aligned}$$

اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -\ln(4)$

② كتابة عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n :

لدينا:

$$\boxed{v_n = -\ln(4) \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}v_n &= \ln(u_n - 1) \Rightarrow e^{v_n} = u_n - 1 \\&\Rightarrow u_n = e^{v_n} + 1 \\&\Rightarrow u_n = e^{-\ln(4) \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\&\Rightarrow \boxed{u_n = 4^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1}\end{aligned}$$

③ تعيين نهاية (u_n) :

$$\begin{aligned}\lim(u_n) &= \lim\left(4^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1\right) \\&= 1 + 1 \\&= \boxed{2}\end{aligned}$$

$$\lim \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 0$$

④ كتابة بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= -\ln(4) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= \ln(4) \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2 \ln(4) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right) \\ &= \boxed{\ln(16) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n &= (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) \\ &= e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} \\ &= e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} \\ &= e^{S_n} \\ &= e^{\ln(16) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right)} \\ &= \boxed{16^{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right)}} \end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶