

القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأستاذ: بوخلاق محمد

الكفاءات المستهدفة

- (1) إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر.
- (2) استعمال خواص قابلية القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة .
- (3) استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين .
- (4) استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين .
- (5) حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر

قابلية القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة :

- (1) **تعريف :** a و b عددين صحيحان و b غير معدوم . القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a . نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b .

أمثلة :

$$(1) \quad 3|36$$

$$(2) \quad (-3)|36$$

$$(3) \quad 5|(-55)$$

$$(4) \quad (-11)|(-66)$$

ملاحظة : في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $(-a)$ نفس القواسم .

(2) خواص :

- خاصية 1 :** a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان :

إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k و k' أعداد صحيحة و بالتالي $c = (kk')a$ وبما أن (kk') عدد صحيح فإن a يقسم c .

- خاصية 2 :** a و b عددين صحيحان و a غير معدوم .
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb .

البرهان :

إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و بالتالي $mb = m(ka) = k(ma)$ وبما أن ma عدد صحيح فإن a يقسم mb .

- خاصية 3 :** a و b عددين صحيحان و a غير معدوم .
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb .

البرهان :

إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و بالتالي $mb = m(ka) = k(ma)$ وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

طرائق

تمرين 1 :

عين الأعداد الصحيحة n حيث : 13 يقسم $(n+7)$.

الحل : $13 \mid (n+7)$ يوجد عدد صحيح k حيث $n+7=13k$ إذن $n=13k-7$.
الأعداد الصحيحة n والتي تحقق 13 يقسم $(n+7)$: هي الأعداد الصحيحة من الشكل $n=13k-7$ حيث k صحيح .

تمرين 2 :

عين الأعداد الطبيعية n حيث : $(2n-9)$ يقسم 6 .

الحل : مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 6 هي $\{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$.
 $(2n-9)$ يقسم 6 معناه $(2n-9) = -6$ أو $(2n-9) = -3$ أو $(2n-9) = -2$ أو $(2n-9) = -1$ أو $(2n-9) = 1$ أو $(2n-9) = 2$ أو $(2n-9) = 3$ أو $(2n-9) = 6$. معناه $2n=7$ أو $2n=8$ أو $2n=10$ أو $2n=11$ أو $2n=12$ أو $2n=15$. معناه $n=3$ أو $n=4$ أو $n=5$ أو $n=6$.
معناه $n \in \{3; 4; 5; 6\}$.

تمرين 3 :

عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$(4n+7)$ يقسم $(n+4)$.

الحل :

n عدد صحيح حيث : $(4n+7)$ يقسم $(4n+7)$ لأن $(4n+7) = 1(4n+7)$ (1) ومن جهة أخرى $(4n+7)$ يقسم $(n+4)$ إذن $(4n+7)$ يقسم $4(n+4)$ وعليه يوجد عدد صحيح k بحيث :
(2) $(4n+16) = k(4n+7)$ وبطرح (1) من (2) نجد :
 $(4n+16) - (4n+7) = k(4n+7) - (4n+7)$ معناه $9 = (k-1)(4n+7)$ أي 9 يقسم $(4n+7)$.
مجموعة قواسم صحيحة للعدد 9 هي $\{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$.
إذن $(4n+7) \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$. معناه $4n \in \{-16; -10; -8; -6; -4; 2\}$ معناه $n \in \{-4; -2; -1\}$.
 $(4n+7)$ يقسم $(n+4)$ إذا وفقط إذا كانت $n \in \{-4; -2; -1\}$.

خاصية 4 : a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n . العدد a يقسم

$$mb + nc$$

البرهان :

إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $b = ka$ و $c = k'a$ حيث k و k' عددان صحيحان وعليه :

$$mb + nc = mka + nk'a = (mk + nk')a$$

بما أن $(mk + nk')$ عدد صحيح فإن a يقسم $(mb + nc)$.

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة

(1) القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة:

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة $(q; r)$ من الأعداد الصحيحة حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q; r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

البرهان:

العدد a إما مضاعف لـ b وإما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $qb \leq a < (q+1)b$ وبالتالي نستنتج من هذا أن $0 \leq a - qb < b$.
نضع $r = a - qb$ إذن $a = bq + r$ مع $0 \leq r < b$.
ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح b غير معدوم . نجد : $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$.

(2) القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

تعريف: a و b عدنان طبيعيين غير معدومين D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .
 $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b . ونرمز له بالرمز $PGCD(a; b)$ (Plus Grand Commun Diviseur).

ملاحظات:

- مجموعة قواسم 0 هي الأعداد الصحيحة غير معدومة .
 - $PGCD(a; a) = a$ و $PGCD(1; a) = 1$ و $PGCD(0; a) = a$ (غير معدوم)
- مثال:** $D_9 = \{1; 3; 9\}$ و $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. وبالتالي $PGCD(9; 12) = 3$.

طرائق

تمرين 1:

a و b عدنان صحيحان .
أثبت أن إذا كان 2 يقسم $a^2 + b^2$ فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

الحل:

2 يقسم $a^2 + b^2$ معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $a^2 + b^2 = 2k$.
لدينا : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2k + 2ab = 2(k+ab)$. بما أن $(k+ab)$ عدد صحيح فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

تمرين 2:

عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن : $5ab - b^2 = 49$.

الحل :

لدينا : $5ab - b^2 = 49$ تكافئ $b(5a - b) = 49$. (b و $(5a - b)$ قواسم للعدد 49) تكافئ ($(b = 49)$ و $(5a - b) = 1$) أو ($b = 1$ و $(5a - b) = 49$) أو ($(b = 7)$ و $(5a - b) = 7$) أو ($(b = -1)$ و $(5a - b) = -1$) أو ($(b = -7)$ و $(5a - b) = -7$) أو ($(b = -49)$ و $(5a - b) = -49$) .
($(b = 49)$ و $(a = 10)$) أو ($(b = 1)$ و $(a = 10)$) أو ($(b = 7)$ و $(a = \frac{14}{5})$) أو ($(b = -1)$ و $(a = -10)$) أو ($(b = -7)$ و $(a = -\frac{14}{5})$) أو ($(b = -49)$ و $(a = -10)$) .
الأعداد الصحيحة a و b التي تحقق المعادلة $5ab - b^2 = 49$ هي الثنائيات $(10; 49)$ ، $(10; 1)$ ، $(-10; -49)$ ، $(-10; -1)$.

تمرين 3 : a عدد صحيح . باقي قسمة a على 12 هو 9 .

(1) ماهو باقي قسمة العدد a على 6 ؟

(2) ماهو باقي قسمة العدد a على 3 ؟

الحل :

باقي قسمة a على 12 هو 9 معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $a = 12k + 9$.

(1) باقي قسمة العدد a على 6 :

لدينا : $a = 12k + 9 = 2 \times 6k + 6 + 3 = 6(2k + 1) + 3 = 6k' + 3$ حيث $k' = (2k + 1)$. عدد

صحيح وبالتالي باقي قسمة العدد a على 6 هو 3 .

(2) باقي قسمة العدد a على 3 :

لدينا : $a = 12k + 9 = 3 \times 4k + 3 \times 3 = 3(4k + 3) = 3k'' + 0$ حيث $k'' = (4k + 3)$. عدد صحيح

وبالتالي باقي قسمة العدد a على 3 هو 0 .

تمرين 4 :

m و n عدنان طبيعيان باقي قسمتهما على 17 هما على الترتيب 8 و 12 . عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $(n + m)$ ، nm ، و m^2 على 17 .

(3) خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

خاصية 1: a و b عدنان طبيعيين غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b .
 $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$.

البرهان :

نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(b; r) = d'$.
 نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي إذن $r = a - bq$.
 لدينا d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $(a - bq)$ أي d يقسم r . إذن نجد d قاسم مشترك للعددين b و r .
 ومن جهة أخرى d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $(bq + r)$ أي d' يقسم a . إذن نجد d' قاسم مشترك للعددين a و b .
 إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$.

خوارزمية إقليدس :

a و b عدنان طبيعيين غير معدومين حيث $a > b$ بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ مع $0 \leq r_1 < b$ حيث q_1 و b_1 عدنان طبيعيين .
 (*) إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a; b) = b$.
 (*) إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عدد طبيعيين .
 (*) إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = r_1$.
 (*) إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = PGCD(r_1; r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$ حيث q_3 و r_3 عدد طبيعيين .
 (*) نواصل هكذا حتى نجد باقيًا معدوماً . نسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه :
 $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = PGCD(r_1; r_2) = \dots = PGCD(r_n; 0) = r_n$.

تسمى هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين **بطريقة خوارزمية إقليدس** .

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمة خوارزمية إقليدس .

طرائق

تمرين 1 :

- (1) عین $PGCD(182;126)$.
 (2) باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد عددين صحيحين α و β حيث $182\alpha + 126\beta = 14$.

الحل :

- (1) تعین $PGCD(182;126)$.

الحاصل		1	2	14
المقسوم والقاسم	182	126	56	4
الباقى		56	4	0

إذن $PGCD(182;126) = 14$.

- (2) باستعمال خوارزمية إقليدس نبحت عن عددين صحيحين α و β حيث $182\alpha + 126\beta = 14$.
 لدينا $126 \times 1 - 56 \times 2 = 14$ إذن $126 \times 1 - (182 - 126) \times 2 = 14$ وبالتالي
 $182(-2) + 126(3) = 14$ إذن $(\alpha; \beta) = (-2; 3)$.

خاصية 3: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين k عدد طبيعي غير معدوم .

$$PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$$

البرهان :

نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(ka; kb) = d'$. عدنان طبيعيان غير معدومين .
 لدينا d يقسم a ومنه kd يقسم ka ولدينا كذلك d يقسم b ومنه kd يقسم kb وبالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة $d' = k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي .

كذلك d' يقسم ka و kb ومنه $d' = k'(kd)$ يقسم ka و kb وبالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b وبالتالي $k' = 1$ ومنه $d' = kd$.
 نتيجة : $PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$.

تعريف : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .
 يكون العدنان و أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر

يساوي 1 .

خاصية 4 : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b نضع $a = da'$ و $b = db'$. يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العدنان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

البرهان : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . d قاسمهما المشترك الأكبر .

(*) نضع $a = da'$ و $b = db'$.

وعليه $d = PGCD(a; b) = PGCD(da'; db') = d \times PGCD(a'; b')$.

بما أن d غير معدوم فإن : $PGCD(a'; b') = 1$.

(*) عكسيا : نعتبر $PGCD(a'; b') = 1$. وبالتالي $PGCD(a; b) = k \times PGCD(a'; b') = d$.

3) تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين :

تعريف : a و b عددان صحيحان غير معدومين .
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث :
 $d = PGCD(|a|; |b|)$

خاصية : a و b عددان صحيحان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم .
 $PGCD(ka; kb) = |k| \times PGCD(a; b)$

ملاحظة : a و b عددان صحيحان غير معدومين .
إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a; b) = |b|$

طرائق

تمرين 1 :

عين $PGCD(54; 82)$ ثم استنتج $PGCD(5400; 8200)$

الحل :

$$(1) \quad PGCD(54; 82) = 2$$

$$(2) \quad PGCD(5400; 8200) = PGCD(54 \times 100; 82 \times 100) = 100 \times PGCD(54; 82) = 100 \times 2 = 200$$

تمرين 2 :

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث
$$\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a; b) = 9 \end{cases}$$

الحل :

بما أن $PGCD(a; b) = 9$ إذن $a = 9a'$ و $a = 9b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$$a + b = 72 \text{ معناه } 9a' + 9b' = 72 \text{ وبالتالي } a' + b' = 8$$

$$\text{وعليه } (a'; b') \in \{(1; 7), (3; 5), (5; 3), (7; 1)\}$$

خلاصة : مجموعة الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق الجملة : $\{(9; 63), (27; 45), (45; 27), (63; 9)\}$

ملاحظة : هناك ثنائيات $(a'; b')$ ، تحقق $a' + b' = 8$ لكن a' و b' ليست أولية فيما بينهما .

$$\text{مثلا } (4; 4).$$

تمرين 3 :

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث
$$\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases}$$

الحل :

بما أن $PGCD(a; b) = 6$ إذن $a = 6a'$ و $a = 6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما
معناه $a \times b = 72$ و $(6a') \times (6b') = 360$ وبالتالي $a' \times b' = 10$.
وعليه $(a'; b') \in \{(1; 10), (2; 5), (5; 2), (10; 1)\}$.
خلاصة : مجموعة الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق الجملة هي :
 $\{(6; 60), (12; 30), (30; 12), (60; 6)\}$.

تمرين bac 2008 :

n عدد طبيعي أكبر من 5 .
(1) a و b عددان طبيعيين حيث $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$.
أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟
ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $(n + 5)$ مضاعفا للعدد 7
ت) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$.
(2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :
 $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$.
أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $(n - 5)$.
ب) عين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

الحل :

(1) أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :
لدينا : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$. نلاحظ : $2n + 3 = 2(n - 2) + 7$ أي $b = 2a + 7$ إذن
 $b - 2a = 7$.
نضع : $PGCD(a; b) = d$ وبالتالي d/b و d/a إذن d/b و $d/2a$ وبالتالي $d/(b - 2a)$ أي
 $d/7$.
إذن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b : هي قواسم العدد 7 أي $\{1; 7\}$.
ب) نبين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $(n + 5)$ مضاعفا للعدد 7 .
- إذا كان $(n + 5)$ من مضاعفات 7 معناه يوجد عدد طبيعي k حيث $(n + 5) = 7k$ أي $n = 7k - 5$
بالتعويض في a و b نجد : $a = n - 2 = 7k - 5 - 2 = 7(k - 1) = 7k'$ و
 $b = 2n + 3 = 2(7k - 5) + 3 = 14k - 7 = 7(2k - 1) = 7k''$
- إذا كان العددان a و b من مضاعفات 7 . فإن $(b - a)$ ومن مضاعفات العدد 7 وبملاحظة
 $b - a = 2n + 3 - (n - 2) = n + 5$ فإن $(n + 5)$ مضاعفا للعدد 7 .
ت) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$.
 $PGCD(a; b) = 7$ هذا يعني a و b من مضاعفات العدد 7 معناه أن $(n + 5)$ من مضاعفات العدد 7
وبالتالي قيم n هي من الشكل $n = 7k - 5$ حيث k عدد طبيعي أكبر من 5 .
(2) أ) نبين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $(n - 5)$.
باستخدام طريقة هورنر .

معاملات $p(n)$		2	-7	-15
قيمة α جذر $p(n)$	5	0	10	15
معاملات هورنر		2	3	0

وبالتالي $p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(2n+3)$.

معاملات $q(n)$		1	-7	10
قيمة α جذر $p(n)$	5	0	5	10
معاملات هورنر		1	-2	0

$$q = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(n-2)$$

إذن العددين p و q يقبلان القسمة على $(n-5)$.

ب) تعين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

$$PGCD(p; q) = PGCD((n-5)(2n+3); (n-5)(n-2))$$

$$PGCD(p; q) = (n-5)PGCD((2n+3); (n-2))$$

$$PGCD(p; q) = (n-5)PGCD(a; b)$$

- إذا كان $PGCD(a; b) = 7$ فإن $PGCD(p; q) = 7(n-5)$.

- إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ فإن $PGCD(p; q) = (n-5)$.