



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمارين مع الحل في المتتاليات العددية

3

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 12

1 (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على ℝ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

و (D) المستقيم ذو المعادلة y = x

ولنعبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على ℕ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1 مثل بيانيا (C_f) و (D) ، ثم مثل الحدود u₀ ، u₁ ، u₂ و u₃ دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

2 ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

3 برهن بالتراجع أن: u_n ≤ 6 مهما كان n ∈ ℕ.

4 ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة ؟ برر اجابتك.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : v_n = u_n - 6

1 اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2 اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3 احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4 عبر بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n حيث:

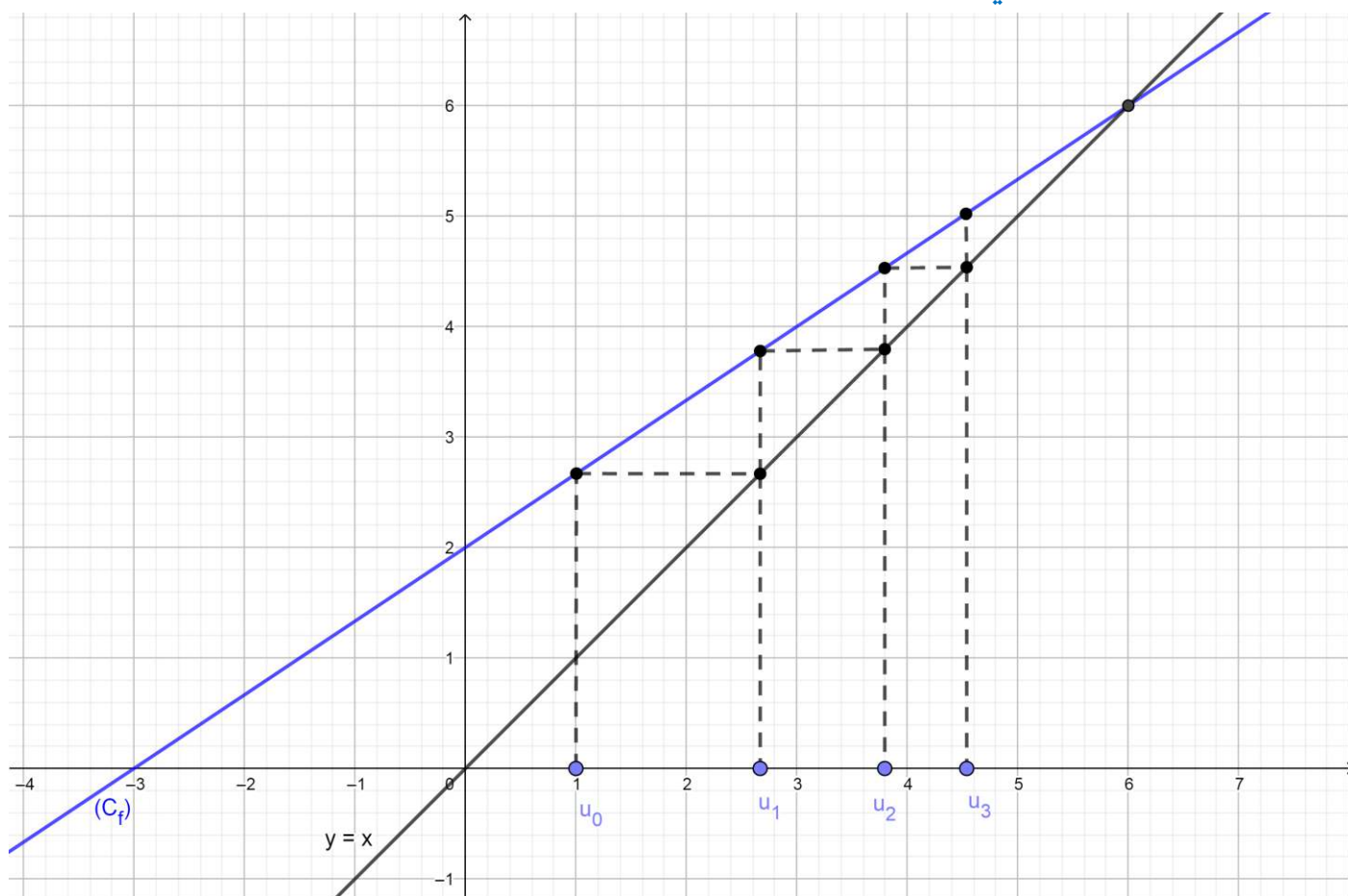
$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

5 عبر بدلالة n عن المجموع Q_n حيث: Q_n = v₀² + v₁² + ... + v_n²

6 عبر بدلالة n عن الجداء P_n حيث: P_n = v₀ × v₁ × ... × v_n

① التمثيل البياني للدالة f وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها:



② التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

من التمثيل البياني لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 6

③ البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 6$

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 6 \dots (*)$$

• نفرض أن $u_n \leq 6$ ونثبت صحة $u_{n+1} \leq 6$

$$u_n \leq 6 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 6 \dots (**)$$

من (*) و (**) نجد أن: $u_n \leq 6$

④ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + 2 \end{aligned}$$

لدينا:

$$-\frac{1}{3}u_n + 2 = 0 \Rightarrow u_n = 6$$

ومنه:

u_n	$-\infty$	6	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	+	0	-

لدينا من الجدول لما $u_n \leq 6$ تكون (u_n) متزايدة.

وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة.

②

① اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 \\ &= \frac{2}{3}u_n - 4 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 6) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 6 = -5$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول -5 .

② كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = -5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا:

$$v_n = u_n - 6 \Rightarrow u_n = v_n + 6$$

$$\Rightarrow u_n = 6 - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[6 - 5 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 6$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= -5 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\ &= -5 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) \end{aligned}$$

$$S_n = 15 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 6 + v_1 + 6 + \dots + v_n + 6 \\ &= 6(n+1) + \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{S_n} \end{aligned}$$

$$S'_n = 6(n+1) + 15 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

⑤ التعبير بدلالة n عن المجموع Q_n :

$$\begin{aligned} Q_n &= v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 \\ &= (-5)^2 \left(\frac{1 - \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} \right) \\ &= 25 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{2(n+1)}}{\frac{5}{9}} \right) \\ Q_n &= 45 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{2(n+1)} \right) \end{aligned}$$

⑥ التعبير بدلالة n عن الجداء P_n :

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= (-5) \left(\frac{2}{3} \right)^0 \times (-5) \left(\frac{2}{3} \right)^1 \times \dots \times (-5) \left(\frac{2}{3} \right)^n \end{aligned}$$

$$= (-5)^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \dots \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$

$$= (-5)^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1+\dots+n} \right)$$

$$P_n = (-5)^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶