



## الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

# دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

③

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 23

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x; x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\} \\ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}; x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0; x = 0 \end{cases}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا.
- 2) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- 3) أ/ بين أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  بجوار  $-\infty$  يطلب تعيين معادلته.  
ب/ ادرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  على المجال  $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$ .
- 4) حل المعادلة:  $f(x) = 0$  في المجال  $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني  $(C_f)$  ؟
- 5) بين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  في المجال  $]-2; -\frac{3}{4}[$ .
- 6) مثل بيانيا  $(\Delta)$  و المنحني  $(C_f)$ .
- 7) نعتبر المعادلة ذات المجهول  $x$  والوسيط الحقيقي  $m$  التالية:  

$$f(x) = -(m^2 - e) \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(E)$ .

(1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{1}{x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [-x \ln(-x)] = 0^+ \text{ لأن}$$

الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $x_0 = 0$  من اليسار

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x \ln x} \left( 1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $x_0 = 0$  من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $x_0 = 0$  ومنه  $(C_f)$  يقبل مماس عمودي معادلته  $x = 0$

(2) دراسة تغيرات الدالة  $f$  :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{\ln|x|} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[ \frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[ \frac{1}{0^+} + x \right]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \frac{1}{\ln(-x)} + x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \frac{1}{0^-} + x \right]$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2(0^-)^2}$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{\ln x} \left( 1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{0^+} \left( 1 - \frac{1}{2(0^+)} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right]$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

- $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي  $x = -1$  بجوار  $\pm\infty$ .
- $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي  $x = 1$  بجوار  $-\infty$ .
- $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي  $y = 0$  بجوار  $+\infty$ .

- حساب  $f'(x)$ :

لما  $x \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$ :

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1$$

$$= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1$$

لاحظ أن  $x < 0$  ومنه:  $f'(x) > 0$

اذن:

|         |           |      |     |
|---------|-----------|------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $+$  | $+$ |

لما  $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right) \\
 &= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4} \\
 &= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3} \\
 &= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2] \ln x} \\
 &: \frac{-\ln x + 1}{\ln x} \text{ إشارة المشتقة من إشارة } x(\ln x)^2 > 0 \text{ لدينا:}
 \end{aligned}$$

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 -\ln x + 1 = 0 &\Rightarrow \ln x = 1 \\
 &\Rightarrow x = e
 \end{aligned}$$

ومنه:

|              |     |     |     |           |
|--------------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$          | $0$ | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
| $-\ln x + 1$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$       |
| $\ln x$      | $-$ | $+$ | $+$ | $+$       |
| $f'(x)$      | $-$ | $+$ | $0$ | $-$       |

ومنه:

- جدول التغيرات:

|         |           |           |     |           |               |           |
|---------|-----------|-----------|-----|-----------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $0$ | $1$       | $e$           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $+$       | $-$ | $+$       | $0$           | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $0$       |

(3) أ/ تبين أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  بجوار  $-\infty$  :



إذا استطعنا كتابة عبارة دالة  $f$  على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته  $y$

لدينا:

$$f(x) = x + \frac{1}{\ln(-x)}$$

نضع:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln(-x)}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل بجوار  $-\infty$ .

ب/ دراسة وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  على المجال  $\mathbb{R}_*^* - \{-1\}$ :

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$ :

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \\ &= \frac{1}{\ln(-x)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln(-x) = 0 &\Rightarrow -x = e^0 \\ &\Rightarrow -x = 1 \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

|            |           |      |     |
|------------|-----------|------|-----|
| $x$        | $-\infty$ | $-1$ | $0$ |
| $f(x) - y$ | $+$       | $  $ | $-$ |

- الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; -1[$ .
- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-1; 0[$ .

4 حل المعادلة:  $f(x) = 0$  في المجال  $\mathbb{R}_*^* - \{1\}$ :

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا:  $2(\ln x)^2 > 0$  ومنه:

$$\begin{aligned} 2 \ln x - 1 = 0 &\Rightarrow 2 \ln x = 1 \\ &\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{e} \end{aligned}$$

- الاستنتاج:

$(C_f)$  يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة  $\sqrt{e}$

(5) تبين أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  في المجال  $]-1.77; -1.76[$ :

المنحني  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  في المجال  $]-1.77; -1.76[$  معناه

المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا في نفس المجال

لدينا الدالة  $f$  مستمرة ومنتزيدة على المجال  $]-1.77; -1.76[$

لدينا:  $f(-1.77) = -0.01$  و  $f(-1.76) = 0.008$

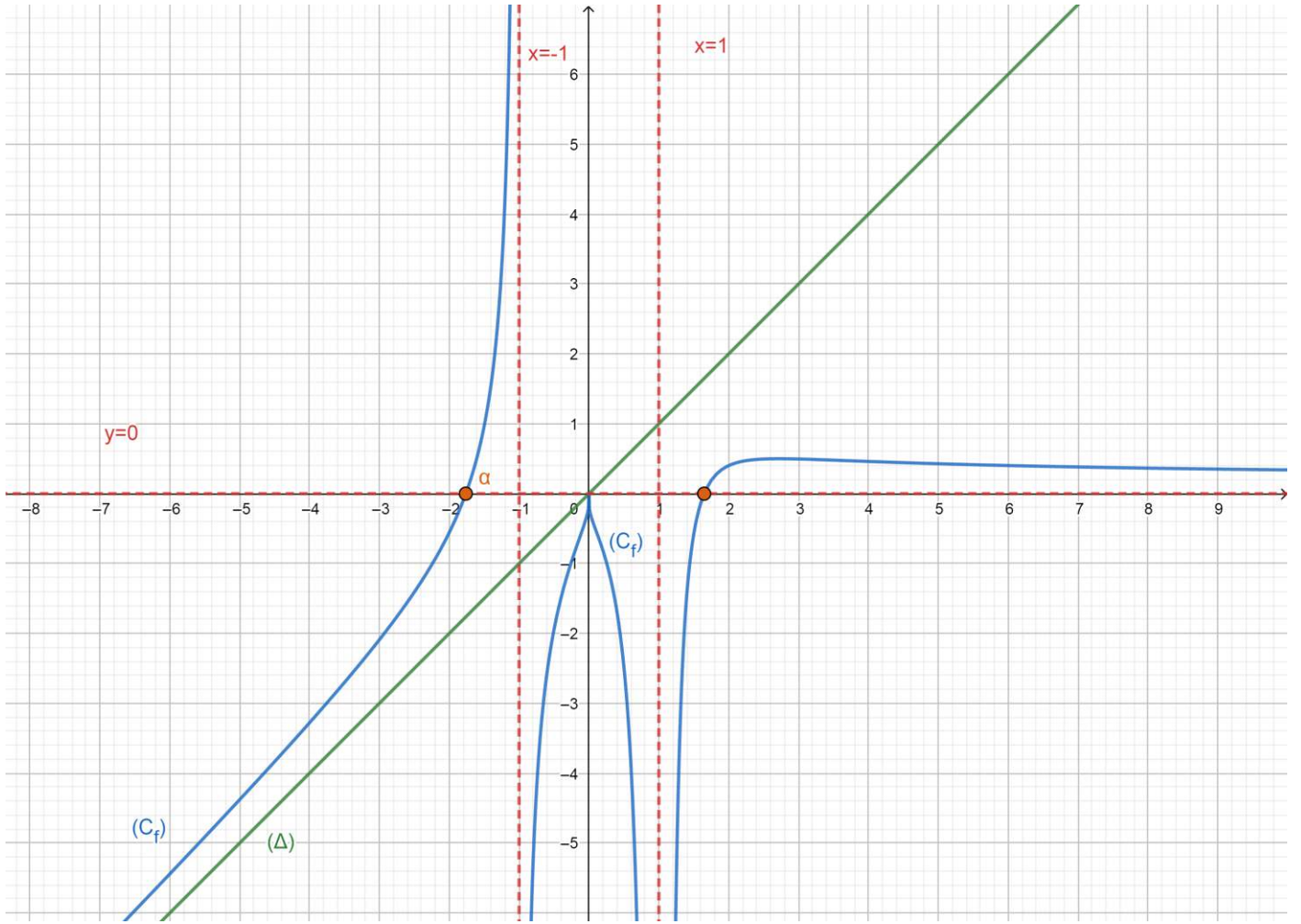
لدينا:  $f(-1.77) \times f(-1.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا في المجال  $]-1.77; -1.76[$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة:  $x = -1$  و  $x = 1$  و  $y = 0$
- نعين نقطتي تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$
- نُرمِّم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$



### (7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع المستقيمات ذات المعادلة  $y_m = -(m^2 - e)$

- لما  $-(m^2 - e) < 0$  أي  $m^2 - e > 0$  أي  $m^2 > e$  أي  $|m| > \sqrt{e}$  أي  $m \in ]-\infty; -\sqrt{e}[ \cup ]\sqrt{e}; +\infty[$  المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.
  - لما  $-(m^2 - e) = 0$  أي  $m^2 - e = 0$  أي  $m^2 = e$  أي  $|m| = \sqrt{e}$  أي  $m = -\sqrt{e}$  و  $m = \sqrt{e}$  المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب.
  - لما  $0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$  أي  $-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$  أي  $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$  أي  $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$  و  $|m| < \sqrt{e}$  أي  $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$  و  $m \in ]-\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}}[ \cup ]\sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty[$  أي
- $$m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e} \right[ \cup \left] \sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}} \right[$$
- المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

• لما  $|m| = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$  أي  $m^2 = e - \frac{1}{2}$  أي  $m^2 - e = -\frac{1}{2}$  أي  $-(m^2 - e) = \frac{1}{2}$

أي  $m = -\sqrt{e - \frac{1}{2}}$  و  $m = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$  المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

• لما  $|m| < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$  أي  $m^2 < e - \frac{1}{2}$  أي  $m^2 - e < -\frac{1}{2}$  أي  $-(m^2 - e) > \frac{1}{2}$

أي  $m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; \sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[$  أي  $-\sqrt{e - \frac{1}{2}} < m < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

## ◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶