

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية غليزان

وزارة التربية الوطنية

السنة الدراسية: 2025/2024

ثانوية واد الجمعة

المدة: 02 سا

الفرض الثلاثي الأول في مادة: الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية

التمرين الأول: اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل

الرقم	السؤال	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة ج
01	إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x}{e^x + 3}$ و h دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $h(x) = f(\ln x)$ فإن	$h'(x) = \frac{1}{e^x + 3}$	$h'(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 3x}$	$h'(x) = \frac{x}{x^2 + 3x}$
02	الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة التالية : $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2$ هي :	$S = \{-2, 3\}$	$S = \{-1, 5\}$	$S = \{5\}$
03	حلول المعادلة التفاضلية $y' = 4y + 1$ هي الدوال	$f(x) = e^{4x} - \frac{1}{4}$	$f(x) = ce^{2x} + \frac{1}{4}$	$f(x) = ce^{4x} - \frac{1}{4}$
04	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$ تساوي	0	1	2

التمرين الثاني:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$
1. برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. وفسر النتائج بيانيا
2. أدرس تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$ شكل جدول تغيراتها.
3. بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 1]}{x^3}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما

التمرين الثالث:

- الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$
1. بين أن g دالة زوجية ثم فسر النتيجة بيانيا
2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = 2x(3 - 2x^2)e^{-x^2+1}$
- (ب) أدرس تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ و شكل جدول تغيراتها على نفس المجال ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$
3. (أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن أحدهما α حيث $0.51 < \alpha < 0.52$ و استنتج الحل الآخر
- (ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x(1 - e^{-x^2+1}) + 1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أ) بين أن $f(x) + f(-x) = 2$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج نهاية الدالة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 - أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و $\lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{f(x) + f(\alpha) - 2}{x + \alpha}$ ثم فسر النتائج هندسياً.

3 - أ) احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

ج) هل (C_f) يقبل نقطة انعطاف علل ؟

4 - أ) بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} + 1$ ثم استنتج $f(-\alpha) = -\frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} + 1$

ب) استنتج حصراً $f(\alpha)$ و $f(-\alpha)$

5 - هل يوجد مماسات موازية لـ (Δ) ؟ علل اجابتك

6 - F دالة عددية ، m وسيط حقيقي حيث : $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + e^{-x^2+1}) - (m-1)x$

(Γ) التمثيل البياني للدالة F في المستوي السابق .

• ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد مماسات المنحنى (Γ) الموازية لحامل محور الفواصل.

﴿ بالتوفيق للجميع ﴾

التمرين الأول:

1. الجواب (ب) $h'(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 3x}$ **التبرير**

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

$$h'(x) = [f(\ln x)]' = (\ln x)' f'(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{e^{\ln x} + 3} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x + 3} = \frac{\ln x}{x^2 + 3x}$$

2. الجواب (ج) $S = \{5\}$ **التبرير**

لدينا: $3 \ln 2 = \ln(x-1) + \ln(x-3) \dots (*)$. المعادلة (*) معرفة إذا

و فقط إذا كان $x > 3$ و $x > 1$ أي $x \in]3; +\infty[$

(*) تكافئ $\ln[(x-3)(x-1)] = \ln 2^3$ تكافئ $x^2 - 4x - 5 = 0$

$x^2 - 4x - 5 = 0$ (م. د. 2). $\Delta = 36$ ، $x_1 = 5$ أو $x_2 = -1$ تكافئ (*)

$x = 5$ أو $x = -1$ مرفوض ومنه $S = \{5\}$

3. الجواب (ج) **التبرير**

حلول المعادلة التفاضلية $y' = 4y + 1$ هي الدوال

$$f(x) = ce^{4x} - \frac{1}{4}$$

4. الجواب (ب) 1... التبرير

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 = 1$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$

التمرين الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1. اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 = +\infty$$

لأن $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$

2. دراسة تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و f' دالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{[(\ln x)^2]' x - x' (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x} (\ln x) x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\ln x (2 - \ln x)$

نحل المعادلة $f'(x) = 0$ ومنه $\ln x (2 - \ln x) = 0$

أو $\begin{cases} \ln x = 0 \\ (2 - \ln x) = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0

ومنه: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; e^2]$ و متناقصة تماما

تماما على كل من المجالين $]0; 1]$ و $[e^2; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{e^2}$	0

3. اثبات أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 1]}{x^3}$$

f' دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و f'' دالتها المشتقة

$$f''(x) = \frac{[2(\ln x) - (\ln x)^2]x^2 - (x^2)'(2(\ln x) - (\ln x)^2)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x}\ln x\right)x^2 - 2x(2(\ln x) - (\ln x)^2)}{x^4}$$

$$= \frac{(2 - 2\ln x)x - 2x(2(\ln x) - (\ln x)^2)}{x^4}$$

$$= \frac{2x[1 - \ln x - 2(\ln x) + (\ln x)^2]}{x^4}$$

$$= \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 1]}{x^3}$$

نحل المعادلة $f''(x) = 0$ ومنه $(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$ تكافئ

$$\begin{cases} x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \\ x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \ln x = X \\ X^2 - 3X + 1 = 0 \end{cases}$$

x	0	x_1	x_1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند x_1 و x_1 فإن (C_f) يقبل

نقطتي انعطاف $A(x_2; f(x_2))$, $B(x_1; f(x_1))$

التمرين الثالث:

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$$

1. اثبات أن g دالة زوجية

دالة زوجية معناه من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$ فإن $g(-x) = g(x)$

الشرط الأول محقق

$$g(-x) = 1 + (2(-x)^2 - 1)e^{-(-x)^2+1}$$

$$= 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1} = g(x)$$

بما أن g الدالة زوجية فإن منحناها متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

2. اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = 2x(3 - 2x^2)e^{-x^2+1}$$

g دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة

$$g'(x) = (2x^2 - 1)'e^{-x^2+1} + (e^{-x^2+1})'(2x^2 - 1)$$

$$= 4xe^{-x^2+1} - 2xe^{-x^2+1}(2x^2 - 1)$$

$$= 2x(3 - 2x^2)e^{-x^2+1}$$

(ب) دراسة تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$

جدول إشارة المشتقة

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

ومنه: الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ و متناقصة تماما

تماما على $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right]$

جدول التغيرات على $]0; +\infty[$

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	
	$1+e$		1

استنتاج تغيرات الدالة على $]-\infty; 0]$

بما أن الدالة g دالة زوجية فإنها g متناقصة تماما على المجال

$\left]0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ و متزايدة تماما على $\left] -\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

جدول تغيرات على $\mathbb{R}$

x	$+\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$		$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	
	1	$1+e$	$1+e$	1	1

3. اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$

بما أن g مستمرة ورتيبة على المجال $\left[0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ و

$$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \times g(0) < 0 \text{ و } g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) > 0, \quad g(0) = 1 + e < 0$$

ومنه: الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-\alpha; \alpha]$ و متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -\alpha]$ و $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$f(\alpha)$		$f(-\alpha)$	

(ج) تعيين دون حساب

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{f(x) + f(\alpha) - 2}{x + \alpha} &= \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{f(x) - (2 - f(\alpha))}{x - (-\alpha)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x - (-\alpha)} \\ &= f'(-\alpha) = g(-\alpha) = 0 \end{aligned}$$

تفسير (C_f) يقبل مماسين عند α و $-\alpha$ موازين لمحور فواصل.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \quad \text{حساب (أ.3)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x(1 - e^{-x^2+1}) + 1 - x) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -xe^{-x^2+1} + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} -xe^{-x^2+1} = 0 \quad \text{لأن}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له $y = x + 1$

(ب) ادراة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ أي $-xe^{-x^2+1}$

وضع النسبي

x	$+\infty$	0	$+\infty$
$r(x) - y$	$+$	0	$-$

لدينا $f(x) - y > 0$ من أجل $x \in]-\infty; 0[$ فإن المنحنى (C_f) يقع

فوق (Δ)

لدينا $f(x) - y < 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقع

تحت (Δ)

لدينا $f(x) - y = 0$ من أجل $x = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقطع

(Δ) في النقطة $(0; 1)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

$$\left[0; \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \quad \text{حيث}$$

وبما أن الدالة g دالة زوجية فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا آخر $-\alpha$ من

$$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; 0 \right] \quad \text{المجال}$$

التحقق بما أن $g(0.51) \approx -0.0055$, $g(0.52) \approx 0.047$ و

$g(0.51) \times g(0.52) < 0$ فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $0.51; 0.52$ حلا آخر $-\alpha$ من المجال $]-0.52; -0.51[$

(ب) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$		
$g(x)$		+	0	-	0	+

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ ب:

$$f(x) = x(1 - e^{-x^2+1}) + 1$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1.1 اثبات أن $f(x) + f(-x) = 2$

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x(1 - e^{-x^2+1}) + 1 + (-x)(1 - e^{-(-x)^2+1}) + 1 \\ &= x(1 - e^{-x^2+1}) - x(1 - e^{-x^2+1}) + 2 = 2 \end{aligned}$$

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

و $f(x) + f(-x) = 2$ فإن (C_f) يقبل $A(0, 1)$ مركز تناظر.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x^2+1}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{حساب (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - f(-x) = -\infty$$

2.1 اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'(1 - e^{-x^2+1}) + (1 - e^{-x^2+1})' x \\ &= (1 - e^{-x^2+1}) + 2xe^{-x^2+1}x \\ &= 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1} = g(x) \end{aligned}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

(ج) نعم (C_f) يقبل نقطة انعطاف

لدينا $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$

ومنه المشتقة الثانية تنعدم ثلاث مغيرة إشارتها عند

$$\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{فإنها تقبل ثلاث نقط انعطاف فواصلها}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

4. أثبات أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} + 1$

لدينا $f(\alpha) = \alpha(1 - e^{-\alpha^2+1}) + 1$

ولدينا $g(\alpha) = 0$ فإن $e^{-\alpha^2+1} = -\frac{1}{2\alpha^2 - 1}$ وبتعويض $e^{-\alpha^2+1}$ في $f(\alpha)$

فإن $f(\alpha) = \alpha \left(1 + \frac{1}{2\alpha^2 - 1}\right) + 1 = \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} + 1$

استنتاج $f(-\alpha) = -\frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} + 1$

لدينا $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2$ ومنه $f(-\alpha) = 2 - f(\alpha)$ أي

$f(-\alpha) = 2 - \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} - 1 = -\frac{2\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} + 1$

(ب) استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ و $f(-\alpha)$

باتباع قواعد المقارنة نجد $0.34 < f(\alpha) < 0.45$ و

$1.55 < f(-\alpha) < 1.62$

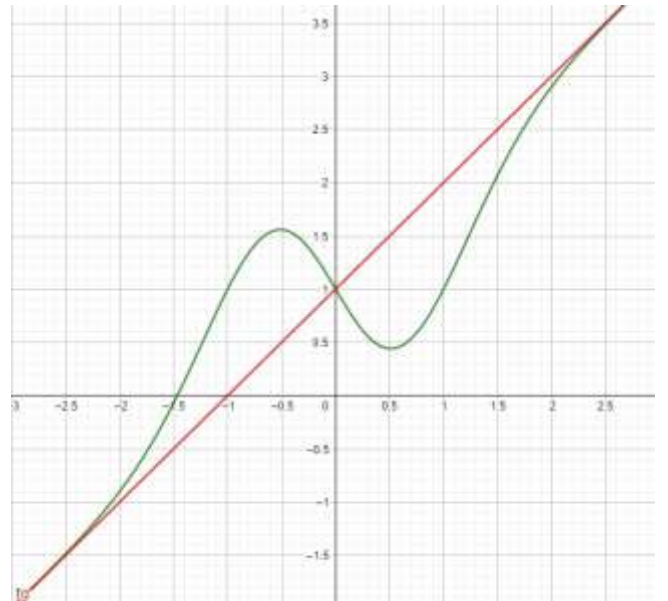
5. نعم توجد مماسات موازية لـ (Δ)

مماسا يوازي (Δ) معناه $f'(x) = 1$ أي

$(2x^2 - 1)e^{-x^2+1} = 0$ ومنه $1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1} = 1$

$(2x^2 - 1) = 0$

بما أن المعادلة تقبل حلين فإنه يوجد مماسين موازيين لـ (Δ)



6. دالة عددية، m وسيط حقيقي حيث:

$$F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + e^{-x^2+1}) - (m-1)x$$

(Γ) التمثيل البياني للدالة F في المستوى السابق.

• مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد مماسات المنحنى

(Γ) الموازية لحامل محور الفواصل.

عدد مماسات المنحنى (Γ) الموازية لحامل محور الفواصل معناه

$F'(x) = 0$ ومنه $f(x) - m = 0$ أي $f(x) = m$

هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة

$y = m$ مناقشة أفقية

لدينا من أجل $x \in]-\infty; f(\alpha)[$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل

حلا وحيدا أي أن لـ (Γ) مماس موازي لمحور الفواصل

لدينا من أجل $x = f(\alpha)$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين أي

أن لـ (Γ) مماسين موازيين لمحور الفواصل

لدينا من أجل $x \in]f(\alpha); f(-\alpha)[$ فإن المعادلة $f(x) = m$

تقبل ثلاث حلول أي أن لـ (Γ) 3 مماسات موازية لمحور الفواصل

لدينا من أجل $x = f(-\alpha)$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين أي

أن لـ (Γ) مماسين موازيين لمحور الفواصل

لدينا من أجل $x \in]f(-\alpha); +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل

حل وحيدا أي أن لـ (Γ) مماس موازي لمحور الفواصل