

3.

الدالة اللوغاريتمية

تسعينات: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

من تقديم الأستاذ تسعينات أسامة

1. عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{و} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

2. اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

$$: \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} \quad (2) \quad \ln 14 - \ln 7 \quad (1)$$

3. اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

$$A = \ln a - \ln b + 2 \ln c \quad \bullet$$

$$B = \frac{1}{2} \ln a - \frac{3}{2} \ln b + \ln \frac{a}{b} \quad \bullet$$

$$C = \ln(a+1) - \frac{1}{2} \ln b + \frac{3}{2} \ln(a+b) \quad \bullet$$

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\ln(x) = \ln(2x-3) \quad (1)$$

$$\ln(x^2-1) = \ln(x+5) \quad (2)$$

$$\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 0 \quad (3)$$

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad (4)$$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad (5)$$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad (6)$$

5. حل المتراجحات التالية:

$$\ln(3x) < \ln(4x+8) \quad (1)$$

$$\ln(x^2) < \ln(3x-2) \quad (2)$$

$$\ln(2x^2) > \ln(6-4x) \quad (3)$$

$$\ln(x^2+x-2) > 0 \quad (4)$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-2) > 2 \ln(5-x) \quad (5)$$

6. نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$$p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$

(1) حل $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x) = 0$

(2) استنتج حل المعادلة:

$$(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0$$

(1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln \frac{x}{y} = -\ln 3 \end{cases}$$

(2) أ- حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 8x - 4y = 4 \end{cases}$$

ب- استنتج حل الجملة التالية في $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \ln x^4 y^7 - 2 \ln y^3 = 5 \\ \ln \frac{x^6}{y^4} + \ln x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(x+1)^4 + \ln y = 0 \\ \ln x^2 + \ln \frac{1}{y} = \ln x \end{cases} \quad (3)$$

7. ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0; +\infty[$

$$(\ln x + 1)(\ln x - 1) \quad (2) \quad \ln x - \ln 3 \quad (1)$$

$$2x \ln(1-x) \quad (4) \quad \ln x(\ln x - 1) \quad (3)$$

$$-x^2 \ln(x+1) \quad (5)$$

8. احسب النهايات في كل حالة من الحالات المقترحة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \ln x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 5 - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \ln(-x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 + \ln x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3(\ln x)^2 - \ln x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 4 + \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2 \ln x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - (\ln x)^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \ln x - 1$$

9.

تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المعطى ثم احسب دالتها المشتقة

$$D =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = (\ln x)^2 + \ln x \quad (1)$$

$$D =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

$$D =]-\infty; 0[\quad , \quad f(x) = x \ln |x| - 2x + 3 \quad (3)$$

10.

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; 2]$ بـ

$$f(x) = 2x^2 - 3 - \ln x$$

(ع) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 5cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا.

2. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. عين معادلة المماس T للمنحنى (ع) عند النقطة التي فاصلتها 1.

4. ارسم T و (ع).

11.

لتكن الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x + 1 + 2[\ln x - \ln(x-1)]$$

نسي (ع) إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس الوحدة 1cm

1. بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$: $f(x) = x + 1 + 2 \ln \frac{x}{x-1}$

2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$. استنتج أن المنحنى (ع) يقبل

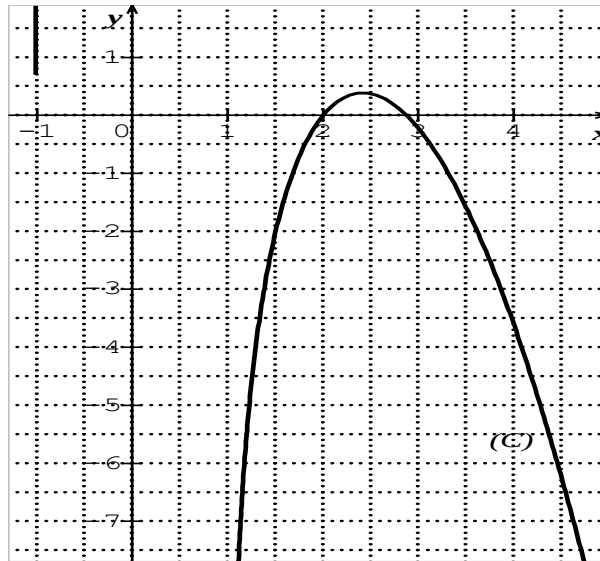
مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحنى (ع) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

5. ارسم بعناية المنحنى (ع).

12.

1. الدالة g معرفة على المجال $]1; +\infty[$ كمايلي :



و (C)

تمثيل

ها

البي

ني

في

معل

م متعامد ومتجانس .

(الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية حدد عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

2. احسب $g(2)$.

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2,87; 2,88[$

($2,87 < \alpha < 2,88$) .

4. استنتج حسب قيم X ، إشارة $g(x)$ على المجال

$]1; +\infty[$.

(II)

نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 $g(x) = -x^2 + 2x + 4 \ln(x-1)$

1. (أ) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)]$ واستنتج أن

المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$.

(د) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (Γ) بالنسبة إلى المستقيم

(Δ) .

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد X من المجال $]1; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

(f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (Γ) . (نأخذ $f(\alpha) = 3.9$)

13.

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية

المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

(4) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة

وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

(7) أرسم المنحنى (C_f) والمستقيمان (T) و (Δ) ؟

(8) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول

$$f(x) = \frac{3}{2}x + m$$

14. جزء من بكالوريا 2015- الموضوع 2- شعبة: تسيير و اقتصاد

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب :

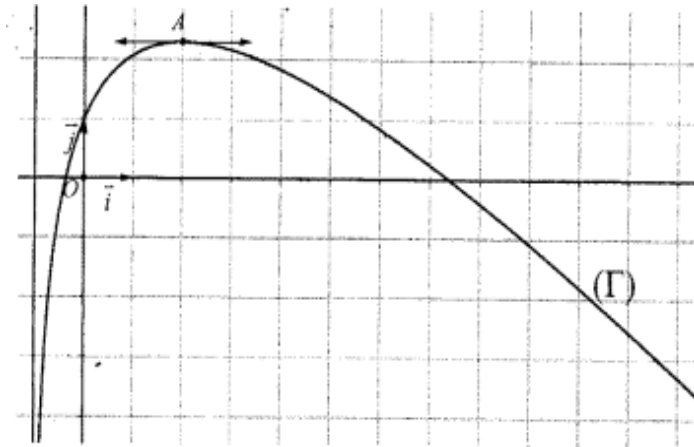
$$f(x) = ax + b + 3\ln(x + 1)$$

(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل المقابل ، يقبل في النقطة

$A(2; -1 + 3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

(1) بقراءة بيانية :

أ - ضع تخمينا حول $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.



ب - شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة ، جد قيمة كل من a و b .

(II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x + 1)$.

(1) أحسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر .

(2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يعطى :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

(3) أ - عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس

(T) للمنحنى (Γ) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم

أكتب معادلة للمماس (T) .

ب - استنتج بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من

أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماما .

(4) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب :

$$g(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$$

أ - أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على

المجال $]-1; +\infty[$.

ب - لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع

حامل محور الفواصل ،

بين أن : $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و

$\beta \in]-0,37; -0,36[$.

15. جزء من بكالوريا 2018- الموضوع 1- شعبة: تسيير و اقتصاد

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; 8[$ ب :

$$f(x) = \ln(x + 2) + \ln(-x + 8) - \ln 16$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نأخذ الوحدة البيانية : $2cm$.

(1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2; 8[$ و

فسّر النتيجة بيانيا .

(2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2; 8[$:

$$f'(x) = \frac{-2x + 6}{(x + 2)(-x + 8)}$$

(f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

(3) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2; 8[$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(5) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2; 8[$: $(6-x)$ ينتهي إلى $]-2; 8[$ و $f(6-x) = f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة ببياناً .

(6) أرسم المنحنى (C_f) .

16.

(I)- لتكن u دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي : $u(x) = \ln x - 2$ ، (C_u) المنحنى الممثل للدالة u في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. استنتج طريقة لانشاء (C_u) انطلاقا من منحنى دالة مرجعية يطلب تعيينها.
2. أنشئ (C_u) .

(II)- لتكن g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = \ln x + x - 3$.
1. أدرس تغيرات الدالة g .
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصرا له سعته 10^{-1} .
3. استنتج إشارة $g(x)$.

(III)- لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم السابق.
1. أدرس تغيرات الدالة f .
2. برهن أن $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا ل $f(\alpha)$.
3. أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_u) و (C_f) .

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - u(x)]$ ثم فسرهذه النتيجة ببياناً .
5. عيّن نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
6. أنشئ (C_f) في المعلم السابق.

17.

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $] -\infty; 0[$ كما يلي :

$$f(x) = x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

(C_f) التمثيل البياني في المستوي المنسوب الى معلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 0[$ ،

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3, 4 < \alpha < -3, 5$ و $-1, 1 < \beta < -1$.

5. أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6. أ- نعتبر النقطتين $A \left(-1; 3 + 6 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)$ و

$$B \left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)$$

بين ان $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بين ان المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين احداثيتها.