



الخليل للرياضيات

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

سلسلة تمارين رقم [00]

حول:

النهايات ودراسة الدوال

[مع حلول مقترحة]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[02 أوت 2021]

www.dzexams.com

التمرين 01:

من أجل دالة f ، احسب النهايات التالية:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{1-x} \right) & \textcircled{1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1-x} \right) & \textcircled{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) & \textcircled{5} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) & \textcircled{7} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) & \textcircled{9} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4 - x^2}{x - 2} \right) & \textcircled{2} \\ \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right) & \textcircled{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) & \textcircled{6} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x + 2}{x^2 + x} + \frac{3x + 1}{x^2 + x} \right) & \textcircled{8} \end{array}$$

حل التمرين 01:

حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{1-x} \right) &= \frac{\sqrt{4}}{1-4} \\ &= \boxed{\frac{2}{-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4 - x^2}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(2-x)(2+x)}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-(x-2)(2+x)}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (-(2+x)) \\ &= -(2+2) \\ &= \boxed{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-2)(x-1)}{1-x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-(x-2)(1-x)}{1-x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-(x-2)) \\ &= -(1-2) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{3 + \sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{1}{3 + \sqrt{3}} \\
 &= \boxed{\frac{1}{6}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) &= \frac{1^2 + 1}{|1^2 - 1| + 1} \\
 &= \boxed{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) &= \frac{0^2 + 0}{|0^2 - 1| + 1} \\
 &= \frac{0}{2} \\
 &= \boxed{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) &= \frac{(-1)^2 + (-1)}{|(-1)^2 - 1| + 1} \\
 &= \frac{0}{1} \\
 &= \boxed{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x + 2}{x^2 + x} + \frac{3x + 1}{x^2 + x} \right) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{2} \\
 &= \boxed{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) &= \sqrt{1^2 - 1} + \sqrt{1^2 - 3 + 2} \\
 &= \boxed{0}
 \end{aligned}$$

التمرين 02 :

عَيِّن النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x + 1}}{(x - 3)^2} \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x - 1}} \right) \quad \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) \quad \textcircled{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3 \quad \textcircled{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) \quad \textcircled{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x}{x+3}} \right) \quad \textcircled{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 4 + \frac{\sin x}{x} \right) \quad \textcircled{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x-1} \right) \quad \textcircled{7}$$

حل التمرين 02:

تعيين النهايات التالية:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) = \boxed{+\infty}$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x-1}) = 0^+$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} \right) = \boxed{+\infty}$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{0^+} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} ((x-3)^2) = 0^+$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3 = \boxed{+\infty}$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) = \frac{0}{0} \text{ (ع.ع.ت.)}$$

إزالة حالة عدم تعيين:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x}{x+3}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x}{x}} \right) = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} ⑥ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right) \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x-1} \right) = 0$$

لأن:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$⑧ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 4 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0 \text{ و } -1 \leq \sin x \leq 1$$

التمرين 03 :

برهن أن المنحني الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

$$I =]2; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \textcircled{1}$$

$$I =]-\infty; 0[\quad , \quad f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \quad \textcircled{2}$$

$$I =]1; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{2x}{1-x} \quad \textcircled{3}$$

$$I =]-\infty; -2[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \quad \textcircled{4}$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{-x + 1}{x^2 + 1} \quad \textcircled{5}$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \quad \textcircled{6}$$

حل التمرين 03 :

لدينا: $\textcircled{1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) = +\infty \right.$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$
وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 2$

لدينا: $\textcircled{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = 2$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty \right.$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 2$
وآخر مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

لدينا: $\textcircled{3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{-x} \right) = -2$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{1-x} \right) = -\infty \right.$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = -2$
وآخر مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

4 لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 1$
وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -2$

5 لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x + 1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x + 1}{x^2 + 1} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = 0$

6 لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = 0$

التمرين 04:

برهن أن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

$$D: y = x \quad , \quad I =]2; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad \text{①}$$

$$D: y = x - 1 \quad , \quad I =]-\infty; -1[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad \text{②}$$

$$D: y = x + 4 \quad , \quad I =]2; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2} \quad \text{③}$$

$$D: y = x + 2 \quad , \quad I =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} \quad \text{④}$$

حل التمرين 04:

1 لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{x^2 - 1}{x} - x \\ &= \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \\ &= \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-	
الوضعية		(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)	

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

لدينا:

②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - (x-1) \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - (x-1)(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 1}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$		-	+
الوضعية		(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

لدينا:

③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2} - (x + 4) \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 - (x + 4)(x - 2)}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 + 2x - 4x + 8}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{11}{x - 2} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 4$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{11}{x - 2} = 0 \Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
الوضعية	(C_f) تحت (D)		(C_f) فوق (D)

ومنه (C_f) فوق (D) في المجال I

لدينا:

4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} - (x + 2) \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 1 - x^2(x + 2)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 1 - x^3 - 2x^2}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x^2} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x \neq 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

التمرين 05 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث: a, b, c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

③ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

④ حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

⑤ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحني (C_f) .

حل التمرين 05 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0^-$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \end{aligned}$$

$$= +\infty$$

② اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + x(a+b) + b+c}{x+1} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

أي:

$$f(x) = x - \frac{3}{x+1}$$

• استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1} \right) = +\infty$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$ ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{3}{x+1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$.

③ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{-3}{x+1} \Rightarrow f(x) - x = \frac{3}{-x-1} \\ &\Rightarrow -x-1 \neq 0 \\ &\Rightarrow x \neq -1 \end{aligned}$$

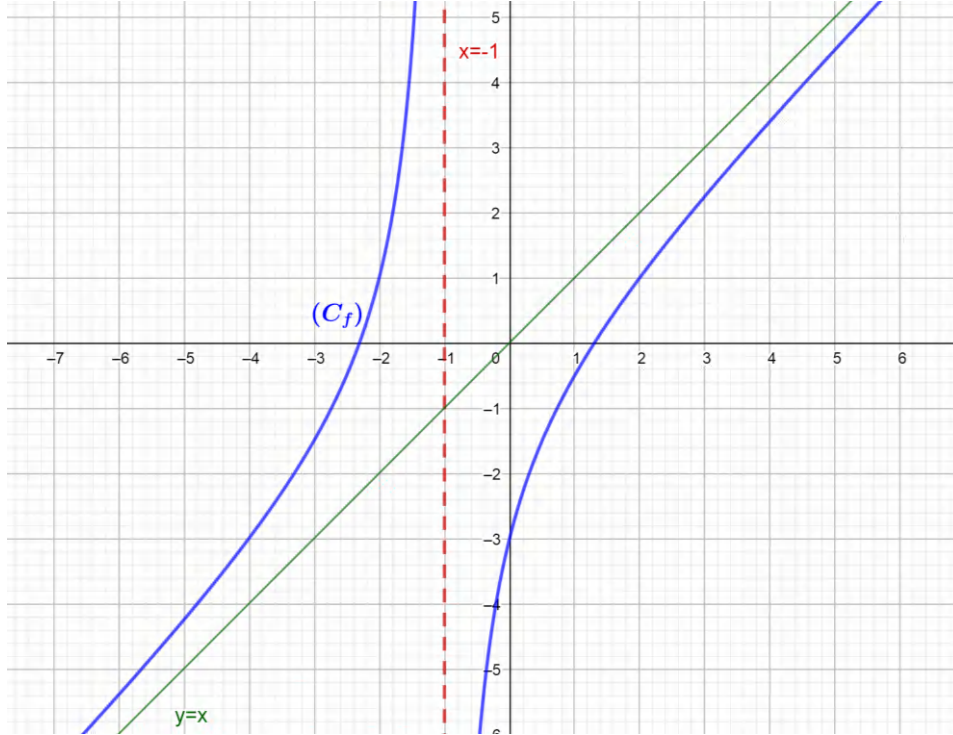
ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

4 التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم **المستقيم المقارب العمودي** ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم **المستقيم المقارب المائل** ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ ، وليكن ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.
- 2 عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.
- 3 برهن أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .
- 4 عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .
- 5 مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .
- 6 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

حل التمرين 06:

- 1 دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) \right) \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) &= +\infty \end{aligned}$$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \\ &\Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 0 $\searrow$ -4 -4 $\nearrow$ $+\infty$				

② تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

لتعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$.
- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الترتيب نقوم بحساب $f(0)$.



- مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

لدينا:

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a-1=3 \\ b-a=0 \\ -b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

ومنه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ ومنه: $x=1$

ولدينا: $x^2 + 4x + 4 = 0$: لحلها نستعمل المميز Δ :

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ أي $x = -2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي: $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور الترتيب:

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور الترتيب في النقطة ذات الإحداثيات $(0; -4)$

③ برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha+x) \in D_f \\ (\alpha-x) \in D_f \\ f(\alpha+x) + f(\alpha-x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2\alpha-x \in D_f \\ f(2\alpha-x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$



لدينا:

$$-\infty < x < +\infty \text{ معناه: } -\infty < -x < +\infty \text{ معناه: } -\infty < \underbrace{2(-1)-x}_{2\alpha-x} < +\infty$$

$$\text{معناه: } (2(-1)-x) \in \mathbb{R}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
f(2(-1) - x) + f(x) &= (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 - 4 + x^3 + 3x^2 - 4 \\
&= -(-2 - x)^2(2 + x) + 3(2 + x)^2 - 8 + x^3 + 3x^2 \\
&= -(4 + x^2 + 4x)(2 + x) + 12 + 3x^2 + 12x - 8 + x^3 + 3x^2 \\
&= -8 - 4x - 2x^2 - x^3 - 8x - 4x^2 + 4 + 6x^2 + 12x + x^3 \\
&= -4 \\
&= 2(-2)
\end{aligned}$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

4 تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω :

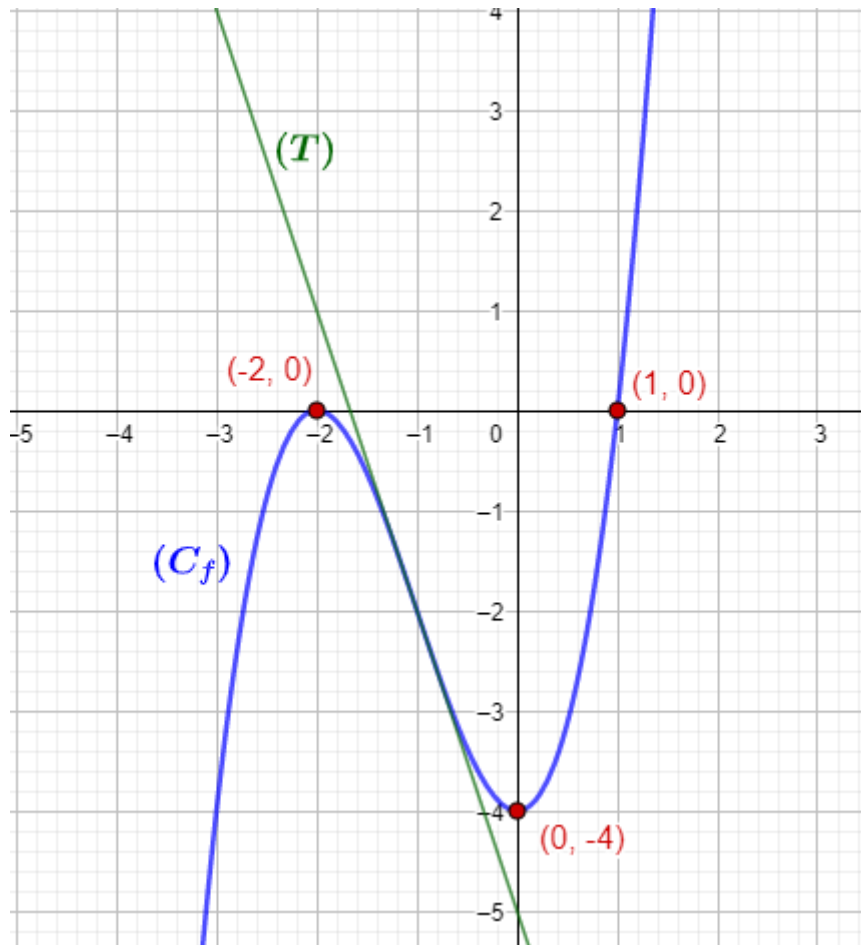
$$\begin{aligned}
(T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\
(T): y &= (3(-1)^2 + 6(-1))(x + 1) + (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 \\
(T): y &= -3x - 3 - 2 \\
(T): y &= -3x - 5
\end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y = -3x - 5$.

5 التمثيل البياني كل من (C_f) و (T) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين **نقط تقاطع المنحني (C_f)** مع محور الاحداثيات.
- نرسم **المماس (T)** ذو المعادلة: $y = -3x - 5$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل **المنحني (C_f)** .



6 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0 \Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما $m < -4$	أي $x < -4$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما $m = -4$	أي $x = -4$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر مضاعف
لما $-4 < m < 0$	أي $-4 < x < 0$	المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب
لما $m = 0$	أي $x = 0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب
لما $m > 0$	أي $x > 0$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

التمرين 07:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

حيث a و b و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① عين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

② نفرض أن $a = -1$ ، $b = 1$:

أ/ ادرس تغيرات الدالة f .

ب/ احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.

ج/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

د/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ) .

هـ/ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

حل التمرين 07:

① تعيين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 :

الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناه:

$$\begin{cases} f(3) = -8 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$f'(x) = x^2 + 2ax - 3$$

ومنه:

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + 2a(3) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 6a = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

ولدينا:

$$f(3) = -8 \Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + a(3)^2 - 3(3) + b = -8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + (-1)(3)^2 - 3(3) + b = -8$$

$$\Rightarrow 9 - 9 + 9 + b = -8$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 1}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

② نفرض أن $a = -1$ ، $b = 1$:

أ / دراسة تغيرات الدالة f :

- تعيين النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right) = +\infty$$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$

ومنه:

$$x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3$$

أو

$$x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي $s = \{-1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{8}{3}$	$\searrow -8$	$\nearrow +\infty$	

ب/ حساب $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(5)$:

- $f(5) = \frac{1}{3}(5)^3 - (5)^2 - 3(5) + 1 = \frac{8}{3}$
- $f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
- $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = \frac{8}{3}$
- $f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 1 = \frac{1}{3}$

ج/ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 :

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = (1^2 - 2(1) - 3)(x - 1) - \frac{8}{3}$$

$$(T): y = -4x + 4 - \frac{8}{3}$$

$$(T): y = -4x + \frac{4}{3}$$

ومنه معادلة المماس (Δ) هي: $y = -4x + \frac{4}{3}$.

د/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ) :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 + 4x - \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} &= (x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma \\ &= \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta - \alpha = -1 \\ \gamma - \beta = 1 \\ -\gamma = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} &= (x-1)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(x-1)^2 \\ &= \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

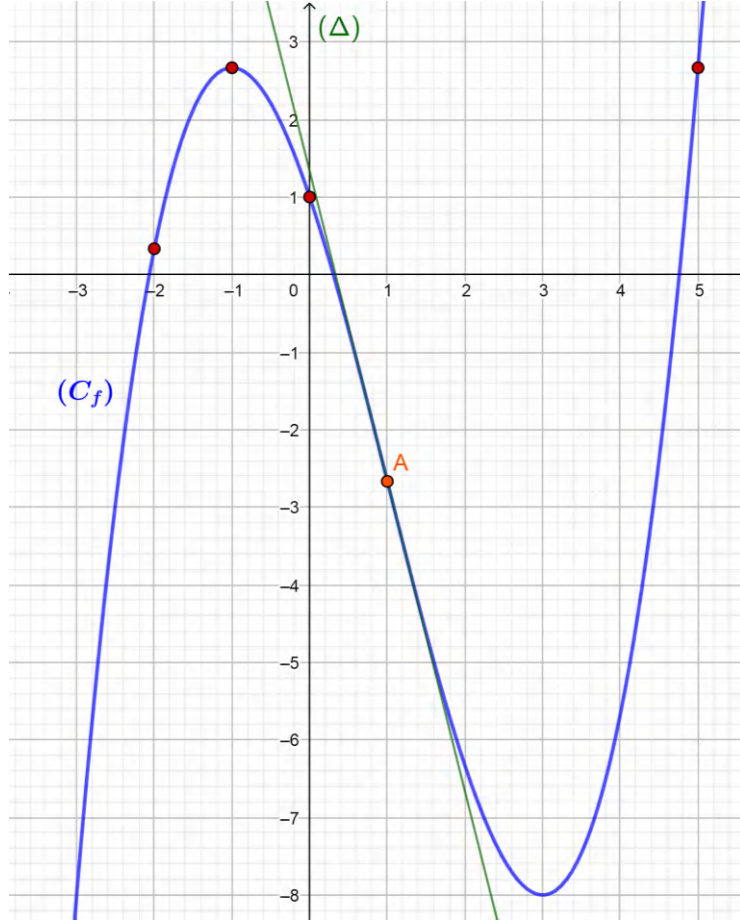
ومنه الوضعية النسبية:

- (C_f) فوق Δ لما: $x \in]1; +\infty[$.
- (C_f) يقطع Δ لما: في النقطة A ذات الاحداثيات $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$.
- (C_f) تحت Δ لما: $x \in]-\infty; 1[$.

هـ / التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعيّن بعض النقط المساعدة $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، و $f(5)$.
- نعيّن النقطة A نقطة تقاطع المنحني (C_f) والمماس (Δ) .
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -4x + \frac{4}{3}$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 08 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$ ، ويقبل قيمة

حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

② ادرس تغيرات الدالة f .

③ اثبت أن (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي

التماس M_1 و M_2 ومعادلتى المماسين (D_1) و (D_2) .

④ مثّل بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ، ثم المنحني (C_f) .

⑤ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) + 3x - m = 0$.

⑥ g دالة معرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$:

أ/ بين أن الدالة g زوجية.

ب/ ادرس قابلية اشتقاق g عند 0.

ج/ بيّن أنه يمكن إنشاء (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) ، ثم مثّل بيانياً (C_g) في المعلم السابق.

حل التمرين 08:

1 تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c :

لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$ ، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3. معناه:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x - 2} - (x - 3) \right) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x - 2} - (x - 3) \right) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c - (x - 3)(x - 2)}{x - 2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c - x^2 + 2x + 3x - 6}{x - 2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a - 1)x^2 + (b + 5)x + c - 6}{x - 2} \right) = 0 \\ &\quad \boxed{a = 1} \text{ هذه النهاية لا تحقق إلا إذا كان: } (a - 1 = 0) \text{ ومنه} \end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 5)x + c - 6}{x - 2} \right) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 5)x}{x} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + 5) = 0 \\ &\Rightarrow b + 5 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{b = -5} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2ax + b)(x - 2) - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2ax^2 - 4ax + bx - 2b - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(3) = 0 &\Rightarrow \frac{a(3)^2 - 4a(3) - 2b - c}{((3) - 2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 9a - 12a - 2b - c = 0 \\ &\Rightarrow -3a - 2b - c = 0 \end{aligned}$$

بتعويض قيمة a و b نجد:

$$\Rightarrow -3(1) - 2(-5) - c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f :

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{6}{0^-} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0^-$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{6}{0^+} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = +\infty$$

- تعيين $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \end{aligned}$$

لحل المعادلة السابقة نستعمل المميز Δ :

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

ومنه:

$$x = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

أو

$$x = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي: $s = \{1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -3$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 1$

③ اثبات أن (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) :

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) معناه أن المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل

حلان:

لدينا:

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = -3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 + 3(x - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 + 3x^2 + 12 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

نحسب المميز Δ ونستخرج الحلين، فنجد: $\Delta = 16$ ومنه:

$$x_2 = \frac{5}{2} ; x_1 = \frac{3}{2}$$

ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} ; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

إذن أحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 مع المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب:

$$M_2\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) ; M_1\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

ولدينا:

$$(D_1): y = f' \left(\frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) + f \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$(D_1): = \left(\frac{\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{3}{2} \right) + 3}{\left(\left(\frac{3}{2} \right) - 2 \right)^2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) + \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 5 \left(\frac{3}{2} \right) + 7}{\left(\frac{3}{2} \right) - 2}$$

$$(D_1): = -3x + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}$$

$$(D_1): = -3x + 1$$

$$(D_2): y = f' \left(\frac{5}{2} \right) \left(x - \left(\frac{5}{2} \right) \right) + f \left(\frac{5}{2} \right)$$

$$(D_2): y = -3x + \frac{15}{2} + \frac{3}{2}$$

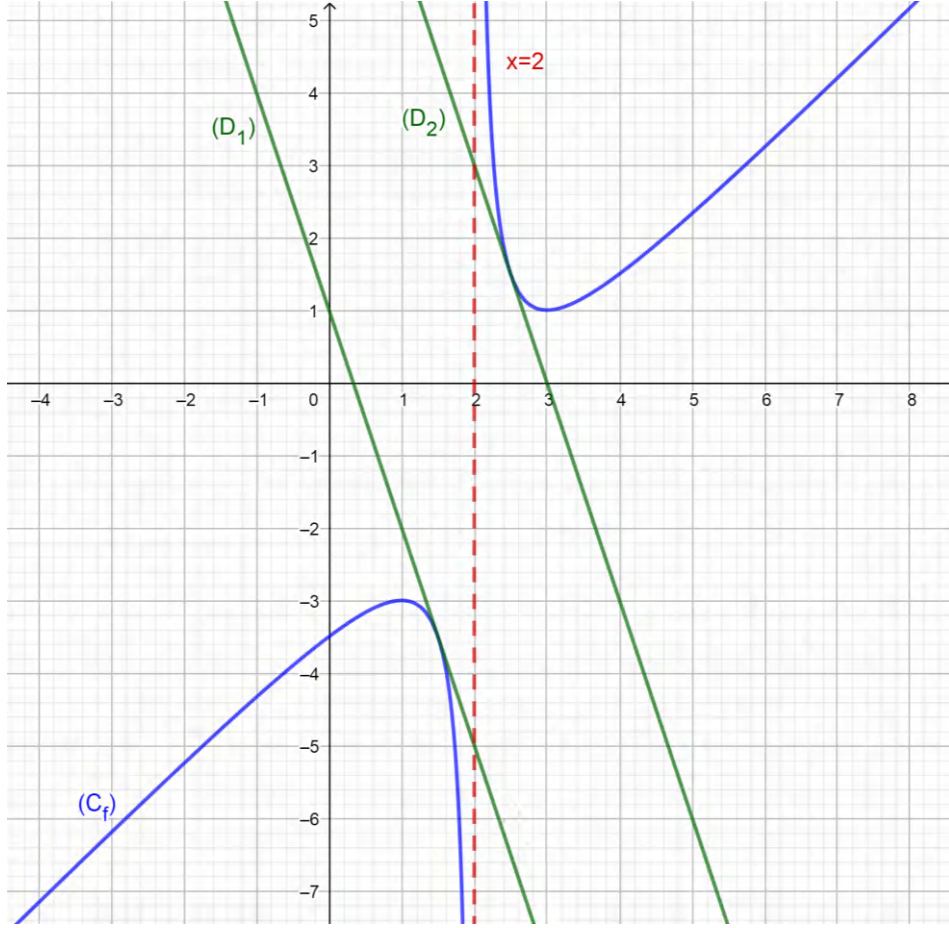
$$(D_2): y = -3x + 9$$

ومنه معادلتا المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب: $y_{(D_1)} = -3x + 1$ و $y_{(D_2)} = -3x + 9$

4 التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم **المستقيم المقارب** ذو المعادلة $x = 2$.
- نرسم **المماسين** (D_1) و (D_2) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل **المنحني** (C_f) .



5 المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذو المعادلة $y_m = -3x + m$ ومنه:

لما	$m < 1$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر موجب
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما	$1 < m < 9$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = 9$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما	$m > 9$	المعادلة تقبل حلان موجبان

6

أ/ تبين أن الدالة g زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ دراسة قابلية اشتقاق g عند 0:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{|x|^2 - 5|x| + 7}{|x| - 2} + \frac{7}{2}}{x - 0} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} + \frac{7}{2}}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x^2 - 10x + 14 + 7x - 14}{x(2x - 4)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(2x - 3)}{x(2x - 4)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x - 3}{2x - 4} \right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{|x|^2 - 5|x| + 7}{|x| - 2} + \frac{7}{2}}{x - 0} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{(-x)^2 - 5(-x) + 7}{(-x) - 2} + \frac{7}{2}}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{x^2 + 5x + 7}{-x - 2} + \frac{7}{2}}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x^2 + 10x + 14 - 7x - 14}{-2x(x + 2)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x(2x + 3)}{-2x(x + 2)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x + 3}{-2(x + 2)} \right) \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right)$$

فالدالة g لا تقبل الاشتقاق عند 0

ج/ تبين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) :
لدينا:

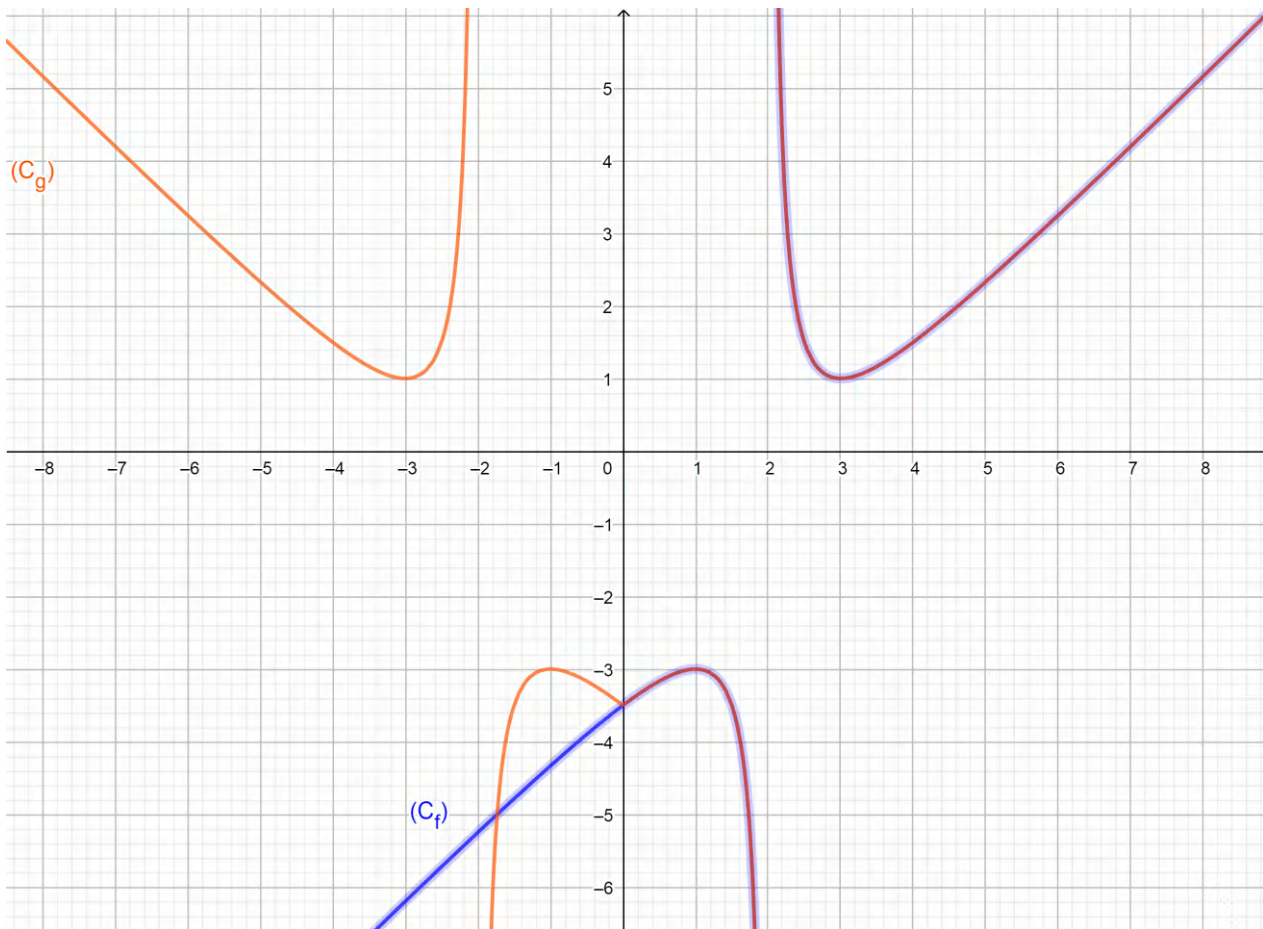
$$\begin{aligned} g(x) &= f(|x|) \\ &= \frac{|x|^2 - 5|x| + 7}{|x| - 2} \\ &= \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} & ; x \geq 0 \\ \frac{(-x)^2 - 5(-x) + 7}{(-x) - 2} & x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه لما $x \geq 0$ (C_f) ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$ (C_f) يناظر (C_g) بالنسبة إلى محور الترتيب.

- تمثيل بيانياً (C_g) في المعلم السابق:

المنحني (C_f) والمنحني (C_g) والجزء الملون بنفسجي يمثل تطابق (C_f) مع (C_g)



التمرين 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بيّن أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$

2 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات.

3 بين أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.

4 عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.

5 ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

6 نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ) ، برهن أنّ النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

7 عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

8 مثل بيانيا كل من (T) ، (Δ) و (C_f) .

حل التمرين 09 :

1 تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{7}{2} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{7}{2} &\Rightarrow \frac{(0)^2 + a(0) + b}{(0)^2 + 2(0) + 2} = \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow b = 7 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + a)(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(x^2 + ax + 7)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 + 4x + ax^2 + 2ax + 2a - 2x^3 - 2ax^2 - 14x - 2x^2 - 2ax - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

بما أن $f'(0) = 0$ لدينا:

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 &\Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2 + 2(0) + 2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 2a - 14 = 0 \\ &\Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}$$

- تبين أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

إذن:

$$f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f :

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) \\ &= 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} \right) &= 1 \end{aligned}$$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$f'(x) = \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 0 \\
 &\Rightarrow -5x^2 - 10x = 0 \\
 &\Rightarrow -5x(x + 2) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} -5x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1

③ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 1$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

④ تعيين أحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الأحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx') :

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} = 0 \\
 &\Rightarrow x^2 + 7x + 7 = 0
 \end{aligned}$$

بعد حساب المميز Δ نجد: $\Delta = 21$ و:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} \cong -1.21 \\ x_2 = \frac{-7 - \sqrt{21}}{2} \cong -5.79 \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \{(-5.79; 0), (-1.21; 0)\}$$

- تقاطع (C_f) مع (yy') :

لدينا سابقا

$$f(0) = \frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{2} \right) \right\}$$

⑤ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} &= 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} - 1 \\ &= \frac{5x+5}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x^2+2x+2) > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$5x+5=0 \Rightarrow x=-1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- الوضعية النسبية:

- لما $x \in]-\infty; -1[$ (C_f) تحت (Δ) .
- لما $x = -1$ (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات $\omega(-1; 1)$
- لما $x \in]-1; +\infty[$ (C_f) فوق (Δ)

⑥ برهان أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) :

$$\begin{aligned} f(2\alpha - x) + f(x) &= f(-2 - x) + f(x) \\ &= 1 + \frac{5(-2-x)+5}{(2+x)^2+2(-2-x)+1} + 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= 2 + \frac{-10-5x+5}{x^2+2x+2} + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= 2 - \frac{(5x+5)}{x^2+2x+2} + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= 2 \\ &= 2(1) \end{aligned}$$

ومنه النقطة $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

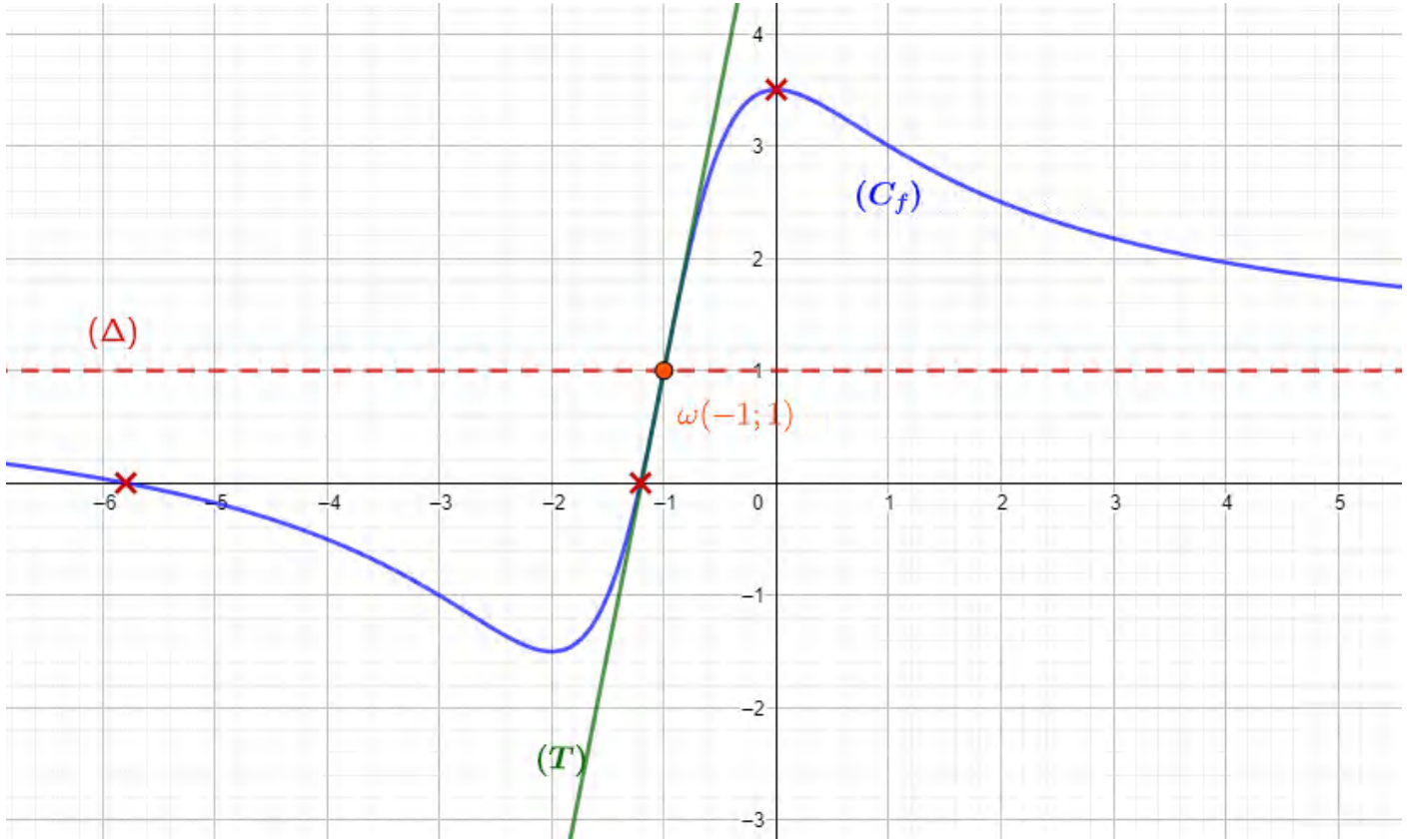
⑦ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ (T): y &= \frac{-5+10}{(1-2+2)^2}(x+1) + 1 \\ (T): y &= 5x+6 \end{aligned}$$

⑧ التمثيل البياني لكل من (T) ، (Δ) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = 1$
- نعين النقطة ω مركز تناظر المنحني (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y = -5x + 6$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



◀ بالتوفيق في بكالوريا 2023 ▶