

سلاسل المنجد - دروس و تمارين



السلسلة 2-03-2

العمل و الطاقة الحركية الدورانية

عرض نظري و تمارين محلولة

يمكن تحميل السلسلة بصيغة pdf من موقع المنجد :
www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل - تمارين - فيديوهات)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في نفس الموقع الإلكتروني .

لكي يصلك جديد موقع المنجد تابع صفحة الفيسبوك
التالية :

facebook.com/el moundjidff

الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نابت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
fares_fergani@yahoo.fr
0771998109

الإصدار : نوفمبر/2022

مراجعة



العمل و الطاقة الميكانيكية الحرارية

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

السلسلة 03-2 – 01

عرض نظري و تمارين

1- الفاصلة الزاوية و السرعة الزاوية

• السرعة الخطية و السرعة الزاوية :

- نعتبر جسم نقطي ينتقل على مسار دائري نصف قطره R و مركزه O من موضع M_1 عند اللحظة t_1 إلى الموضع M_2 عند اللحظة t_2 ، أثناء ذلك يقطع مسافة خطية S على المحيط و في نفس الوقت يسمح زاوية θ (الشكل) .

- يعبر عن المسافة الخطية S بدلالة الزاوية الممسوحة θ وفق العلاقة التالية :

$$S = R \theta$$

حيث R نصف قطر المسار الدائري و الذي يقدر بالمتر (m) .

- السرعة الخطية المتوسطة التي نرمز لها بـ v_m و وحدتها المتر/الثانية (m/s) بين لحظتين t_1 ، t_2 هي حاصل قسمة المسافة الخطية المقطوعة بين هاتين اللحظتين على المدة الزمنية Δt الموافقة أي :

$$v_m = \frac{S}{\Delta t}$$

- السرعة الزاوية المتوسطة التي نرمز لها بـ ω_m و وحدتها الراديان/الثانية (rad/s) بين لحظتين t_1 ، t_2 هي حاصل قسمة الزاوية الممسوحة بين هاتين اللحظتين على المدة الزمنية Δt الموافقة أي :

$$\omega_m = \frac{\theta}{\Delta t}$$

- السرعة الخطية اللحظية التي نرمز لها بـ v و وحدتها المتر/الثانية (m/s) هي سرعة المتحرك الخطية عند لحظة ما .

- السرعة الزاوية اللحظية التي نرمز لها بـ ω و وحدتها الراديان/الثانية (rad/s) هي السرعة الزاوية للمتحرك عند لحظة ما .

- يعبر عن السرعة الزاوية اللحظية ω بدلالة السرعة الخطية اللحظية v بالعلاقة :

$$\omega = \frac{v}{R} \leftrightarrow v = R \omega$$

أمثلة : (حساب بعض السرعات الزاوية)

▪ دوران عقرب الثواني في ساعة حائطية كلاسيكية :

عقرب الثواني في الساعة الحائطية ينجز دورة (أي $\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$) خلال 1 دقيقة أي ($\Delta t = 60 \text{ s}$) لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60} = 0.10 \text{ rad/s}$$

▪ دوران عقرب الدقائق في ساعة حائطية كلاسيكية :

عقرب الدقائق في الساعة الحائطية ينجز دورة (أي $\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$) خلال 1 ساعة أي ($\Delta t = 3600 \text{ s}$) لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3600} = 1.74 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

▪ دوران الأرض حول نفسها :

الأرض تدور حول نفسها خلال 24 ساعة فهي تسمح زاوية ($\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$) خلال 24 ساعة أي خلال مدة زمنية

$$\Delta t = 24 \cdot 3600 = 86400 \text{ s}$$

لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

▪ دوران الأرض حول الشمس باعتبار السنة تقدر بـ 365.25 يوم :

الأرض تدور حول الشمس خلال سنة فهي تسمح زاوية ($\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$) خلال سنة أي خلال مدة زمنية قدرها :

$$\Delta t = 365.25 \cdot 24 \cdot 3600 = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

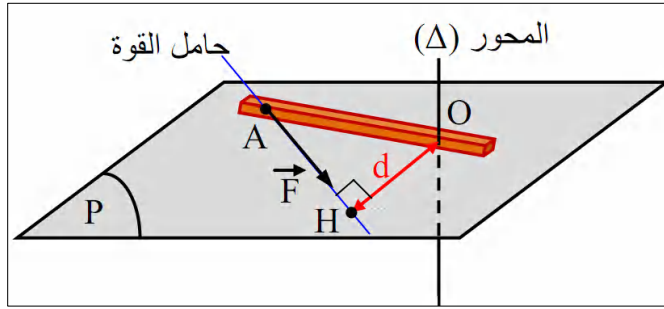
لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3.15 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

2- عزم القوة و عزم المزدوجة

• عزم قوة بالنسبة لمحور دوران Δ :

- عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور دوران Δ و الذي يرمز له بـ $M_{/\Delta}(\vec{F})$ و وحدته النيوتن في المتر (N.m) هو مقدار جبري يعبر عن شدة الفعل الدوراني لجسم ، حيث كلما كان مقدار العزم أكبر كان أثر الفعل الدوراني أكبر .



- يحسب عزم قوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور دوران Δ ، بجداء شدة هذه القوة في الذراع d الذي يمثل البعد العمودي بين حامل هذه القوة و محور الدوران Δ (الشكل) .

عزم القوة موجبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ تدير الجسم في الاتجاه الموجب و نكتب في هذه الحالة :

$$M_{/\Delta}(\vec{F}) = + F.d$$

و يكون سالبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ تدير الجسم في الاتجاه السالب و نكتب في هذه الحالة :

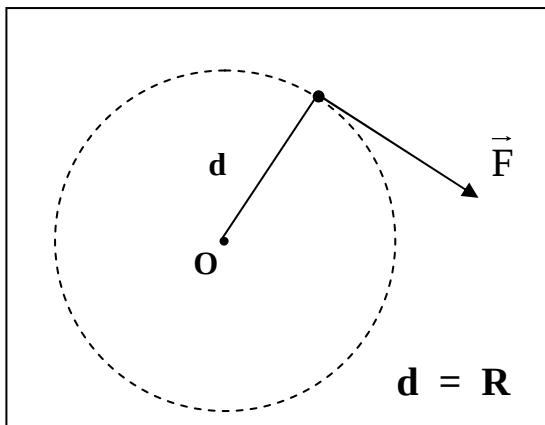
$$M_{/\Delta}(\vec{F}) = - F.d$$

حالة خاصة :

إذا كانت القوة مماسية للمسار يكون الذراع d مساوي لنصف القطر R ($d = R$) (الشكل) .

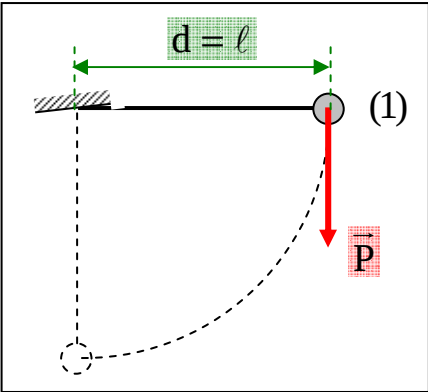
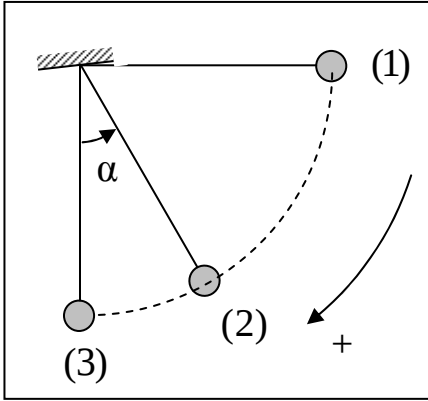
ملاحظة :

عندما يخضع جسم قابل للدوران حول محور ثابت إلى قوتين متعاكستين (وفق جهة الدوران) فإن الجسم لا يتحرك في جهة الشدة الأكبر و إنما يتحرك في جهة القوة ذات العزم الأكبر ، و بالمثل إذا كان الجسم يخضع إلى عدة قوى (منها في الجهة الموجبة و الآخر في الجهة السالبة) فالجسم يتحرك في الجهة التي يكون فيها مجموع العزوم أكبر .



التمرين (1) : (التمرين : 002 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر جسم نقطي (S) كتلته $m = 100 \text{ g}$ معلق بخيط طوله $\ell = 40 \text{ cm}$.
أحسب عزم الثقل $\vec{P}$ في الحالات (1) ، (2) ، (3) المبينة في الشكل التالي :
يعطى : $g = 10 \text{ N/kg}$ ، $\alpha = 30^\circ$.

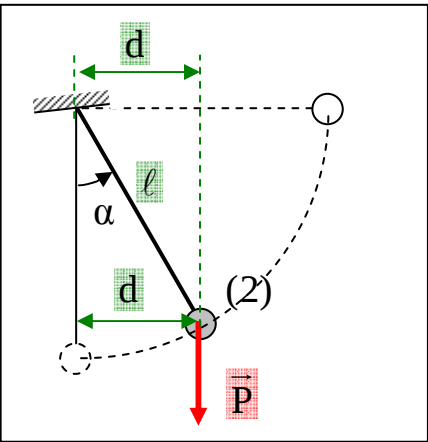


$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P \cdot d = m \cdot g \cdot d$$

$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = m g \ell$$

$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = 0.1 \cdot 10 \cdot 0.4 = 0.4 \text{ N.m}$$

من الشكل : $d = \ell$ و منه :



$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P \cdot d = m \cdot g \cdot d$$

$$\sin \alpha = \frac{d}{\ell} \rightarrow \ell = d \sin \alpha$$

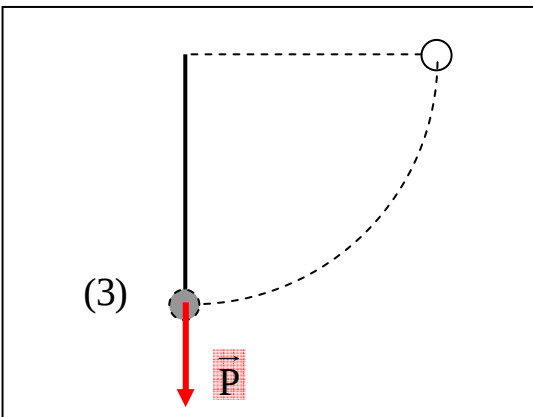
$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P \cdot \ell \sin \alpha = m g \ell \sin \alpha$$

$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = 0.1 \cdot 10 \cdot 0.4 \cdot \sin 30^\circ = 0.2 \text{ N.m}$$

الحالة (2) :

من الشكل :

ومنه يصبح :

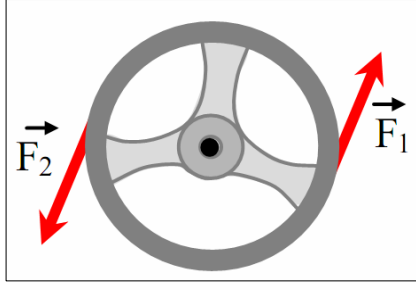


$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P \cdot d = 0$$

الحالة (3) :

لأن $\vec{P}$ مارة من مركز الدوران .

● عزم المزدوجة :



- تدعى جملة قوتين $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ محصلتهما معدومة و ليس لهما نفس الحامل بالمزدوجة ، كمثال على ذلك نذكر المزدوجة التي تؤثر بها يدي السائق على مقود السيارة (الشكل) :

- يرجع حساب عزم مزدوجة قوتين $(\vec{F}_2, \vec{F}_1)$ تؤثر على جسم صلب يدور حول محور Δ إلى حساب المجموع الجبري لعزمي القوتين أي إذا رمزنا لعزم المزدوجة بـ M نكتب :

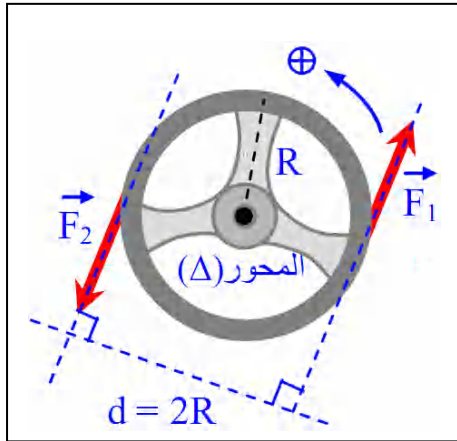
$$M = M_{/\Delta}(\vec{F}_1) + M_{/\Delta}(\vec{F}_2) \rightarrow M = F_1 \cdot R + F_2 \cdot R$$

و حيث أن القوتين المشكلتين للمزدوجة متساويتين في الشدة أي $F_1 = F_2$ يصبح :

$$M = F \cdot R + F \cdot R = 2 R F$$

يسمى المقدار $2R$ ذراع المزدوجة ، يرمز له بـ d و نكتب :

$$M = \pm Fd$$

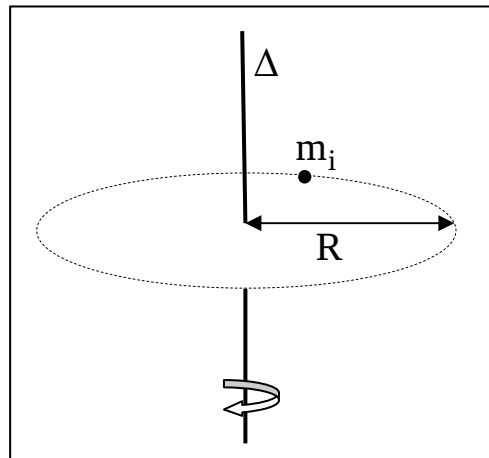


- من خلال عبارة عزم المزدوجة المتحصل عليها نلاحظ أن عزم المزدوجة لا يتعلق بمحور الدوران ، و إنما يتعلق بالبعد بين حامي القوتين المشكلتين للمزدوجة ، و بالتالي عندما نتكلم عن عزم المزدوجة لا داعي لذكر محور الدوران خلافا لعزم القوة التي يجب دائما ذكر المحور الذي يحسب بالنسبة إليه العزم .

3- عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور دوران Δ

● عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور Δ :

- تقاس العطالة الدورانية لجسم صلب يتحرك بالنسبة لمحور Δ ثابت بمقدار فيزيائي يدعى عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور الدوران Δ .



- يعرف عزم العطالة $J_{/\Delta}$ بالنسبة لمحور Δ لجسم نقطي m و يبعد مسافة d عن هذا المحور بالعلاقة التالية :

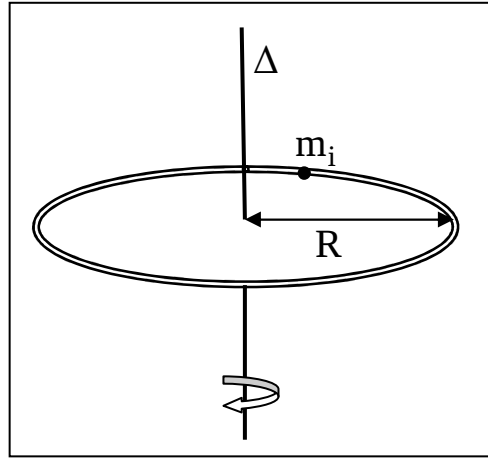
$$J_{/\Delta} = m d^2$$

- وحدة عزم العطالة في النظام الدولي هي kg m^2 .
 - يحسب عزم عطالة جملة نقاط مادية كتلة كل نقطة m_1 ، m_2 ، m_3 تبعد كل منها عن محور الدوران على التوالي مسافة d_1 ، d_2 ، d_3 (الشكل) بجمع عزوم عطالة كل نقطة بالنسبة لنفس المحور :

$$J_{/\Delta} = \sum m_i d_i^2$$

مثال :

لحساب عزم عطالة حلقة نصف قطرها R و كتلتها M (الشكل) نتبع الخطوات التالية :



- نقسم الحلقة إلى عناصر صغيرة كتلتها m_i يمكن اعتبارها نقاطا مادية تبعد كلها بنفس المسافة R عن المحور Δ .
 - تعتبر الحلقة جملة نقاط مادية و يحسب عزم عطالتها بالعلاقة التالية :

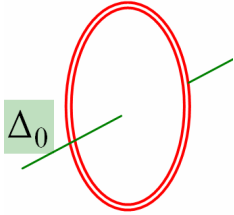
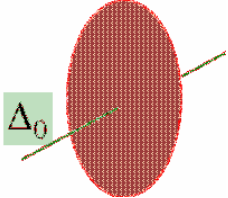
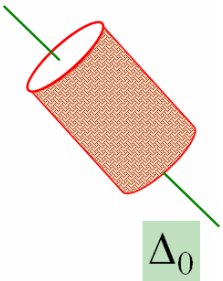
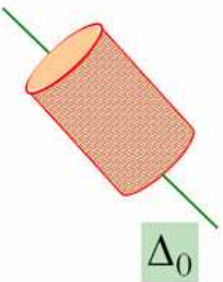
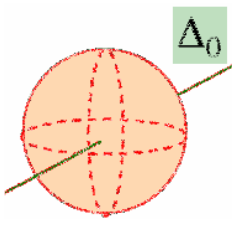
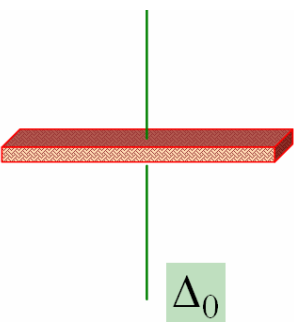
$$J_{/\Delta} = m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_3 R^2 + \dots$$

$$J_{/\Delta} = \sum m_i R^2 = (\sum m_i) R^2 = MR^2$$

$$J_{/\Delta} = MR^2$$

حيث : $\sum m_i = M$ هي كتلة الحلقة و المساوية لمجموع كتل النقاط المادية المشكلة لها .

● عزوم عطالة بعض الأجسام الصلبة المتجانسة :

الشكل	عبارة عزم العطالة	الجسم
	$j_{\Delta_0} = M R^2$	عزم عطالة حلقة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها
	$j_{\Delta_0} = \frac{1}{2} M R^2$	عزم عطالة قرص كتلته M و نصف قطره R بالنسبة لمحوره Δ_0 المار من مركزه
	$j_{\Delta_0} = M R^2$	عزم عطالة اسطوانة مجوفة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها
	$j_{\Delta_0} = \frac{1}{2} M R^2$	عزم عطالة اسطوانة مملوءة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها و الموازي لها
	$j_{\Delta_0} = \frac{2}{5} M R^2$	عزم عطالة كرة مملوءة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها
	$j_{\Delta_0} = \frac{1}{12} M L^2$	عزم عطالة ساق كتلتها M و طولها L بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من منتصفها و عمودي عليها

• نظرية هويغنز :

- لحساب عزم عطالة جسم صلب كتلته m يدور حول محور Δ غير منطبق على محوره Δ_0 (الشكل) ، نطبق بنظرية هويغنز .
- تنص نظرية هويغنز على ما يلي :
- " عزم عطالة جسم صلب بالنسبة للمحور Δ غير منطبق على محور الجسم Δ_0 مساوي لعزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحوره Δ_0 مضاف إليه جداء كتلة هذا الجسم في مربع البعد بين محور الجسم Δ_0 و محور الدوران Δ " أي :

$$J_{/\Delta} = J_{/\Delta_0} + m d^2$$

ملاحظة :

- عزم عطالة جملة ميكانيكية تتكون من عدة أجسام صلبة بالنسبة لمحور (Δ) مساوي لمجموع عزوم عطالة هذه الأجسام بالنسبة لنفس المحور Δ .

التمرين (2) : (التمرين : 003 في بنك التمارين على الموقع) (*)

- 1- قضيب طوله $L = 40 \text{ cm}$ و كتلته $m = 120 \text{ g}$ قابل للدور حول محور Δ مار من طرفه (الشكل-1) :

- أكتب عبارة عزم عطالة القضيب بالنسبة للمحور Δ بدلالة m ، L ثم احسب قيمته .

- 2- جملة ثلاث أجسام ، قضيب (B) كتلته $m_1 = 120 \text{ g}$ و طوله $L = 40 \text{ cm}$ و كرتين (P_1) ، (P_2) متماثلتين كتلة كل منهما $m_2 = m_3 = m = 100 \text{ g}$ و نصف قطر كل منهما $R_2 = R_3 = R = 20 \text{ cm}$ ملتصقتين بالقضيب B (الشكل-2) .
- أكتب عبارة عزم عطالة كل جسم بالنسبة لمحور الدوران Δ ، و احسب قيمتها .
- ب- أحسب عزم عطالة الجملة المتكون من الأجسام الثلاث بالنسبة لمحور Δ .

الأجوبة :

- 1- عزم عطالة القضيب :
- بتطبيق نظرية هويغنز :

$$J_{/\Delta} = J_{/\Delta_0} + m d^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow J_{/\Delta} = \frac{1}{12} m L^2 + \frac{1}{4} m L^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{mL^2 + 3mL^2}{12} = \frac{4mL^2}{12} \rightarrow J_{/\Delta} = \frac{1}{3} m L^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{3} \cdot 0,12 (0,4)^2 = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

2- أ- عزم عطالة (P_1) ، (P_2) ، (B) بالنسبة للمحور Δ :

■ عزم عطالة القضيب (B) :

المحور Δ منطبق على محور القضيب العمودي عليه و مار من مركزه ، و عليه :

$$J_{/\Delta}(B) = \frac{1}{12} m_1 L^2 = \frac{1}{12} 0,12 (0,4)^2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

■ عزم عطالة الكرة (P_1) :

المحور Δ لا يمر من مركز الكرة (P_1) ، و بالتالي نطبق نظرية هويجنز :

$$J_{/\Delta}(P_1) = \frac{2}{5} m R^2 + m d^2$$

من الشكل :

$$d = R + \frac{L}{2} = 0,1 + \frac{0,4}{2} = 0,3 \text{ m}$$

و منه :

$$J_{/\Delta}(P_1) = \frac{2}{5} \cdot 0,1 \cdot (0,2)^2 + 0,1(0,3)^2 = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

■ عزم عطالة الكرة (P_2) :

بنفس الطريقة المتبعة في حساب عزم عطالة الكرة (P_1) يكون :

$$J_{/\Delta}(P_2) = \frac{2}{5} m R^2 + m d^2$$

من الشكل :

$$d = R + \frac{L}{2} = 0,1 + \frac{0,4}{2} = 0,3 \text{ m}$$

و منه :

$$J_{/\Delta}(P_2) = \frac{2}{5} \cdot 0,1 \cdot (0,2)^2 + 0,1(0,3)^2 = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

ب- عزم عطالة الجملة المتكونة من القضيب (B) و الكرتين (P_1) ، (P_2) :

عزم عطالة الجملة المتكونة من الأجسام المذكورة بالنسبة للمحور Δ هي مجموع عزوم عطالة هذه الأجسام بالنسبة للمحور Δ و عليه :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta}(B) + J_{\Delta}(P_1) + J_{\Delta}(P_2)$$

$$J_{\Delta} = 1,6 \cdot 10^{-3} + 4,6 \cdot 10^{-3} + 4,6 \cdot 10^{-3} = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

و منه :

$$J_{/\Delta}(P_1) = \frac{2}{5} \cdot 0,1 \cdot (0,2)^2 + 0,1(0,3)^2 = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

4- توازن جسم صلب خاضع إلى قوى

• شرط توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت :

يتوازن جسم صلب قابل للدوران حول محور Δ ثابت و خاضع إلى تأثير قوى خارجية عندما يكون المجموع الجبري لعزوم هذه القوى معدوم أي :

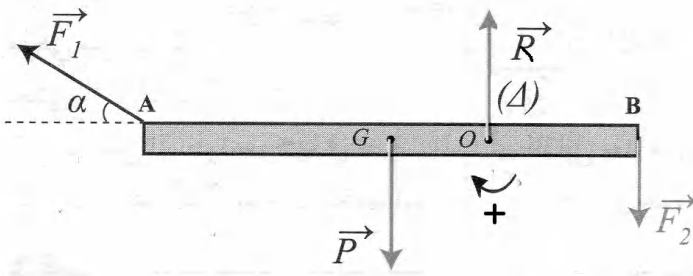
$$\sum M_{/\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0$$

• شرط توازن جسم صلب خاضع إلى قوى متلاقية :

- يتوازن جسم صلب خاضع إلى قوى خارجية متلاقية إذا تحقق :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

التمرين (3) : (التمرين : 018 في بنك التمارين على الموقع) (*)



1- قضيب متجانس AB ثقله $P = 10 \text{ N}$ يمكنه الدوران حول محور أفقي (Δ) . تطبق عند طرفيه A و B قوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ شدتهما : $F_1 = 2 \text{ N}$ ، $F_2 = 1,5 \text{ N}$ ، و واقعتين في المستوي الشاقولي العمودي على المحور (Δ) .

يعطى : $OB = 30 \text{ cm}$ ، $OA = 70 \text{ cm}$ ،

$\alpha = 60^\circ$ ، $OG = 20 \text{ cm}$

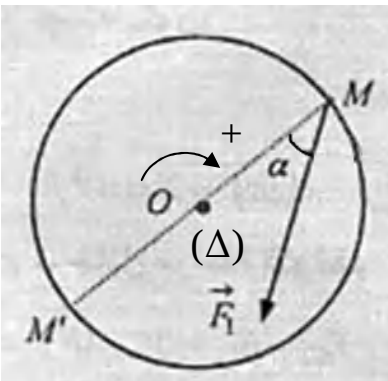
أ- أحسب مجموع عزوم القوى المطبقة على القضيب .

ب- في أي اتجاه يدور القضيب ؟

2- قرص دائري نصف قطره $R = 30 \text{ cm}$ ، يستطيع الدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) المار من مركزه في الاتجاه المبين في الشكل .

أ- تؤثر في النقطة (M) من محيط القرص قوة $\vec{F}_1$ شدتها 2 N بحيث يصنع حاملها زاوية $\alpha = 30^\circ$ (الشكل) . أحسب عزم هذه القوة بالنسبة لمحور الدوران (Δ) .

ب- حدد جهة القوة $\vec{F}_2$ المماسية لمحيط القرص و التي ينبغي أن تؤثر في النقطة M' نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة (O) حتى يكون القرص في حالة توازن (لا يدور) . ثم أحسب شدتها .

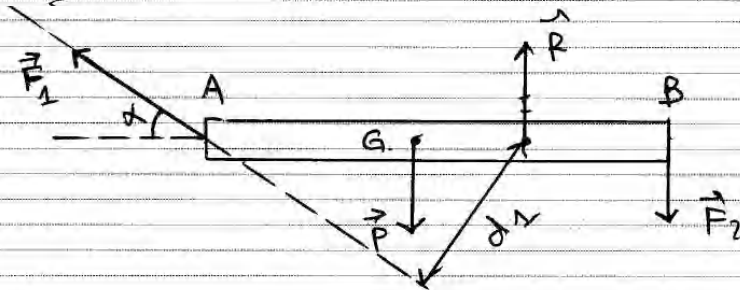


الاجوبة :

1- حساب مجموع عزوم القوى المطبقة :

القوى المطبقة : $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{P}$, $\vec{R}$

$$\sum \mathcal{O}_D(\vec{F}) = \mathcal{O}_D(\vec{F}_1) + \mathcal{O}_D(\vec{F}_2) + \mathcal{O}_D(\vec{P}) + \mathcal{O}_D(\vec{R})$$



$$\bullet \mathcal{O}_D(\vec{F}_1) = F_1 d_1$$

من الشكل :

$$\sin \alpha = \frac{d_1}{OA} \rightarrow d_1 = OA \cdot \sin \alpha$$

$$\mathcal{O}_D(\vec{F}_1) = F_1 \cdot OA \cdot \sin \alpha = 2 \times 0.4 \cdot \sin 60^\circ = +1.71 \text{ N.m}$$

$$\bullet \mathcal{O}_D(\vec{F}_2) = F_2 \cdot OB = 1.5 \times 0.3 = 0.45 \text{ N.m}$$

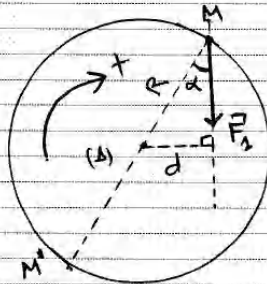
$$\bullet \mathcal{O}_D(\vec{P}) = -P \cdot OG = -10 \times 0.2 = -2 \text{ N.m}$$

$$\sum \mathcal{O}_D(\vec{F}) = 1.71 + 0.45 - 2 = -0.34 \text{ N.m} \quad \text{اذن :}$$

2- جهة دوران القضيب :

الاحاط : $\sum \mathcal{O}_D(\vec{F}) < 0$ ، اذن القضيب

يدور في الاتجاه السالب (عكس عقارب الساعة)

ب- عزوم القوة $\vec{F}_1$ بالنسبة لمحور الدوران :

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_1) = F_1 d$$

$$\sin \alpha = \frac{d}{R} \rightarrow d = R \sin \alpha$$

من الشكل

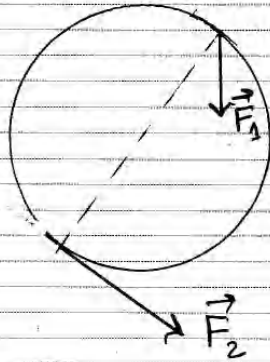
ومنه

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_1) = F_1 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_1) = 2 \times 0,3 \cdot \sin 30^\circ = 0,3 \text{ N.m}$$

2- جهة ونسبة القوة $\vec{F}_2$ اللازم تطبيقها في M من يكون القرص في حالة توازن :

- جهة القوة $\vec{F}_2$ تكون في الاتجاه السالب (عكس عقارب الساعة)



السؤال 2
شروط توازن الجملة :

$$\mathcal{M}_A = 0$$

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_A(\vec{F}_2) = 0$$

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_1) - F_2 R = 0$$

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_1) = F_2 R \rightarrow F_2 = \frac{\mathcal{M}_A(\vec{F}_1)}{R}$$

$$F_2 = \frac{0,3}{0,3} = 1 \text{ N}$$

5- عمل عزم ثابت في مسار دائري

• عبارة عزم ثابت في مسار دائري :

عمل قوة $\vec{F}$ ثابتة أثناء الانتقال على مسار دائري نصف قطره R من موضع A إلى موضع B يعبر عنه بالعلاقة :

$$W_{AB}(\vec{F}) = M_{/\Delta}(\vec{F}) \cdot \theta$$

حيث : $M_{/\Delta}$ عزم القوة $\vec{F}$ مقدر بالنيوتن في المتر (N.m) ، θ الزاوية الممسوحة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B و التي تقدر بالراديان (rad) .

ملاحظة :

يمكن أيضا تطبيق نفس عبارة العمل السابقة في حالة المزدوجة حيث يعبر عن عمل هذه الأخيرة بالعلاقة التالية :

$$W = M \theta$$

حيث : W عمل المزدوجة تقدر بالجول (J) ، M عزم المزدوجة تقدر بالنيوتن في المتر (N.m) ، θ الزاوية الممسوحة تقدر بالراديان .

6- الطاقة الحركية الدورانية

• عبارة الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دورانية :

الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب يدور حول محور ثابت Δ هو جداء عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لنفس المحور في مربع السرعة الزاوية (السرعة الدورانية) لهذا الجسم :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

• عبارة الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دورانية انسحابية :

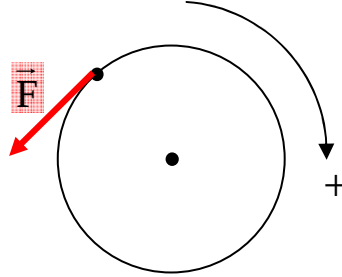
إذا كان للجسم الصلب (S) حركة انسحابية و دورانية في آن واحد ، كتدحرج كرة مثلا على مستوي مائل ، تساوي الطاقة الحركية لهذا الجسم ، مجموع طاقتيه الحركية الانسحابية و الدورانية أي :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

التمرين (4) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)

قرص (D) كتلته $m = 2 \text{ kg}$ و نصف قطره $R = 20 \text{ cm}$ يدور بمعدل 180 دورة في الدقيقة حول محور Δ مار من مركزه (o).

- 1- أوجد السرعة الزاوية للقرص و كذا السرعة الخطية لنقطة من محيطه .
- 2- تطبق قوة $\vec{F}$ مماسية للقرص و معاكسة لجهة حركته فيتوقف القرص بعد انجازه دورة واحدة .



بإهمال احتكاك القرص مع محور الدوران . أوجد شدة القوة $\vec{F}$.

الأجوبة :

1- السرعة الزاوية و الخطية :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\theta}{2\pi} = \frac{180 \cdot 2\pi}{60} = 6\pi \text{ rad/s} \\ v &= R\omega = 0.2 \cdot 6\pi = 3.77 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2- شدة القوة $\vec{F}$:

- الجملة المدروسة : (قرص) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : ثقل القرص $\vec{P}$ ، قوة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$ ، القوة المعاكسة للحركة $\vec{F}$.

حيث : $W_{A-B}(\vec{R}) = 0$ ، $W_{A-B}(\vec{P}) = 0$.

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضع (A) الذي طبقت فيه القوة $\vec{F}$ على القرص و الموضع (B) الذي توقف فيه القرص عن الدوران .

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} - |W_{A-B}(\vec{F})| = E_{CB}$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega_A^2 - | - M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \theta | = 0$$

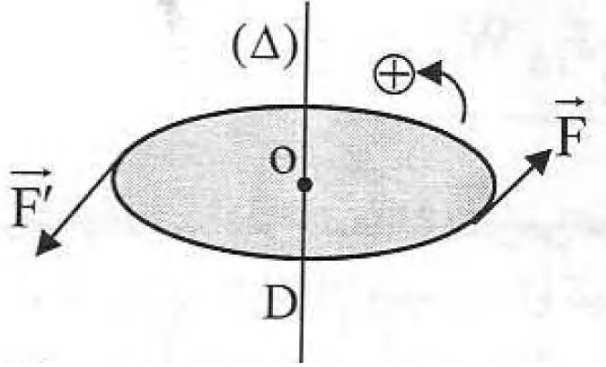
$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega_A^2 - | - F \cdot R \cdot \theta | = 0$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_A^2 - F \cdot R \cdot \theta = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega_A^2 = F \cdot R \cdot \theta \rightarrow \frac{1}{4} m R^2 \omega_A^2 = F \cdot R \cdot \theta$$

$$\frac{1}{4} m R \omega_A^2 = F \cdot \theta \rightarrow F = \frac{m \cdot R \cdot \omega_A^2}{4 \theta} \rightarrow F = \frac{2 \cdot 0.2 (6\pi)^2}{4 \cdot 2\pi} = 5.65 \text{ N}$$

التمرين (5) : (التمرين : 010 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نؤثر على قرص (D) ، نصف قطره $R = 20 \text{ cm}$ و كتلته $m = 314 \text{ g}$ بمزدوجة قوى $(\vec{F}, \vec{F}')$ فنجعله يدور حول محور (Δ) يمر من مركزه ابتداء من السكون من موضع نعتبره A إلى موضع نعتبره B ، يسمح عندها القرص 20 دورة .



1- أوجد ما يلي :
أ- عزم مزدوجة القوى $(\vec{F}, \vec{F}')$ بالنسبة للمحور Δ علما أن : $F = F' = 10 \text{ N}$

ب- عمل هذه المزدوجة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B ماسحا الزاوية θ المذكورة .

2- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة (قرص) بين A و B .
3- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (قرص) بين A و B . أوجد السرعة الزاوية للقرص عند الموضع B .

الأجوبة :

1- أ- عزم مزدوجة القوى $(\vec{F}, \vec{F}')$:

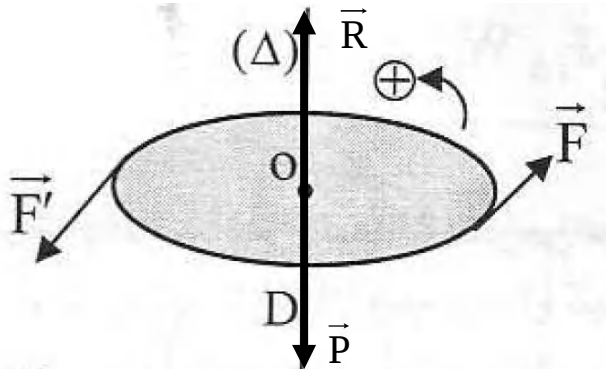
$$M(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot d = F (2R) = 2 F \cdot R$$

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = 2 \cdot 10 \cdot 0,2 = 4 \text{ N.m}$$

- عمل المزدوجة :

$$W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = M_{/\Delta}(\vec{F}, \vec{F}')$$

$$W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = 4 \cdot 20 \cdot 2\pi = 502,4 \text{ J}$$

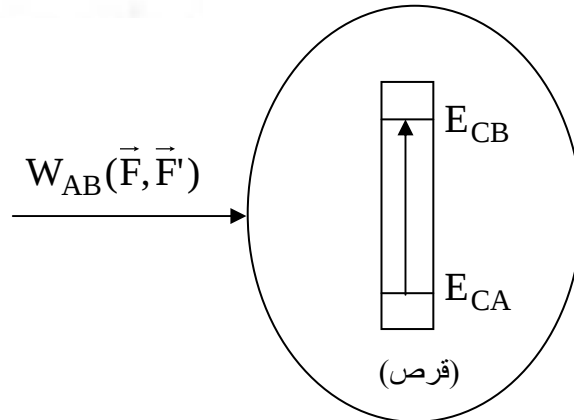


2- الحصيلة الطاقوية للجملة (قرص) بين A و B :

- الجملة المدروسة : قرص

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، مزدوجة القوى $(\vec{F}, \vec{F}')$.



3- السرعة الزاوية عند B :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (قرص) بين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

بالاعتماد على الحصيلة الطاقوية السابقة :

$$E_{CA} + W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = E_{CB}$$

$$0 + W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = \frac{1}{2} J \omega_B^2$$

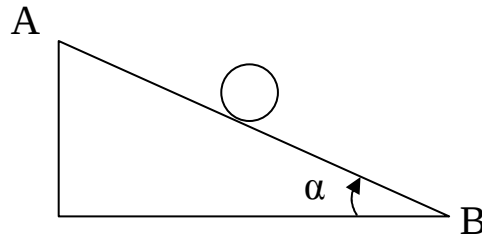
$$W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = \frac{1}{2} J \omega_B^2 \rightarrow W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega_B^2$$

$$W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = \frac{1}{4} m R^2 \omega_B^2 \rightarrow \omega_B = \sqrt{\frac{4 W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}')}{m R^2}}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{4.502,4}{0,314 \cdot (0,2)^2}} = 400 \text{ rad/s}$$

التمرين (6) : (التمرين : 007 في بنك التمارين على الموقع) (*)

من نقطة A أعلى مستوي مائل طوله $AB = 3 \text{ m}$ و يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30^\circ$ ، نترك بدون سرعة ابتدائية كرة كتلتها $m = 400 \text{ g}$ و نصف قطرها $R = 20 \text{ cm}$ تتدحرج باتجاه نقطة B أسفل المستوي المائل ، أثناء ذلك تخضع الكرة إلى قوة احتكاك نعتبر شدتها ثابتة و تساوي 1 N .



- 1- أحسب عزم عطالة الكرة بالنسبة لمحور دورانها .
- 2- أكتب بدلالة m ، v ، عبارة الطاقة الحركية للكرة .
- 3- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة ، أوجد سرعة مركز الكرة عن الموضع B . يعطى : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

الأجوبة :

- 1- عزم عطالة الكرة بالنسبة لمحور دورانها :

$$J_{/\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{2}{5} \cdot 0,4 (0,2)^2 = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

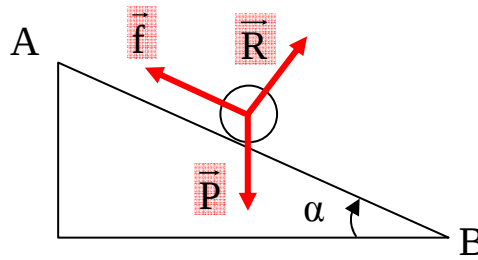
2- عبارة الطاقة الحركية للكرة بدلالة m ، v :
تدحرج الكرة هو حركة انسحابية دورانية لذا يكون :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m R^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 \rightarrow E_C = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{5} (m R^2) \frac{v^2}{R^2}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{5} m v^2 \rightarrow E_C = \frac{5 m v^2 + 2 m v^2}{10} \rightarrow E_C = \frac{7}{10} m v^2$$

3- سرعة مركز الكرة عن الموضع B :



- الجملة المدروسة : (كرة) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B .

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A-B}(\vec{P}) - |W_{A-B}(\vec{f})| = E_{CB}$$

$$0 + mgh - |f \cdot AB| = \frac{7}{10} m \cdot v_B^2 \rightarrow mgh - f \cdot AB = \frac{7}{10} m \cdot v_B^2$$

من الشكل :

$$\sin \alpha = \frac{h}{AB} \rightarrow h = AB \sin \alpha$$

و منه يصبح :

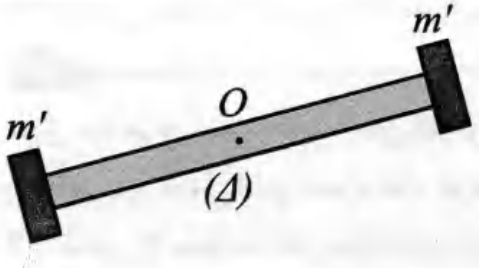
$$mg \cdot AB \cdot \sin \alpha - f \cdot AB = \frac{7}{10} m \cdot v_B^2$$

$$AB(mg \cdot \sin \alpha - f) = \frac{7}{10} m \cdot v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{10 \cdot AB(mg \cdot \sin \alpha - f)}{7m}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{10 \cdot 3(0,4 \cdot 10 \cdot \sin 30 - 1)}{7 \cdot 0,4}} = 3,27 \text{ m/s}$$

5- تمارين متنوعة

التمرين (7) : (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (**) (



تتشكل الجملة المبينة في الشكل المقابل من قضيب (B) ، كتلته $m = 200 \text{ g}$ ، طوله $L = 50 \text{ cm}$ و قابل للدوران حول محور أفقي (Δ) يمر من مركزه . يثبت بطرفي القضيب جسمان نقطيان متماثلان (S_1) ، (S_2) كتلة كل منهما $m' = 150 \text{ g}$.

1- ندير الجملة حول المحور (Δ) بسرعة زاوية $\omega = 10,47 \text{ rad/s}$.
جد :

أ- قيمة الزاوية المسوحة θ أثناء هذه الحركة و كذا عدد الدورات المنجزة n خلال دقيقتين الدوران .

ب- عزم عطالة الجملة J_{Δ} بالنسبة لمحور الدوران (Δ) .

ج- الطاقة الحركية للجملة E_{C0} .

2- بعد مدة 2 min من حركة الجملة ، نتركها لحالها فتتباطأ نتيجة قوى احتكاك تعيق حركتها ، فتتوقف خلال مدة 10 min ، نرمز لعمل قوة الاحتكاك بـ W_f .

أ- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة أثناء تباطؤها حتى توقفها .

ب- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة $(S_2 + S_1 + B)$ بين لحظة بداية تباطأ حركة الجملة حتى لحظة توقفها ، أحسب عمل الاحتكاك أثناء هذا الانتقال الذي نعتبره ثابتا .

ج- أحسب الاستطاعة المحولة من الجملة إلى الوسط الخارجي بفعل الاحتكاك .

3- يتوقف القضيب بعد أن يكون قد أنجز 500 دورة ، أحسب عزم قوى الاحتكاك M_f باعتباره ثابتا .

الأجوبة :

1- أ- الزاوية المسوحة θ و

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\Delta t} \rightarrow \theta = \omega_0 \Delta t$$

$$\theta = 10,47 \times 2 \times 60 = 1256,4 \text{ rad}$$

عدد الدورات المنجزة n

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1256,4}{2\pi} \approx 200 \text{ tr}$$

1- ب- عزم عطالة الجملة

الجملة تتكون من القضيب (B) والجسمان النقطيان المتماثلان (S_1) ، (S_2) لذا يكون :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta}(B) + J_{\Delta}(S_1) + J_{\Delta}(S_2)$$

- القميص يدور حول محورة ومنه

$$J_{\Delta}(B) = \frac{1}{12} mL^2$$

- الجسمان النقطيان، ببعدان عن محور الدوران بمقدار $\frac{L}{2}$ ومنه

$$J_{\Delta}(S_1) = J_{\Delta}(S_2) = m \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

اذن

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + m \frac{L^2}{4} + m \frac{L^2}{4}$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} m' L^2 + \frac{1}{4} m' L^2$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{2}{4} m' L^2$$

$$J_{\Delta} = \frac{4}{12} \cdot 0,2 (5)^2 + \frac{1}{2} (0,15) (0,5)^2 = 2,29 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$$

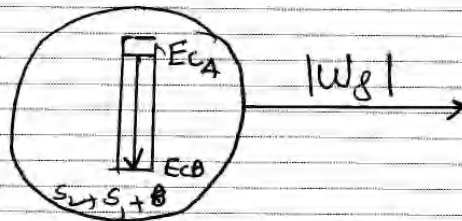
- الطاقة الحركية للجملته

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2$$

$$E_{c0} = \frac{1}{2} \cdot 2,29 \cdot 10^{-2} (10,47)^2 = 1,26 \text{ J}$$

2-2- مخطط التصلة الطاقوية :

نبدأ بحركة الجملته $(S_2 + S_1 + B)$ نتيجة وجود الاحتكاك لذلك يكون



- عمل عتوك الاحتكاك

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملته $(S_2 + S_1 + B)$ بين لحظة بداية التباطؤ (الوضع A) ونقطة التوقف (الوضع B)

$$E_A + E_{\text{مقدمة}} - E_{\text{مكبدة}} = E_B$$

$$E_{cA} - |W_g| = E_{cB} \rightarrow |W_g| = E_{cB} = 1,26 \text{ J}$$

وكون أن الاعدكالة معينة للحركة يكون $W_g < 0$ ومنه

$$W_g = -1,26 \text{ J}$$

2- الاستطاعة المحولة بفعل الاعدكالة

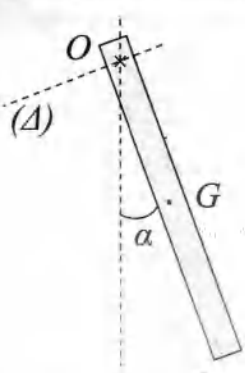
$$P = \frac{|W_g|}{\Delta t} = \frac{1,26}{10 \times 60} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

3- عزم قوة الاعدكالة

$$W_g = C_{\Delta F} \theta \rightarrow C_{\Delta F} = \frac{W_g}{\theta}$$

$$C_{\Delta F} = \frac{-1,26}{500 \times 2\pi} \approx -4 \cdot 10^{-4} \text{ N.m}$$

التمرين (8): (التمرين : 021 في بنك التمارين على الموقع) (**)



مسطرة مسطحة متجانسة يمكنها الدوران بدون احتكاك في مستوي شاقولي حول محور أفقي (Δ) يمر من الطرف (o) للمسطرة . طول المسطرة $L = 50 \text{ cm}$ و كتلتها m .

1- أوجد عبارة عزم عطالة المسطرة بالنسبة للمحور (Δ) بدلالة L ، m .
2- تزااح المسطرة عن وضع توازنها بزاوية $\alpha = 30^\circ$ ثم تترك لحالها بدون سرعة ابتدائية .

أ- مثل مخطط الحويلة الطاقوية للجملة مسطرة بين لحظة تركها (الوضع A) و لحظة مرورها بوضع التوازن (الوضع B) .

ب- أحسب سرعتها الزاوية عند مرورها بوضع التوازن .
يعطى : $g = 9,8 \text{ s/m}^2$.

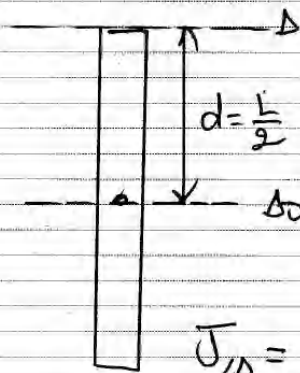
3- تواصل المسطرة حركتها في نصف المستوي المقابل بعد مرورها بوضع التوازن . جد أكبر زاوية β تشكلها المسطرة مع الشاقول في هذه الحالة ؟

يعطى : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

الأجوبة :

1- عبارة عزم عطالة المسطرة بالنسبة للمحور (Δ) :

تبصيف نظرية هويجيتز



$$J_{\Delta} = J_{\Delta_0} + m d^2$$

d هو بعد محور المسطرة Δ_0 الحار من منتصفها ومحور الدوران (Δ) وبالتالي

$$d = \frac{L}{2}$$

كون :
اذن :

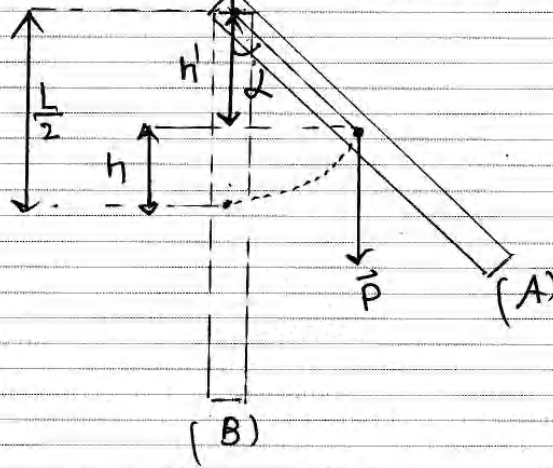
$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + m \frac{L^2}{4}$$

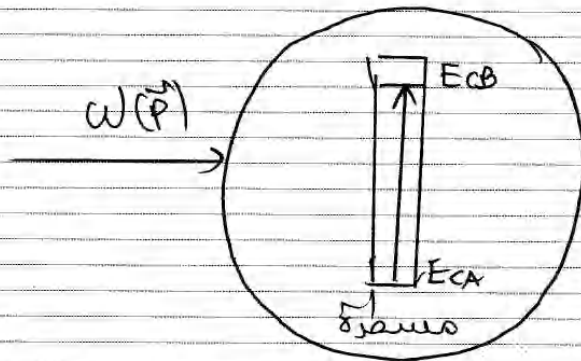
$$J_{\Delta} = \frac{mL^2 + 3mL^2}{12}$$

$$J_{\Delta} = \frac{4mL^2}{12} \rightarrow J_{\Delta} = \frac{1}{3} mL^2$$

2- مخطط الحصلة الطاقوية :



- الجملة المدروسة : مسطرة
- مربع الدراسة : سطحي أرضي يُعتبره عالي
- القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{P}$ ، R



ب- السرعة الزاوية للمسطرة عند مرورها بوضع التوازن
- لتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الحملة مسطرة بين
الوضعين (A) و (B) :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مفقودة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = E_{CB}$$

$$mgh = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_B^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega_B^2$$

$$gh = \frac{1}{6} L^2 \omega_B^2$$

$$6gh = L^2 \omega_B^2$$

من الشكل :

$$\begin{cases} h = \frac{L}{2} - h' \\ \cos \alpha = \frac{h'}{\frac{L}{2}} \rightarrow h' = \frac{L}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

ومنه :

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos \alpha = \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha)$$

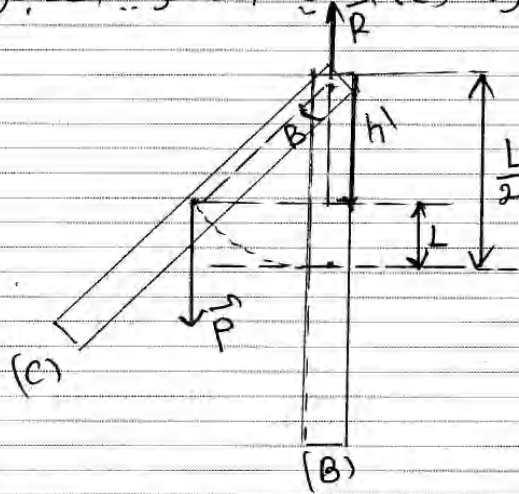
يصبح لدينا :

$$6g \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha) = L^2 \omega_B^2$$

$$3g(1 - \cos \alpha) = L \omega_B^2 \rightarrow \omega_B = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos 30^\circ)}{0.5}}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{3 \times 9.8 (1 - \cos 30^\circ)}{0.5}} = 2.81 \text{ rad/s}$$

3- أكبر زاوية B تشكلها المسطرة :
تشكل المسطرة أكبر زاوية لها عند انعدام سرعتها الزاوية في وضع بغيره (C) في المستوى المقابل بعد مرورها بوضع التوازن.



- البصلة المدروسة مسطرة
- مرجع الدراسة : سطح أرضي نعتبره غايبي
- القوى الخارجية : $\vec{P}$ و $\vec{R}$
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضعين B و C :

$$E_B + E_{\text{مكتبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_C$$

$$E_{\text{ع}} - |\omega(\vec{P})| = E_{\text{ع}}^{\text{و}}$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_B^2 - |-mgh| = 0$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_B^2 - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_B^2 = mgh$$

$$h = \frac{L}{2} - h'$$

$$\cos B = \frac{L'}{\frac{L}{2}} \rightarrow h' = \frac{L}{2} \cos B$$

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos B$$

من الشكل

ومنه

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega_B^2 = mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos B \right)$$

$$\frac{1}{6} mL^2 \omega_B^2 = mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos B \right)$$

$$\frac{1}{6} L^2 \omega_B^2 = g \frac{L}{2} - g \frac{L}{2} \cos B$$

$$\frac{2}{6} L^2 \omega_B^2 = gL - gL \cos B$$

$$\frac{1}{3} L \omega_B^2 = g - g \cos B$$

$$gL \cos B = g - \frac{1}{3} L \omega_B^2$$

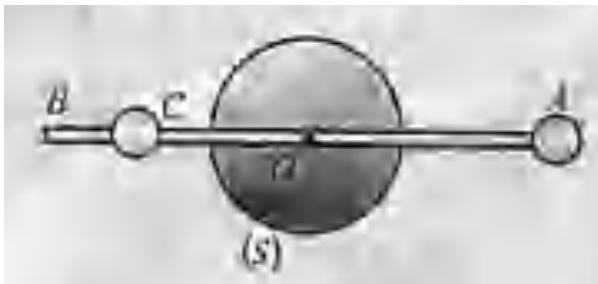
$$\cos B = \sqrt{\frac{g - \frac{1}{3} L \omega_B^2}{g}}$$

$$\cos B = \sqrt{\frac{9,8 - \frac{1}{3} \times 0,15 (2,81)^2}{9,8}}$$

$$\cos B = 0,93 \rightarrow \alpha = 21,5^\circ$$

يصبح

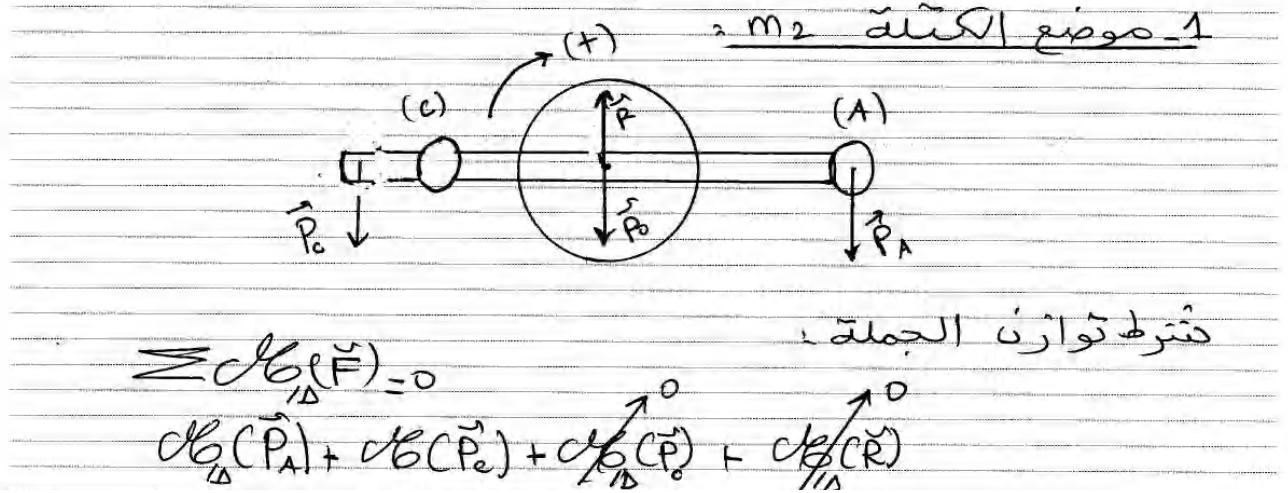
التمرين (9) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (**)



قرص متجانس (S) كتلته $m = 100 \text{ g}$ و نصف قطره $r = 10 \text{ cm}$ ، يمكنه الدوران في مستوي شاقولي حول محور أفقي مار من منتصفه (O) ، يثبت على امتداد أحد أقطاره ساق AB مهمله الكتلة طولها $AB = L = 40 \text{ cm}$ بحيث ينطبق مركزها على مركز القرص و هي تحمل بنهايتها (A) كتلة نقطية $m_1 = 40 \text{ g}$ و تثبت كتلة أخرى $m_2 = 80 \text{ g}$ قيمتها m_2 بنقطة أخرى (C) من الساق بحيث تبقى الجملة متوازنة أفقيا .

- 1- أوجد موضع الكتلة m_2 من الساق .
- 2- انفصل الكتلة m_2 عن الساق و هي في وضع أفقي و من دون سرعة ابتدائية .
أ- ماذا يحدث للجملة المتبقية ؟
ب- أحسب عمل قوة ثقل الكتلة m_1 أثناء الانتقال من الوضع الأفقي للساق إلى الوضع الشاقولي .
ج- أحسب الطاقة الحركية للجملة (قرص S + كتلة m_1) عند المرور بوضع التوازن و كذلك السرعة الزاوية .
يعطى : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

الأجوبة :



$$P_A \cdot OA - P_C \cdot OC = 0$$

$$m_1 \cdot g \cdot OA - m_2 \cdot g \cdot OC = 0$$

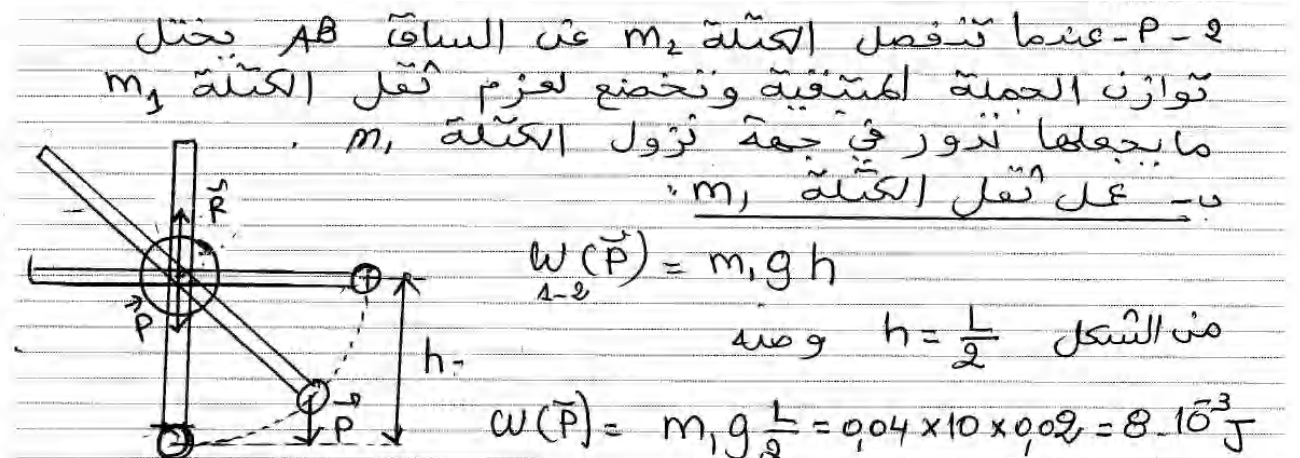
$$m_1 \cdot OA - m_2 \cdot OC = 0$$

من الشكل : $OA = \frac{L}{2}$ و منه :

$$m_1 \frac{L}{2} - m_2 \cdot OC = 0$$

$$m_1 \frac{L}{2} = m_2 \cdot OC \rightarrow OC = \frac{m_1 \cdot L}{2m_2}$$

$$OC = \frac{0,04 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,08} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$



ج- الطاقة الحركية للجملة عند المرور بوضع التوازن :

الجملة المدروسة : (قرص S + كتلة m)

• صرّح الدراسة : سطحي أرضي يُعتبره غايبي

• القوى الخارجية : $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$ ، $\vec{R}$.

• بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة في الموضع (1) أين تكون الساق

أفقية والموضع (2) أين تكون الساق شاقولية .

$$E_1 + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مفقودة}} = E_2$$

$$E_{c1} + W(\vec{P}) = E_{c2}$$

$$E_{c2} = W(\vec{P}) = 8.10^{-3} \text{ J}$$

وهي الطاقة الحركية للجملة (قرص + كتلة m_2) عند المرور بوضع التوازن .

ب- السرعة الزاوية للجملة عند المرور بوضع التوازن :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \omega^2$$

حيث $J_{/\Delta}$ هو عزم عطالة الجملة بالنسبة لمحور الدوران و يكون :

$$J_{/\Delta} = J_{(S)/\Delta} + J_{(m_1)/\Delta}$$

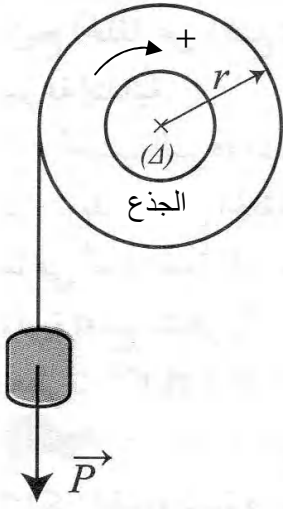
$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m_s r^2 + m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \rightarrow J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m_s r^2 + \frac{1}{4} m_1 L^2$$

و منه يصبح :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_s r^2 + \frac{1}{4} m_1 L^2 \right) \omega^2$$

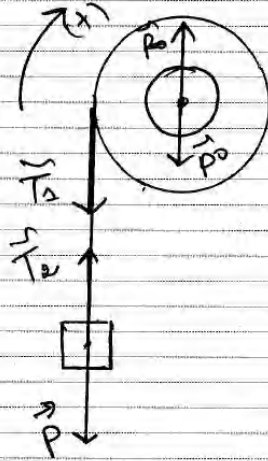
$$E_{c2} = \left(\frac{1}{4} m_s r^2 + \frac{1}{8} m_1 L^2 \right) \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{E_{c2}}{\frac{1}{4} m_s r^2 + \frac{1}{8} m_1 L^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8.10^{-3}}{\frac{1}{4} \cdot 0,1 \cdot (0,1)^2 + 0,125 \cdot 0,04 (0,4)^2}} = 2,76 \text{ rad/s}$$

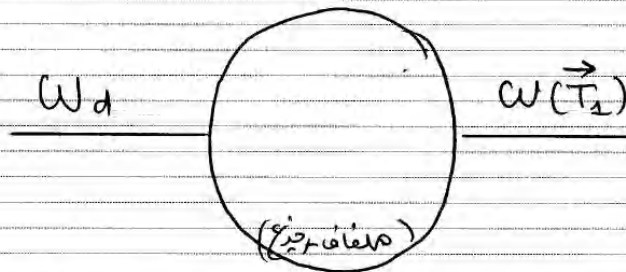
التمرين (10) : (التمرين : 020 في بنك التمارين على الموقع) (**) 

يدار ملفاف بواسطة جذع محرك يطبق على المحور (Δ) مزدوجة عزمها M_{Δ} و عملها W_d يلتف حول الأسطوانة حبل يستعمل في رفع جسم (S) ثقله 2000 N بسرعة ثابتة ، نصف قطر اسطوانة الملفاف $R = 30 \text{ cm}$.

- 1- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة (ملفاف + جذع) أثناء رفع الحمولة .
- 2- أحسب عزم المزدوجة المحركة .
- 3- أحسب عمل المزدوجة المحركة عندما يدور الملفاف $2,5$ دورة .
- 4- ما هو الارتفاع الذي يصعده الجسم (S) من أجل $2,5$ دورة . أحسب عمل ثقل الجسم (S) أثناء هذا الانتقال .
- 5- ما هي استطاعة المحرك إذا كانت السرعة الزاوية لدوران إذا كان الملفاف يدور بمعدل 1 دورة في الدقيقة .

الأجوبة :1- مخطط الحصيلة الطاقوية :

- الجملة المدروسة : (ملفاف + جذع)
- مربع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غايبي
- القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{T}_1$ ، $\vec{T}_2$ ، $\vec{P}$



2- محزم المزدوجة الحركة :

حركة العملة دورانية منتظمة لذا يكون :

$$\sum \mathcal{C}_{i/D} = 0$$

$$\mathcal{C}_{i/D} + \mathcal{C}(\vec{T}_1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{i/D} - T_1 r = 0 \quad \text{--- (1)}$$

حركة الجسم (S) مستقيم منتظمة لذا يكون :

$$T_2 = P$$

وكون أن $T_2 = T_1$ نكتب :

$$T_1 = P \quad \text{--- (2)}$$

بتعويض (2) في (1) :

$$\mathcal{C}_{i/D} - Pr = 0 \rightarrow \mathcal{C}_{i/D} = P \cdot r$$

$$\mathcal{C}_{i/D} = 2000 \times 0,3 = 600 \text{ N.m.}$$

3- حمل المزدوجة :

تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على العملة (مفلف + جوع) بين لحظتين t_1 و t_2 وبلا اعتماد على مخطط التصلية الطاقوية :

$$W_d - |W(\vec{T}_1)| = 0$$

$$W_d - |\mathcal{C}(\vec{T}_1) \cdot \theta| = 0$$

$$W_d - |-T_1 \cdot d \cdot \theta| = 0$$

$$W_d - T_1 \cdot d \cdot \theta = 0$$

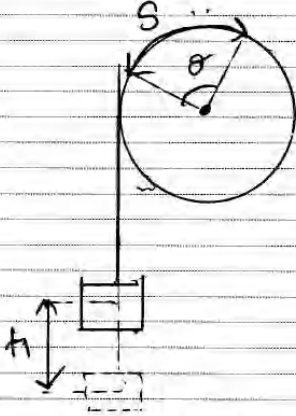
$$W_d = T_1 \cdot d \cdot \theta$$

لدينا سابقا : $T_1 = P$ ومنه :

$$W_d = P \cdot d \cdot \theta$$

$$W_d = 2000 \times 0,3 \times 2,5 \times 2\pi = 9,42 \cdot 10^3 \text{ J}$$

4 - الارتفاع الذي يصعد به الجسم :



عندما يدور الملفاف زاوية θ تقطع نقطة من محيط الأسطوانة مسافة خطية قدرها $s = R\theta$ وهي نفس الارتفاع الذي يصعد به الجسم :

$$h = s = R\theta$$

$$h = 0.3 \times 2.5\pi = 4.71 \text{ m.}$$

- عمل ثقل الحمولة :

$$W(\vec{P}) = -Ph = -2000 \times 4.71 = -9.42 \cdot 10^3 \text{ J}$$

5- استطاعة المحرك :

$$P = \frac{\text{عمل مردوجة المحرك}}{\Delta t}$$

$$P = \frac{C_{B/D} \times \theta}{\Delta t} = C_{B/D} \cdot \frac{\theta}{\Delta t} \rightarrow P = C_{B/D} \omega$$

$$P = 600 \times \frac{2\pi}{1} = 3769 \text{ W}$$

التمرين (11) : (التمرين : 022 في بنك التمارين على الموقع) (**) :

تتشكل الجملة المبينة في الشكل المقابل من أسطوانة (C) متجانسة كتلتها $M = 50 \text{ kg}$ و نصف قطرها $R = 20 \text{ cm}$ و هي قابلة للدوران حول محور أفقي (Δ) يمر من مركزها (O) تلتحم مع الأسطوانة ساق OA كتلتها مهملة و طولها $L = 60 \text{ cm}$ و قد ثبتت عند طرفها A جسم (S) نعتبره نقطي كتلته $m = 5 \text{ kg}$.

توجد الساق في وضع شاقولي و من فوق محور الدوران (Δ) ، تترك الجملة (الساق + الأسطوانة) لحالها بدون سرعة ابتدائية .

1- بإهمال الاحتكاكات ، أحسب السرعة الخطية الأعظمية التي تبلغها الحمولة .

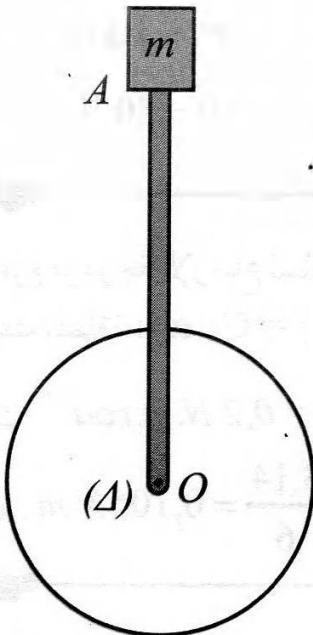
2- في الحقيقة ، السرعة الأعظمية للحمولة هي 3 m/s .

أ- أحسب عمل قوى الاحتكاك .

ب- إذا افترضنا أن عزم القوى ثابت ، أحسب قيمته .

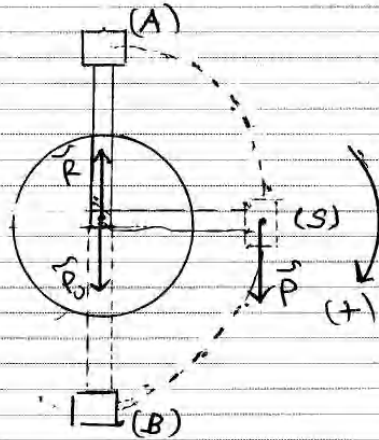
يعطى :

$$\text{عزم عطالة الأسطوانة بالنسبة لمحورها : } J_{/\Delta} = \frac{1}{2}MR^2 , g = 10 \text{ m/s}^2 .$$



الأجوبة :

1- السرعة الخطية الاعظمية التي يبدفها الجسم :



- يتبع الجسم النقطي (S) سرعته الاعظمية عند مروره بوضع التوازن
- أين تكون الساق شاقولية (الشغل)
- الحزمة المدروسة (اسطوانة + جسم)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي يعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{P}$ ، $\vec{P}_0$ ، $\vec{R}$
- تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضعتين (A) و (B)

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{\text{CA}} + W(\vec{P}) = E_{\text{CB}}$$

$$mgh = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

$$2mgh = J_{\Delta} \omega^2$$

من الشكل : $h = 2L$ ومنه

$$2mg(2L) = J_{\Delta} \omega^2$$

$$4mgL = J_{\Delta} \omega^2$$

- الجسم النقطي (S) والاسطوانة لهما نفس السرعة الزاوية لذا نغير عن سرعة الجسم النقطي الخطية كما يلي :

$$v = L\omega \rightarrow \omega = \frac{v}{L}$$

ولدينا ايضا :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta}(C) + J_{\Delta}(S)$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2 + mL^2$$

يصبح لدينا :

$$4mgL = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mL^2 \right) \frac{v^2}{L^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgL^3}{\frac{1}{2}MR^2 + mL^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4 \times 5 \times 10 (0,6)^3}{\frac{1}{2} \cdot 50 (0,2)^2 + 5 (0,6)^2}} = 3,93 \text{ m/s}$$

2-4- عمل قوى الاحتكاك :

- تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (اسطوانة + جسم)
بين الوضعين (A) و (B) و بنفس الطريقة السابقة مع
أخذ قوى الاحتكاك بعين الاعتبار

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدّمة}} = E_B$$

$$E_{CA}^0 + W(\vec{P}) - |W_{A-B}(\vec{f})| = E_{CB}$$

$$mgh - |W_{A-B}(\vec{f})| = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$mg(2L) - |W_{A-B}(\vec{f})| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 + mL^2 \right) \frac{v^2}{L^2}$$

$$|W_{A-B}(\vec{f})| = 2mgL - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 + mL^2 \right) \frac{v^2}{L^2}$$

$$|W_{A-B}(\vec{f})| = 2 \times 5 \times 10 (0,6) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 50 (0,2)^2 + 5 (0,6)^2 \right) \frac{3^2}{(0,6)^2}$$

$$|W_{A-B}(\vec{f})| = 25 \text{ J}$$

وكون أن قوى الاحتكاك معيقة يكون : $W_{A-B}(\vec{f}) < 0$ ومنه

$$W_{A-B}(\vec{f}) = -25 \text{ J}$$

4-5- عزم قوى الاحتكاك :

$$W_{A-B}(\vec{f}) = \int_{\theta} \vec{C}_D(\vec{F}) d\theta \rightarrow \vec{C}_D(\vec{F}) = \frac{W(\vec{f})}{\theta}$$

أثناء انتقال الجملة (قرص + جسم) من الوضع A إلى
الوضع B تكون قد مسحت زاوية قدرها $\theta = \pi$
اذن :

$$\vec{C}_D(\vec{f}) = \frac{-25}{\pi} = -7,96 \text{ N.m}$$

التمرين (12): (التمرين : 017 في بنك التمارين على الموقع) ()**

يتشكل ملفاف من أسطوانتين (C_1) ، (C_2) لهما نفس محور الدوران (Δ) ،
نصفي قطريهما على التوالي :

$$R_2 = 10 \text{ cm} , R_1 = 20 \text{ cm}$$

يلتف حول الأسطوانتين خيطان كما مبين في الشكل التالي :

يستعمل هذا الملفاف في رفع حمولة كتلتها $m = 40 \text{ kg}$ ، نفترض أن رفع الحمولة يتم بسرعة ثابتة .

1- أحسب شدة القوة $\vec{F}$ التي يجب تطبيقها على طرف الخيط لرفع الحمولة .

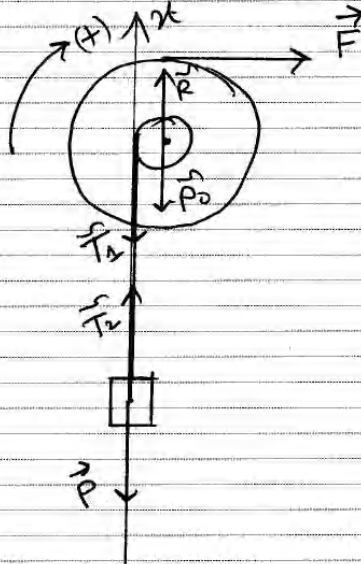
2- حدد زاوية دوران الملفاف عندما ترتفع الحمولة ارتفاعا قدره 10 m ثم

أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عندئذ .

يعطى : $g = 10 \text{ m/s}^2$

الأجوبة :

1- شدة القوة $\vec{F}$ التي يجب تطبيقها على طرف الخيط



رفع الحمولة تم بسرعة ثابتة لذا يكون :

$$\sum \mathcal{M}_O(\vec{F}) = 0$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) + \mathcal{M}_O(\vec{T}_2) = 0$$

$$F R_1 + T_2 R_2 = 0 \text{ ---- (1)}$$

و بالنسبة للحمولة يكون :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

بالاستقار على المحور ox الحوجه نحو الأعلى (في جهة الدوران)

$$-P + T_2 = 0$$

$$-mg + T_2 = 0 \quad (2)$$

من (2) : $T_2 = mg$ وحيث أن $T_2 = T$ يكون :

$$T_1 = mg$$

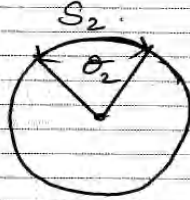
بالتعويض في (1) :

$$FR_1 - mgR_2 = 0$$

$$FR_1 = mgR_2 \longrightarrow F = \frac{mgR_2}{R_1}$$

$$F = \frac{40 \times 10 \times 0,1}{0,2} = 200 \text{ N}$$

في زاوية دوران الحلقاف :
عندما ترفع الحمولة ارتفاع قدره 10 m تكون نقطة
من محيط الاسطوانة (C_2) قطعت نفس المسافة الخطية (S_2)
أي :
ولدينا :



$$S_2 = 10 \text{ m}$$

$$S_2 = R_2 \theta \rightarrow \theta = \frac{S_2}{R_2}$$

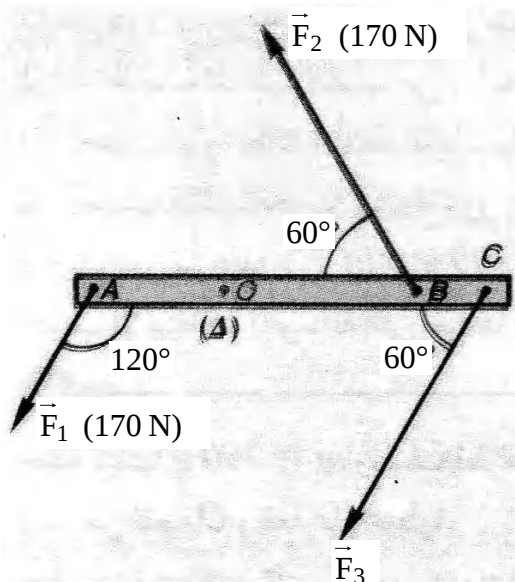
$$\theta = \frac{10}{0,1} = 100 \text{ rad}$$

وهي نفس زاوية دوران الحلقاف .

• عمل القوة $\vec{F}$:

$$W(\vec{F}) = M(\vec{F}) \cdot \theta = F \cdot R_1 \cdot \theta = 200 \cdot 0,2 \cdot 100 = 400 \text{ J}$$

التمرين (13) : (التمرين : 019 في بنك التمارين على الموقع) (**)



مسطرة مهملة الكتلة و قابلة للدوران حول محور أفقي (Δ) يمر من النقطة (O) .

نجعل هذه المسطرة في حالة توازن تحت تأثير ثلاث قوى واقعة في المستوي العمودي على المحور (Δ) .

يعطى : $OC = 40 \text{ cm}$ ، $OB = 30 \text{ cm}$ ، $OA = 20 \text{ cm}$.

1- أحسب عزم القوة $\vec{F}_3$.

2- عين مميزات قوة رد الفعل $\vec{R}$ للمحور (Δ) على المسطرة .

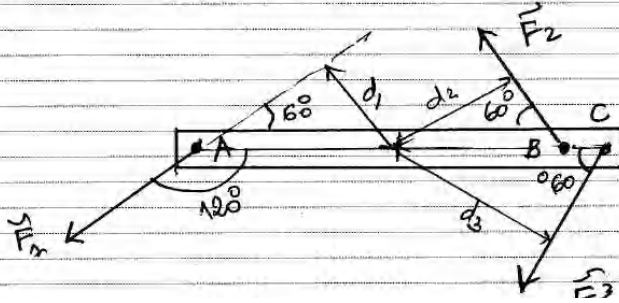
الأجوبة :

1- عزم القوة $\vec{F}_3$:
نشر ثوابن الحملة :

$$\sum \mathcal{M}_O = 0$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_3) = 0$$

نختار اتجاه عقارب الساعة اتجاهًا موجبًا للحركة الدورانية .



$$- F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + \mathcal{M}(\vec{F}_3) = 0$$

اعملنا على الشكل ..

$$- F_1 \cdot OA \cdot \sin 60^\circ - F_2 \cdot OB \cdot \sin 60^\circ + \mathcal{M}_O(\vec{F}_3) = 0$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_3) = F_1 \cdot OA \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot OB \cdot \sin 60^\circ$$

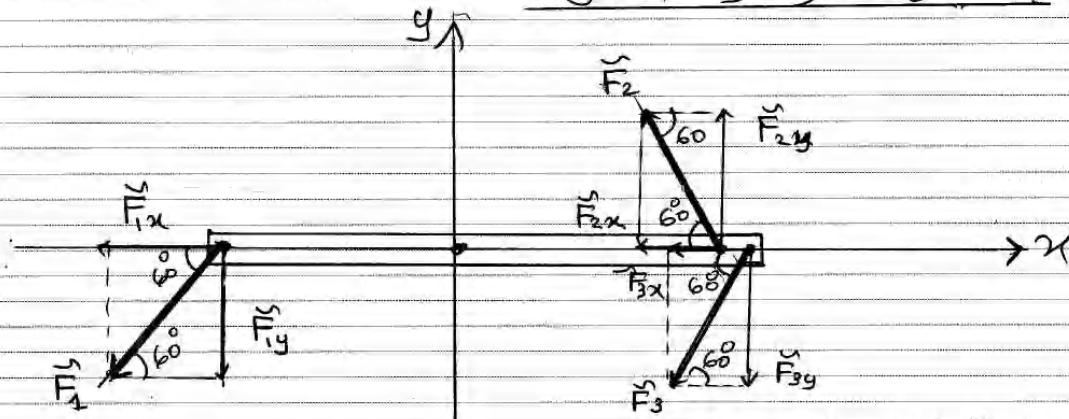
$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_3) = (170 \cdot 0,2 \cdot \sin 60^\circ) + (300 \cdot 0,3 \cdot \sin 60^\circ) = 107,39 \text{ N.m}$$

جسدة القوة $\vec{F}_3$:

$$\mathcal{M}(\vec{F}_3) = F_3 \cdot d_3 = F_3 \cdot OC \cdot \sin \alpha \rightarrow F_3 = \frac{\mathcal{M}(\vec{F}_3)}{OC \cdot \sin 60^\circ}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{107,39}{0,4 \cdot \sin 60^\circ} \approx 310 \text{ N}$$

2- مميزات قوة رد الفعل :



تشرط توازن الجملة :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R} = \vec{0}$$

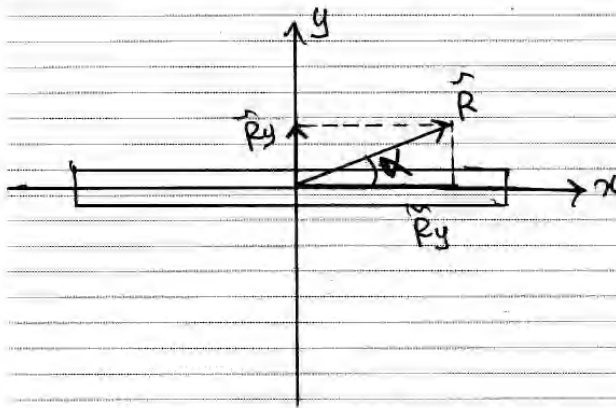
بالإسقاط على المحورين ox ، oy :

$$\begin{cases} -F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 60^\circ + R_x = 0 \\ -F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 60^\circ + R_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = +F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 60^\circ + F_3 \cos 60^\circ \\ R_y = -F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 60^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = (+F_1 + F_2 + F_3) \cos 60^\circ \\ R_y = (-F_1 - F_2 + F_3) \sin 60^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = (+170 + 300 + 310) \cos 60 = 390 \text{ N} \\ R_y = (-170 - 300 + 310) \sin 60 = 150,88 \text{ N} \end{cases}$$



اذن صمّمات قوّة رد الفعل هي
- نقطة التأثير: مركز الدوران
- المنحنى: يصنع الزاوية α مع
المحور ox حيث :

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{150,88}{390} = 0,39 \rightarrow \alpha = 21^\circ$$

المسافة

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(390)^2 + (150,88)^2} = 418,16 \text{ N}$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **

ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم

الخروب - قسنطينة

Fares_Fergani@yahoo.Fr

نرجو إبلاغنا عن طريق البريد الإلكتروني بأي خلل في الدروس أو التمارين و حلولها .
وشكرا مسبقا

لتحميل نسخة من هذا الملف و للمزيد . أدخل موقع الأستاذ :

www.sites.google.com/site/faresfergani