

تمارين المتاليات العددية في البكالوريا

الشعبة: تسيير وإقتصاد

التعريف [1]

[باك 2008] [م 1] [ن 4]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: ($\alpha \in \mathbb{R}$) $u_0 = \alpha$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9}$.

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) في كل مايلي: $\alpha = 2$ ، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كمايلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

أحسب u_1 و u_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ج- أكتب عبارة u_n بدلالة n . وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التعريف [2]

[باك 2008] [م 2] [ن 5]

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

ب- جد إجهاد تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

ب- عبر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د- أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التعريف [3]

[باك 2009] [م 1] [ن 4]

(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $3u_{n+1} = u_n + 4$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n \leq 2$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج- استنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب- أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التعريف [4]

[باك 2009] [م 2] [ن 4]

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = u_n - 1$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(4) عَيِّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = n - 79$.

[باك 2010][م1] [ن 4]

التعريف [5]

- (1) n عدد طبيعي ، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^n$
(S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1 ، و e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).
- (2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 2n + 4 + e^n$.
بيِّن أن : $w_n = u_n + v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.
- (3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
$$4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$$
- (4) إستنتج المجموع S'_n بدلالة n حيث : $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

[باك 2010][م2] [ن 6]

التعريف [6]

- (1) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$ ،
أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .
- (2) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 2$.
بـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
جـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$.
أـ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .
بـ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
جـ ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟
- (4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$

[باك 2011][م2] [ن 5,5]

التعريف [7]

- (1) لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$ ،
أحسب u_1 و u_2 .
- (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$.
- (3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .
- (4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.
أـ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .
بـ أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .
جـ أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

[باك 2012][م1] [ن 5]

التعريف [8]

- (1) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$ ،
أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.
بـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$.

ج- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

[باك 2012][م 2] [ن 5]

التعريف [9]

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والإحتياط . يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا .

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد) .

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة 2008 + n .

(1) أ- أحسب كلا من u_0, u_1, u_2 .

ب- هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برر إجابتك .

ج- بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$.

(3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

[باك 2013][م 1] [ن 5]

التعريف [10]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3} \right) u_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي .

(1) عين قيمة a من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثم أحسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية .

(3) عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها .

(4) نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بين أن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} (3^{n+1} + 4n + 3)$$

[باك 2013][م 2] [ن 4]

التعريف [11]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 6$.

(1) أ- أحسب الحدود : u_1, u_2, u_3, u_4 .

ب- هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برر إجابتك .

(2) أ- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2} (u_n - 4)$.

ب- استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 4$ هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ج- أكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

د- بين أن (u_n) متقاربة .

(3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانيا من نتيجة السؤال (1) ب- .

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$

بـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً .

جـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 18$

أـ بين أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

بـ أحسب الأساس q ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

جـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنوياً وبالمقابل يُوظف 3000 عامل سنوياً .
علماً أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000 .

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$

بـ بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 60 - u_n$.

أـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

بـ أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ قدر عدد العمال سنة 2017 .

دـ حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ أحسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0 = 18$ والعلاقة: $v_0 + v_1 + v_2 = 38$.

(1) بين أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

(2) أـ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

جـ أحسب نهاية (v_n) .

(3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

أـ أحسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

بـ جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

بـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً .

جـ ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n) ؟

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية معيننا أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.

ج- أحسب نهاية (u_n) .

التعريف [16]

[باك 2017] [م1] [ن4]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 3$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 - u_n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ، ثم عين حدها الأول.

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

التعريف [17]

[باك 2017] [م2] [ن4]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

(1) أحسب u_1, u_2, u_3 ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عين v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

أ- أحسب S_n بدلالة n .

ب- بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التعريف [18]

[باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م1] [ن4]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 2$.

ب- عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2u_n - 4$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التعريف [19]

[باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2] [ن5]

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

(2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.

بين (u_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0 .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$.

(4) إستنتج المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

[باك 2018][م1] [4 ن]

التعريف [20]

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي :

$$u_0 = 50 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 0,7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

(1) برهن أن (v_n) هندسية أساسها 0,7 يطلب تعيين حدها الأول v_0 ، وكتابة عبارة v_n بدلالة n .

(2) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

بـ عيّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المئة هي الوحدة ، ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

(1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

(2) أـ برر العبارة : $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$.

بـ ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

[باك 2018][م2] [4 ن]

التعريف [21]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_{n+1} = u_n + 6$.

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 6$.

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أـ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

بـ أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n ما يلي : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

[باك 2019][م1] [4 ن]

التعريف [22]

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

(1) أـ أحسب كلا من u_1 و u_2 .

بـ برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n - \alpha$

أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$ ،

بـ عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

جـ نضع $\alpha = 8$ ، عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

(4) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

[باك 2019][م2] [4 ن]

التعريف [23]

$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ :}$$

(1) حساب حدها الأول u_0 وأساسها r .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) بين أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344} \quad \text{و} \quad S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$$

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = e^{6-2u_n}$

أحسب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$.

