

2 B 0 A 2 C 0

المجامية و الجداءات

في المتتاليات العددية

للسنة 3 ثانوي

الشعب :

✓ رياضي.

✓ تقني رياضي.

✓ علوم تجريبية.

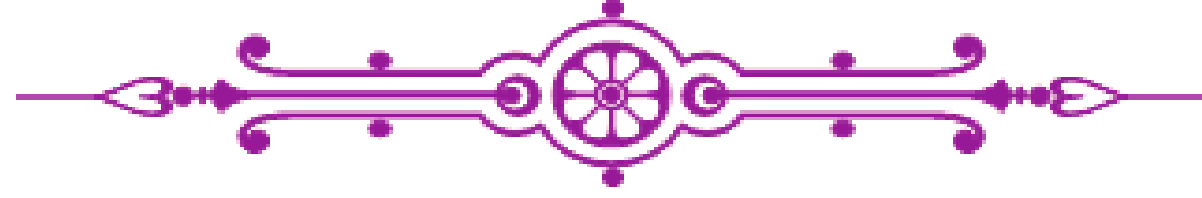
أفكار المجامية و الجداءات الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2019

من إعداد الأستاذ: لعور عبد الكريم

جوان 2020



k



بتوفيق من المولى عز وجل تم إتمام هذا العمل المتواضع والمتمثل في طرق
وكيفية حساب المجاميع والجداءات في محور المتتاليات العددية للسنة الثالثة ثانوي
الشعب العلمية، هذا العمل مقسم إلى جزئين :
الجزء الأول: هو عبارة عن تعاريف ونتائج مهمة يجب الإطلاع عليها كلها،
مع البرهان والأمثلة التوضيحية لذلك.

الجزء الثاني: يتمثل في الإلمام التام والكلي لجميع الأفكار المتداولة لحساب المجاميع
والجداءات في البكالوريات السابقة من 2008 إلى 2019 .

* نسأل الله عز وجل أن يكون هذا العمل صدقة جارية على والدي الكريمين وعائلتي
و على كل من شاهد أو تفاعل معه.
وأخيرا ، أشكر جزيل الشكر الأساتذة الآتية أسمائهم:

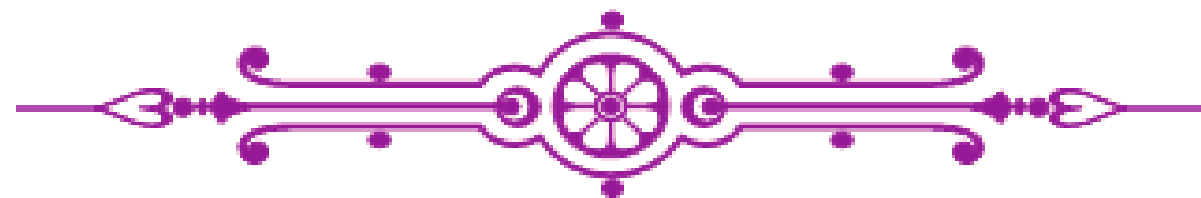
أ. شعبان أسامة

أ. بنخاشة خالد

أ. بلقاسم عبد الرزاق



على دعمهم وتحفيزهم لي، وأن تكون أعمالهم في ميزان حسناتهم.



مكتسبات لا بد منها:

أ- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_p .

نعتبر المجموع S_n بحيث: $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$

$$S_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

مجموع متتالية حسابية هو: (عدد الحدود $\div 2$) $\times$ (الحد الأول + الحد الأخير).

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

*مجموع متتالية حسابية صغيرة أساسها $r = 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n+1}{2}(n) = \frac{n}{2}(n+1)$

ب- مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_p .

نعتبر المجموع S_n بحيث: $S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$

مع: $q \neq 1$

$$S_n = v_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$$

ج- نتائج مهمة:

النتيجة 01:

نعتبر $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_p مع $q > 0$ و $v_p > 0$
فان: $(v_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ مع $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ متتالية هندسية أساسها q^α وحدها الأول v_p^α مع $p \in \mathbb{N}$

البرهان: نضع: $X_n = v_n^\alpha$ تكون (X_n) هندسية إذا كان: $X_{n+1} = \lambda X_n$

حيث: λ هو أساس المتتالية (X_n)

لدينا: $X_{n+1} = v_{n+1}^\alpha$ وبما أن (v_n) هندسية معناه: $v_{n+1} = q \cdot v_n$

فان: $X_{n+1} = (q \cdot v_n)^\alpha$ تكافئ: $X_{n+1} = q^\alpha \cdot v_n^\alpha$ مع: $X_n = v_n^\alpha$

تكافئ: $X_{n+1} = q^\alpha \cdot X_n$ ومنه: (v_n^α) متتالية هندسية أساسها q^α

ملاحظة مثال:

لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1 \left(\frac{1 - 2^{n-0+1}}{1 - 2} \right)$$

$$S_2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = (1)^2 \left(\frac{1 - (2^2)^{n-0+1}}{1 - (2)^2} \right)$$

$$S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} = \left(\frac{1}{1} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-0+1}}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)} \right)$$

الحل النموذجي لـ S_2 : لدينا: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0 \cdot q^n$

طبيعة المتتالية: (v_n^2) لدينا: $v_n^2 = (v_0 \cdot q^n)^2$ تكافئ: $v_n^2 = v_0^2 \cdot (q^2)^n$ تكافئ: $v_n^2 = v_0^2 \cdot (q^2)^n$

ومنه: (v_n^2) متتالية هندسية أساسها $q^2 = 2^2$ وحدها الأول $v_0^2 = 1^2$

$$S_2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = (1)^2 \left(\frac{1 - (2^2)^{n-0+1}}{1 - (2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1 - (4)^{n-0+1}}{1 - 4} \right) = \left(\frac{1 - (4)^{n+1}}{-3} \right)$$

$$S_2 = - \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{3} \right)$$

أمثلة إضافية للفهم الجيد: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$

$$S_4 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n} = \sqrt{v_0} \left(\frac{1 - (\sqrt{q})^{n-0+1}}{1 - \sqrt{q}} \right)$$

$$S_5 = \frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} = \left(\frac{1}{v_0^2} \right)^2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q^2} \right)^{n-0+1}}{1 - \left(\frac{1}{q^2} \right)} \right)$$

$$S_6 = \sqrt[3]{v_0} + \sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2} + \dots + \sqrt[3]{v_n} = \sqrt[3]{v_0} \left(\frac{1 - (\sqrt[3]{q})^{n-0+1}}{1 - \sqrt[3]{q}} \right)$$

الأمثلة الإضافية لـ S_5 : لدينا $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناها: $v_n = v_0 \cdot q^n$

طبيعة المتتالية: $\left(\frac{1}{v_n^2} \right)$ لدينا: $\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{(v_0 \cdot q^n)^2}$ تكافئ: $\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{v_0^2 \cdot q^{2n}}$ تكافئ: $\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{v_0^2} \left(\frac{1}{q^2} \right)^n$

ومنه: $\left(\frac{1}{v_n^2} \right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{v_0^2} = 1$

$$S_5 = \frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} = \left(\frac{1}{v_0^2} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q^2} \right)^{n-0+1}}{1 - \left(\frac{1}{q^2} \right)} \right)$$

$$= 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{(2)^2} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{(2)^2} \right)} \right) = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4} \right)} \right) = \left(\frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} \right)$$

$$S_5 = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right)$$

ملاحظة: بنفس الطريقة نجيب على باقي المجاميع .

نظية 02:

متاليتين هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب وحدهما الأول v_p و w_p مع:
 $(w_n \neq 0)$ و $q_1 \neq q_2$ فان: $\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$ ، $q_2 \neq 0$ وحدها الأول $\frac{v_p}{w_p}$ ، $p \in \mathbb{N}$

البرهان: نضع: $T_n = \frac{v_n}{w_n}$ تكون (T_n) هندسية إذا كان: $T_{n+1} = \beta \cdot T_n$

حيث: β هو أساس المتتالية (T_n)

لدينا: $T_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$ وبما أن (v_n) و (w_n) هندسيتين معناه: $v_{n+1} = q_1 \cdot v_n$ و $w_{n+1} = q_2 \cdot w_n$

فان: $T_{n+1} = \frac{q_1 \cdot v_n}{q_2 \cdot w_n}$ تكافئ: $T_{n+1} = \frac{q_1}{q_2} \left(\frac{v_n}{w_n}\right)$ مع: $T_n = \frac{v_n}{w_n}$

تكافئ: $T_{n+1} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right) \cdot T_n$ ومنه: $\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$

ملاحظة مهمة جداً: إذا كان $q_1 = q_2$ تصبح (T_n) متتالية ثابتة لأن: $T_{n+1} = T_n$

مجموع متتالية ثابتة هو: (الحد الأول) $\times$ (عدد الحدود).

مثال: لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$S = 1 + \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{16} + \frac{v_3}{64} + \dots + \frac{v_n}{4^n}$$

الحل: النموذج 1 S : لدينا: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0 \cdot q^n$

و: 4^n متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول هو: $4^0 = 1$

طبيعة المتتالية: $\left(\frac{v_n}{4^n}\right)$ لدينا: $\frac{v_n}{4^n} = \frac{v_0 \cdot q^n}{1.4^n}$ تكافئ: $\frac{v_n}{4^n} = \frac{v_0}{1} \left(\frac{q}{4}\right)^n$ تكافئ: $\frac{v_n}{4^n} = \frac{v_0}{1} \left(\frac{q}{4}\right)^n$

ومنه: $\left(\frac{v_n}{4^n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{v_0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$$S = 1 + \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{16} + \frac{v_3}{64} + \dots + \frac{v_n}{4^n}$$

$$S = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{4}\right)} \right) = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$S = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \left(2 - \frac{2}{2^{n+1}} \right) = \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \text{ تكافئ:}$$

نظيرة 03:

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتين هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب وحدهما الأول v_p و w_p مع

$q_1 \times q_2 \neq 1$ فان: $(v_n \times w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q_1 \times q_2$ وحدها الأول $v_p \times w_p$ مع $p \in \mathbb{N}$

البرهان: نضع: $Y_n = v_n \cdot w_n$ تكون (Y_n) هندسية إذا كان: $Y_{n+1} = \gamma \cdot Y_n$

حيث: γ هو أساس المتتالية (Y_n)

لدينا: $Y_{n+1} = v_{n+1} \cdot w_{n+1}$ وبما أن (v_n) و (w_n) هندسيتين معناه: $v_{n+1} = q_1 \cdot v_n$ و $w_{n+1} = q_2 \cdot w_n$

فان: $Y_{n+1} = (q_1 \cdot v_n)(q_2 \cdot w_n)$ تكافئ: $Y_{n+1} = (q_1 \cdot q_2)(v_n \cdot w_n)$ مع $Y_n = v_n \cdot w_n$

تكافئ: $Y_{n+1} = (q_1 \cdot q_2) \cdot Y_n$ ومنه: $(v_n \cdot w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q_1 \cdot q_2$

ملاحظة مهمة جداً: أيضاً كان $q_1 \cdot q_2 = 1$ تصبح (Y_n) متتالية ثابتة لأن: $Y_{n+1} = Y_n$

مجموع متتالية ثابتة هو: (الحد الأول) $\times$ (عدد الحدود).

طريقة مثال : لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$S' = v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \dots + 4^n v_n$$

الحل النموذجي : لدينا : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه : $v_n = v_0 \cdot q^n$

و : 4^n متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول هو : $4^0 = 1$

طبيعة المتتالية : $(4^n v_n)$ لدينا : $4^n v_n = (1 \cdot 4^n)(v_0 \cdot q^n)$ تكافئ : $4^n v_n = (1 \cdot v_0)(4 \cdot q)^n$

تكافئ : $4^n v_n = (1 \cdot v_0)(4 \cdot q)^n$

ومنه : $(4^n v_n)$ متتالية هندسية أساسها $4 \cdot q = 4(2) = 8$ وحدها الأول $1 \cdot v_0 = 1(1) = 1$

$$S' = v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \dots + 4^n v_n$$

$$S' = 1 \left(\frac{1 - (8)^{n+1}}{1 - 8} \right)$$

$$S' = \left(\frac{1 - 8^{n+1}}{-7} \right) \text{ تكافئ :}$$

طريقة مثال حول المتتالية الثابتة

لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$\mathfrak{S} = v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \dots + \frac{1}{2^n}v_n$$

الحل النموذجي : لدينا : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه : $v_n = v_0 \cdot q^n$

و : $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول هو : $\frac{1}{2^0} = 1$

طبيعة المتتالية : $\left(\frac{1}{2^n}v_n\right)$ لدينا : $\frac{1}{2^n}v_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)(v_0 \cdot q^n)$ تكافئ : $\frac{1}{2^n}v_n = \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot v_0 (2)^n$

تكافئ : $\frac{1}{2^n}v_n = v_0 \left(\frac{2^n}{2^n}\right) = v_0$ ومنه : $\left(\frac{1}{2^n}v_n\right)$ متتالية ثابتة.

$$\mathfrak{S} = v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \dots + \frac{1}{2^n}v_n$$

$$\mathfrak{S} = v_0 (n - 0 + 1) = 1 (n + 1)$$

تكافئ: $\mathfrak{S} = n + 1$

الانتقال من متتالية حسابية إلى متتالية هندسية:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_p .
فان: $(e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = e^r$ وحدها الأول e^{u_p} مع $p \in \mathbb{N}$

البرهان:

نضع: $X_n = e^{u_n}$ معناه: $X_{n+1} = e^{u_{n+1}}$

وبما أن: (u_n) حسابية فان: $u_{n+1} = u_n + r$

أي: $X_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + r} = e^r \cdot e^{u_n} = e^r \cdot X_n$ تكافئ: $X_{n+1} = e^r \cdot X_n$

ومنه: $(e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = e^r$ وحدها الأول e^{u_p}

مثال: لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها 3 وحدها الأول $u_0 = 2$.

$$\Gamma = e^2 + e^5 + \dots + e^{u_n}$$

الحل: Γ لدينا: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية معناه: $u_n = u_0 + nr$

طبيعة المتتالية: $(e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ لدينا: $e^{u_n} = e^{u_0 + nr} = e^{u_0} \cdot e^{nr}$ تكافئ: $e^{u_n} = e^{u_0} \cdot (e^r)^n$

ومنه: $(e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = e^r$ وحدها الأول e^2

$$\Gamma = e^2 + e^5 + \dots + e^{u_n}$$

$$\Gamma = e^2 \left(\frac{1 - (e^3)^{n+1}}{1 - e^3} \right)$$

الانتقال من متتالية هندسية إلى متتالية حسابية:

متتالية هندسية **موجبة تماما** أساسها q وحدها الأول v_p .
فان: متتالية حسابية أساسها $r = \ln(q)$ وحدها الأول $\ln(v_p)$ مع $p \in \mathbb{N}$

البرهان:

نضع: $T_n = \ln(v_n)$ معناه: $T_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

وبما أن: (v_n) هندسية فان: $v_{n+1} = q \cdot v_n$

أي: $T_{n+1} = \ln(q \cdot v_n)$ باستعمال خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري نجد: $T_{n+1} = \ln(q) + \ln(v_n)$

تكافئ: $T_{n+1} = \ln(q) + T_n$

ومنه: $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r = \ln(q)$ وحدها الأول $\ln(v_p)$

مثال: لتكن $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول $t_0 = 2$

$$\Sigma = \ln(2) + \dots + \ln(t_n)$$

الحل: النموذج 1 Σ : لدينا: $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $t_n = t_0 \cdot q^n = 2 \cdot 3^n$

طبيعة المتتالية: $(\ln(t_n))$ لدينا: $\ln(t_n) = \ln(t_0 \cdot q^n)$ تكافئ: $\ln(t_n) = \ln(t_0) + \ln(q^n)$

تكافئ: $\ln(t_n) = \ln(t_0) + n \ln(q)$

ومنه: $(\ln(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r = \ln(q) = \ln(3)$ وحدها الأول $\ln(2)$

$$\Sigma = \ln(2) + \dots + \ln(t_n)$$

$$\Sigma = \frac{n-0+1}{2} [\ln(2) + \ln(t_n)] = \frac{n+1}{2} [\ln(2 \cdot t_n)]$$

(خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري)

$$= \frac{n+1}{2} [\ln(2 \cdot 2 \cdot 3^n)] = \frac{n+1}{2} [\ln(4 \cdot 3^n)] = \left[\ln(4 \cdot 3^n) \right]^{\frac{n+1}{2}}$$

ملاحظة مهمة: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية موجبة تماما أساسها q و حدها الأول v_p .

علما أن: $\log(v_n)$ هي الدالة اللوغاريتم العشري: $\log(v_n) = \frac{\ln(v_n)}{\ln(10)}$

$$\Theta = \log(v_0) + \log(v_1) + \dots + \log(v_n)$$

$$\Theta = \frac{\ln(v_0)}{\ln(10)} + \frac{\ln(v_1)}{\ln(10)} + \dots + \frac{\ln(v_n)}{\ln(10)}$$

$$\Theta = \frac{1}{\ln(10)} [\ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)] \quad \text{حساب المجموع:}$$

$$\Theta = \frac{1}{\ln(10)} \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) (\ln(v_0) + \ln(v_n)) \right]$$

يمكن تعميمها على اللوغاريتم ذي الأساس a مع $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ معناه: $\log_a(v_n) = \frac{\ln(v_n)}{\ln a}$

خارج المقرر الدراسي لمادة الرياضيات مجرد ملاحظة تستعمل في مادتي الفيزياء والكيمياء.



$$S = \frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ تكافئ: } S = 2 \left(\frac{16}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

وبجمع حساب S' : $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

ملاحظة مهمة: إننا نأخذ المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية نستخدم العلاقة من المعطيات ونأخذها بدلالة المتتالية المعروفة وهي المتتالية الهندسية (v_n) في هذا التمرين.

$$\text{لدينا من المعطيات: } v_n = u_n - \frac{2}{3} \text{ تكافئ: } u_n = v_n + \frac{2}{3}$$

أحسن طريقة لحساب المجموع في هذه الحالات وهو الحساب بصورة عمودية كما هو موضح:

$$\begin{cases} u_0 = v_0 + \frac{2}{3} \\ u_1 = v_1 + \frac{2}{3} \\ u_2 = v_2 + \frac{2}{3} \\ \vdots \\ u_n = v_n + \frac{2}{3} \end{cases}$$

بجمع طرف
لطرف نجد:

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \frac{2}{3}(n-0+1)$$

معناه:

$$S' = S + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$$

$$\text{ومنه: } S' = -\frac{32}{3 \cdot 2^{n+1}} + \frac{2}{3}n + \frac{34}{3}$$

التمرين الثاني:

ليكن n عدد طبيعي:

أهم شيء في كل
المجاميع:

* أحسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = -\frac{1}{2} \left[1 + e^{\ln 3} + e^{2 \ln 3} + e^{3 \ln 3} + \dots + e^{n \ln 3} \right]$$

ملاحظة مهمة: في وجود الصائتين الأسية واللوغاريتم التبرير أول شيء، نقوم بنوطة الخواص إن أمكن.

مجاميع ألبت الأوربات 2008 إلى 2019

أفكار وتقنيات الواردة في البكالوريات * كل تمرين بفكرة *

التمرين الأول:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$

$$\text{بجدها الأول } u_0 = 6 \text{ بالعلاقة التراجعية: } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\text{كما يلي: } v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

معطيات التمرين: لدينا:

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{16}{3}$$

$$\text{* حدها العام هو: } v_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{* عبارة } u_n \text{ بدلالة } n \text{ لدينا من المعطيات: } v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

$$\text{تكافئ: } u_n = v_n + \frac{2}{3} \text{ ومنه: } u_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

* أحسب بدلالة n المجاميع الآتية:

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

حل التمرين الأول:

$$\text{بجمع حساب } S: S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية مجموعها: } S = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$\text{تكافئ: } S = \left(\frac{16}{3}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{16}{3}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2}} \right)$$

حل التمرين الثاني:

باستعمال خاصية اللوغاريتم النيبيري:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد

صحيح نسبي n ، $\ln(a^n) = n \ln a$

نضع: $X_n = e^{n \ln 3}$ تكافئ: $X_n = e^{\ln 3^n}$ تكافئ: $X_n = 3^n$

لدينا: $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2 \ln 3} + e^{3 \ln 3} + \dots + e^{n \ln 3}]$

يكافئ: $S_n = -\frac{1}{2} [3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n]$

إيجاد طبيعة المتتالية: $X_n = 3^n$

لدينا: $X_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3 \cdot X_n$ يكافئ: $X_{n+1} = 3 \cdot X_n$

معناه: $X_n = 3^n$ هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $3^0 = 1$

ومنه: $S_n = -\frac{1}{2} \left[3^0 \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \right]$

ومنه: $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$

بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$v_n = \ln(u_n - 3)$

معطيات التمرين: لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

* حدها العام هو: $v_n = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

* أحسب بدلالة n :

$P = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times (u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

حل التمرين الثالث:

نقوم بالبحث عن $(u_n - 3)$ انطلاقا من: $v_n = \ln(u_n - 3)$

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 3)$ معناه: $e^{v_n} = u_n - 3$

ومنه: $u_n - 3 = e^{v_n}$

بضرب طرف
لطرف نجد:

$$\begin{cases} u_0 - 3 = e^{v_0} \\ u_1 - 3 = e^{v_1} \\ u_2 - 3 = e^{v_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n - 3 = e^{v_n} \end{cases}$$

$$P = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$$

بتوظيف خواص الدالة الأسية نجد:

$$P = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n}$$

نضع: S هو المجموع الحدود المتتابعة للمتتالية (v_n) :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

تكافئ: $P = e^S$

$$S = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) \text{ متتالية هندسية مجموعها: } (v_n)$$

$$S = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) \text{ تكافئ:}$$

$$S = 2 \ln\left(\frac{1}{4}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \text{ تكافئ:}$$

$$P = e^{2 \ln\left(\frac{1}{4}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} \text{ تكافئ:}$$

ملاحظة مهمة: تبسيط الحساب مهم أيضا لأن مجموع آخر له

له علاقة بالمجموع المحسوب، مذكور في ذلك بفتح الوصول إلى

هذه العبارة لأن الهدف هو حساب النهاية لهذا المجموع،

مهما كان التبسيط، النهاية تبقى صالحة لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الرابع:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

معطيات التمرين : لدينا:

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = \sqrt{e}$

* حدها العام هو: $u_n = \sqrt{e} \left(\frac{1}{e}\right)^n$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

* حدها العام هو: $v_n = \frac{1}{2} - n$

* أحسب بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

حل التمرين الرابع:

1. حساب S_n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(u_n) متتالية هندسية مجموعها: $S_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

تكافئ: $S_n = \sqrt{e} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}} \right) = \sqrt{e} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{e^{n+1}}\right)}{\frac{e-1}{e}} \right)$

تكافئ: $S_n = \frac{e\sqrt{e}}{e-1} (1 - e^{-n-1})$

2. حساب P_n :

بتوظيف الخاصية الأساسية للدالة اللوغاريتم النيبيري نجد:

$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$
 $= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$

من المعطيات لدينا: $v_n = \ln(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

تكافئ: $P_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

مجموعها هو: $P_n = \frac{n-0+1}{2} (v_0 + v_n)$

المجموع: (عدد الحدود $\div 2$) $\times$ (الحد الأول + الحد الأخير)

$P_n = \frac{n+1}{2} (1-n)$ تكافئ: $P_n = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n \right)$

تكافئ: $P_n = \frac{-n^2 + 1}{2}$

التمرين الخامس:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = e^2 - 1$

وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = (1 + u_n) e^{-2} - 1$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = 3(1 + u_n)$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-2}$ و حدها الأول $v_0 = 3e^2$

* حدها العام هو: $v_n = v_0 \cdot q^n = 3e^2 \cdot e^{-2n} = 3e^{-2n+2}$

* بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

حل التمرين الخامس:

تبيان أن :

$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

بتوظيف الخاصية الأساسية للدالة اللوغاريتم النيبيري نجد :

$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n)$

ملاحظة مهمة: هذا البداء للصورة متناوبة لمتناوبة هندسية

مهم جداً ويجب معرفة حسابها: $P = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

وذلك بالاعتماد على عبارة الحد العام لهذه المتناوبة ومتناوبة جميع

الصورة بدلالة الحد الأول v_0

$$\ln \left(\underbrace{(3e^2)^{n+1} (e)^{-n(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n} \right) = \ln 3^{n+1} + \ln e^{2(n+1)} - n(n+1)$$

تكافئ:

$$\ln \left((3e^2)^{n+1} (e)^{-n(n+1)} \right) = (n+1) \ln 3 + 2(n+1) - n(n+1)$$

تكافئ:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2 + \ln 3)$$

وهو المطلوب.



التمرين السادس:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$

وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

معطيات التمرين: لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0 = -2$

* حدها العام هو: $v_n = -2 \left(\frac{2}{5} \right)^n$

* أحسب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$



حل التمرين السادس:

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \text{ حساب } S_n$$

بإب استخرج $\frac{1}{u_n}$

بإب v_n

لدينا من المعطيات: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n = \left(v_0 \times \underbrace{v_0 \cdot q^1}_{v_1} \times \underbrace{v_0 \cdot q^2}_{v_2} \times \underbrace{v_0 \cdot q^3}_{v_3} \times \dots \times \underbrace{v_0 \cdot q^n}_{v_n} \right)$$

تكافئ:

$$\left(v_0 \times \underbrace{v_0 \cdot q^1}_{v_1} \times \underbrace{v_0 \cdot q^2}_{v_2} \times \underbrace{v_0 \cdot q^3}_{v_3} \times \dots \times \underbrace{v_0 \cdot q^n}_{v_n} \right) = (v_0)^{n+1} \times q^{1+2+3+\dots+n}$$

مجموع متتالية حسابية خميرة أساسها $r=1$:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n+1}{2}(n) = \frac{n}{2}(n+1)$$

معناه:

$$P = v_0 \times v_1 \times v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

ومنه:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = \ln \left(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n}{2}(n+1)} \right)$$

تكافئ:

$$\ln \left(\underbrace{v_0^{n+1} \times q^{\frac{n}{2}(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n} \right) = \ln \left((3e^2)^{n+1} (e^{-2})^{\frac{n}{2}(n+1)} \right)$$

تكافئ:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = \ln \left((3e^2)^{n+1} (e)^{-\frac{2n}{2}(n+1)} \right)$$

تكافئ:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = \ln \left((3e^2)^{n+1} (e)^{-n(n+1)} \right)$$

استعمال خواص اللوغاريتم النيبيري نجد:

$$\ln \left(\underbrace{(3e^2)^{n+1} (e)^{-n(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n} \right) = \ln (3e^2)^{n+1} + \ln (e)^{-n(n+1)}$$

تكافئ:

$$\ln \left(\underbrace{(3e^2)^{n+1} (e)^{-n(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n} \right) = \ln (3^{n+1} e^{2(n+1)}) - n(n+1)$$

باستعمال خواص اللوغاريتم النيبيري نجد:

التمرين السابع:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ب: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \text{ كما يلي:}$$

معطيات التمرين: لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{1}{2}$

$$* \text{ حدها العام هو: } v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

* أحسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$



حل التمرين السابع:

1- حساب S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية مجموعها: } S_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$S_n = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} \right) \text{ تكافئ:}$$

$$S_n = \left(-\frac{2}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \text{ تكافئ:}$$

$$2- \text{ حساب } S'_n: S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

بإب استخرج

$$\frac{1}{u_n + 2} \rightarrow v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \text{ لدينا من المعطيات:}$$

بإب استخرج

$$v_n - 1 = -\frac{3}{u_n} \text{ تكافئ: } \frac{v_n - 1}{-3} = \frac{1}{u_n} \text{ تكافئ: } \frac{1}{u_n} = \frac{-v_n + 1}{3}$$

$$\frac{1}{u_n} = -\frac{1}{3}(v_n - 1) \text{ تكافئ:}$$

بجمع طرف
لطرف نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{u_0} = -\frac{1}{3}(v_0 - 1) \\ \frac{1}{u_1} = -\frac{1}{3}(v_1 - 1) \\ \frac{1}{u_2} = -\frac{1}{3}(v_2 - 1) \\ \vdots \\ \frac{1}{u_n} = -\frac{1}{3}(v_n - 1) \end{cases}$$

$$n = -\frac{1}{3} [(v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)]$$

لدينا: (v_n) متتالية هندسية مجموعها هو: $v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

$$S_n = -\frac{1}{3} \left[v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) - 1(n+1) \right] \text{ تكافئ:}$$

$$S_n = -\frac{1}{3} \left[-2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \right) - n - 1 \right] \text{ تكافئ:}$$

$$S_n = -\frac{1}{3} \left[-2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{\frac{3}{5}} \right) - n - 1 \right] \text{ تكافئ:}$$

$$S_n = -\frac{1}{3} \left[-\frac{10}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) - n - 1 \right] \text{ تكافئ:}$$

ملاحظة مهمة: يمكن حساب هذا المجموع بطريقة

أخرى بإب: $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وبنفس الطريقة الحساب

$$S_n = \frac{1}{3} \left[(n+1) + \frac{10}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) \right]$$



$$S'_n = \frac{1}{3} \left[\frac{3n+3+2}{3} - \frac{2}{3(4^{n+1})} \right] \text{ تكافئ:}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} \left[\frac{3n+5}{3} - \frac{2}{3(4^{n+1})} \right] \text{ تكافئ:}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(3n+5 - \frac{2}{4^{n+1}} \right) \right] \text{ تكافئ:}$$

$$S'_n = \frac{1}{9} \left(3n+5 - \frac{2}{4^{n+1}} \right) \text{ تكافئ:}$$



التمرين الثامن:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} \text{ و}$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

معطيات التمرين: لدينا:

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{4}$

* أحسب بدلالة n المجموع S :

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$$



حل التمرين الثامن:

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016} \text{ حساب } S_n$$

لدينا من المعطيات: $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

$$\begin{cases} v_0 \times u_0 = 1 - 4v_0 \\ v_1 \times u_1 = 1 - 4v_1 \\ v_2 \times u_2 = 1 - 4v_2 \\ \vdots \\ v_{2016} \times u_{2016} = 1 - 4v_{2016} \end{cases}$$

بجمع طرف
لطرف نجد:

$$S = 1(2016 - 0 + 1) - 4(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

حسابية

$$\text{لدينا: } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \text{ تكافئ: } v_n(u_n + 2) = u_n - 1$$

$$\text{تكافئ: } v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \text{ تكافئ: } v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$$

$$\text{تكافئ: } u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \text{ تكافئ: } u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$$

$$\text{معناه: } u_n + 2 = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} + 2$$

$$\text{تكافئ: } u_n + 2 = \frac{-2v_n - 1 + 2v_n - 2}{v_n - 1}$$

$$\text{تكافئ: } u_n + 2 = \frac{-3}{v_n - 1} \text{ تكافئ: } \frac{1}{u_n + 2} = \frac{-v_n + 1}{3}$$

$$\text{تكافئ: } \frac{1}{u_n + 2} = \frac{-v_n + 1}{3} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

بجمع طرف
لطرف نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_0) \\ \frac{1}{u_1 + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_1) \\ \frac{1}{u_2 + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n) \end{cases}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} \left[1(n - 0 + 1) - \underbrace{(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n)}_{S_n} \right]$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{3} [n + 1 - S_n]$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{3} \left[n + 1 - \left(-\frac{2}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \right]$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{3} \left[n + 1 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \right]$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{3} \left[n + 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3(4^{n+1})} \right]$$

حل التمرين التاسع:

١- حساب S_n :

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$$

* حدها العام للمتتالية (v_n) هو: $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$S_n = v_n \left(\frac{1 - q^{n+2016-n+1}}{1 - q} \right) \text{ (متتالية هندسية مجموعها)}$$

$$S_n = v_n \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \text{ تكافئ: } = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$S_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017} \right) \text{ تكافئ:}$$

$$S_n = \left(\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2017} \right) \text{ تكافئ:}$$

$$S_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2017} \text{ تكافئ:}$$

ملاحظة مهمة: قمنا في هذه الحالة بتبسيط الحساب لأنه

بوجود مجموع آخر S'_n ممكن تكون له علاقة مع هذا المجموع

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1} \text{ حساب } S'_n$$

لدينا من المعطيات: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ **بإزالة v_n واستخراج $\frac{1}{u_n + 1}$**

$$-1 = 1 - 2$$

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{2}{u_n + 1} \text{ تكافئ: } v_n = \frac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1} \text{ تكافئ:}$$

$$v_n - 1 = -\frac{2}{u_n + 1} \text{ تكافئ: } v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1} \text{ تكافئ:}$$

$$\frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2} \text{ تكافئ: } -v_n + 1 = \frac{2}{u_n + 1} \text{ تكافئ:}$$

$$v_0 = \frac{1}{4} \text{ (متتالية حسابية أساسها } r = \frac{1}{7} \text{ وحدها الأول)}$$

$$\text{مجموعها هو: } \frac{2016 - 0 + 1}{2} (v_0 + v_{2016})$$

المجموع: (عدد الحدود $\div 2$) $\times$ (الحد الأول + الحد الأخير)

$$S = 1(2016 - 0 + 1) - 4 \left(\frac{2017}{2} (v_0 + v_{2016}) \right) \text{ تكافئ:}$$

$$S = 2017 - 4 \left(\frac{2017}{2} \left(\frac{1}{4} + v_{2016} \right) \right) \text{ تكافئ:}$$

حساب v_{2016} لدينا:

$$v_0 = \frac{1}{4} \text{ (متتالية حسابية أساسها } r = \frac{1}{7} \text{ وحدها الأول)}$$

$$v_n = v_0 + (n - 0)r \text{ معناه حدها العام هو:}$$

$$v_{2016} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}(2016) \text{ تكافئ: } v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}n \text{ تكافئ:}$$

$$S = 2017 - 4 \left(\frac{2017}{2} \left(\frac{1}{4} + 288 \right) \right) \text{ تكافئ: } v_{2016} = 288 \text{ تكافئ:}$$

$$S = -1161792 \text{ تكافئ:}$$

التمرين التاسع:

$$u_0 = 5 \text{ (متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بحدها الأول)}$$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} \text{ بالعلاقة:}$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ كما يلي:}$$

معطيات التمرين: لدينا:

$$v_0 = \frac{2}{3} \text{ (متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول)}$$

* أحسب بدلالة n المجاميع S_n و S'_n :

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$$

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$$

* أحسب بدلالة n المجاميع S_n و T :

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$T = e^{u_{1441}} + e^{u_{1442}} + \dots + e^{u_{2020}}$$



حل التمرين العاشر:

1- حساب S_n : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$

باستعمال خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري نجد:

من أجل a و b عددين حقيقيين من $]0; +\infty[$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ لدينا}$$

ومنه :

$$S_n = \ln(v_1) - \ln(v_0) + \ln(v_2) - \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n) - \ln(v_{n-1})$$

معناه :

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) = \ln(v_1) - \ln(v_0) \\ \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \ln(v_2) - \ln(v_1) \\ \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right) = \ln(v_3) - \ln(v_2) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln(v_n) - \ln(v_{n-1}) \end{cases}$$

بجمع طرف لطرف نجد:

$$S_n = -\ln(v_0) + \ln(v_n)$$

لدينا: $v_n = 2n + 1$ معناه: $v_0 = 2(0) + 1 = 1$ ومنه: $v_0 = 1$

ومن جهة أخرى: $u_n = \ln(v_n)$

معناه: $S_n = -\ln(1) + u_n$ ومنه: $S_n = u_n$

$$\text{تكافئ: } \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2}$$

$$\text{تكافئ: } \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2} = \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - v_n) \\ \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2}(1 - v_{n+1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{u_{n+2016} + 1} = \frac{1}{2}(1 - v_{n+2016}) \end{cases}$$

بجمع طرف لطرف نجد:

$$S'_n = \frac{1}{2} \left[1(n+2016-n+1) - \underbrace{(v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016})}_{S_n} \right]$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{2} [2017 - S_n] \quad \text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{2} (2017) - \frac{1}{2} S_n$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{2} (2017) - \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+2017} \right]$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{2} (2017) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n+2017}$$

$$\text{تكافئ: } S'_n = \frac{1}{2} (2017) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+2018}$$



التمرين العاشر:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$

$$\text{بالعبارة التراجعية: } u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي: $v_n = e^{u_n}$ تكافئ: $u_n = \ln(v_n)$

معطيات التمرين: لدينا:

(v_n) متتالية حسابية أساسها: $r = 2$

وعبارة حدها العام: $v_n = 2n + 1$

معناه: $u_n = \ln(2n + 1)$

بحسب حساب $T = e^{u_{1441}} + e^{u_{1442}} + \dots + e^{u_{2020}}$

ومنه: $T = v_{1441} + v_{1442} + \dots + v_{2020}$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $v_0 = 1$

مجموعها هو: $T = \frac{2020 - 1441 + 1}{2} (v_{1441} + v_{2020})$

المجموع: (عدد الحدود $\div 2$) $\times$ (الحد الأول + الحد الأخير)

حساب v_{1441} : لدينا: $v_{1441} = 2(1441) + 1 = 2883$

حساب v_{2020} : لدينا: $v_{2020} = 2(2020) + 1 = 4041$

ومنه: $T = \frac{2020 - 1441 + 1}{2} (2883 + 4041)$

يكافئ: $T = \frac{580}{2} (6924)$ يكافئ: $T = 290(6924)$

ومنه: $T = 2007960$



بالتوفيق والنجاح في بكالوريا دورة سبتمبر 2020

