

5^{min}



CHABANE Oussama

Maths

مجلة

إصدار - جديد

المسابقات

3^{AS}

شعبة: تسيير و اقتصاد

العددية



من اعداد الأستاذ

شعبان أسامة

”

تمارين محلولة

تمارين مقترحة

سؤال و جواب

ملخص الدرس

اصدار 14 نوفمبر 2020 - تلمسان

”



Facebook / Telegram / Instagram / Google : 5min Maths

www.dzexams.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

”

اليك أيها التلميذ " مجلة 5min Maths " للسنة الثالثة ثانوي لشعبة تسيير واقتصاد

محور المتتاليات العددية وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصص مساعدتك على التحضير الجيد لاجتياز بكالوريا دورة 2021 ، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن وأقصر لكن النتائج والأهداف واحدة ، في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك ويهديك الى سبيل الخير



أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا التي سهرت دائما على نجاحي بعد توفيق المولى عز وجل.

وثانيا لجميع تلاميذي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر...أحبكم

الاستاذ شعبان اسامة



مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة
بتاريخ: 2019/09/13



تجدون في هذا العمل

المسابقات العددية

◀ ملخص الدرس + تطبيقات

◀ سؤال و جواب

◀ تمارين محلولة

◀ تمارين مقترحة

”

سيتم نشر الهياور الأخرى الخاصة بهذه الشعبة تدريجيا حسب التوزيع السنوي

ملخص الدرس

1. متتالية عددية

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة: • المتتالية (u_n) حيث : $u_n = -5n^2 + 2$ معرفة على $\mathbb{N}$.

• المتتالية v حيث : $v_n = \frac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N} - \{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n \geq 1}$.

• المتتالية w حيث : $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ و نكتب $(w_n)_{n \geq 6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد

الأول.

رتبة حد $(b \in \mathbb{N})u_b$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2. طرق توليد متتالية عددية. (يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

أ- توليد متتالية عددية بالحد العام:

• إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . ولحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = -n^2 + 3$ معرفة بحددها العام . ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n = f(n)$ حيث $f: x \mapsto -x^2 + 3$.

ب- توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

• لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحددها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$

الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u .

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n$.

لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_1 = 3u_0 = 3$ ، $u_2 = 3u_1 = 9$ ، $u_3 = 3u_2 = 27$ و هكذا ...

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n^2 + 1$.

(1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

(2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ مع الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها. وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -3x^2 + 1$.

حل: (1) $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_3 = -3(3)^2 + 1 = -26$

• $u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$ ، $u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$

(2) $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$ ، $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$

• $u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{3}{2+u_n}$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} . ثم ضع تخميناً

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ مع الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها. و من أجل عدد حقيقي موجب x

: $f(x) = \frac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0, +\infty[$ وبما أنه $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

(1) $u_1 = \frac{3}{2+u_0} = \frac{3}{4}$ ، $u_2 = \frac{3}{2+u_1} = \frac{3}{2+\frac{3}{4}} = \frac{12}{11}$ ، $u_3 = \frac{3}{2+u_2} = \frac{3}{2+\frac{12}{11}} = \frac{33}{34}$

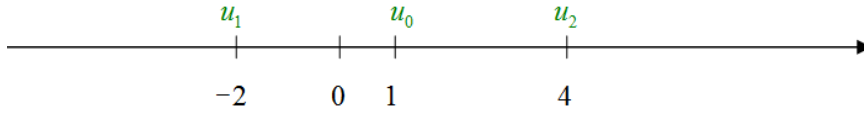
(2) الحاسبات تبين أن $u_{10} \approx 1$ ، $u_{11} \approx 1$ و $u_{12} \approx 1$. نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقاً من $n = 10$.

3. التمثيل البياني لمتتالية عددية.

1. متتالية معرفة بالدالة.

• يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحددها العام على محور

□ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = (-2)^n$.



• يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحددها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).

□ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - 4n - 1$.

(u_n) معرفة كذلك $u_n = f(n)$ حيث $u_n = f(n)$: حيث $f: x \mapsto x^2 - 4x - 1$ نعرف f على المجال

$[0, +\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياتها $(n, f(n))$

من أجل $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5$ في المستوي المنسوب

إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. مجموعة النقط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .

2. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n, f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة).

4. إتجاه تغير متتالية عددية.

① **متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

② **متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

③ **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} = u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

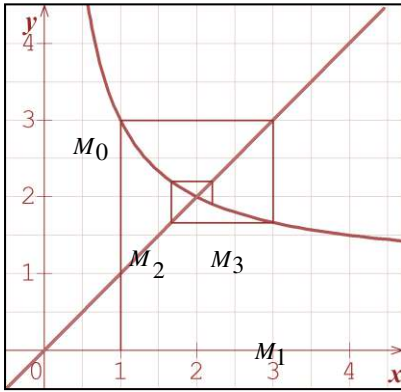
④ **متتالية رتيبة:** المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب).

□ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

• مثل بيانها المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, I, J) .

طريقة: لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة

$y = x$. لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n, u_{n+1})$.



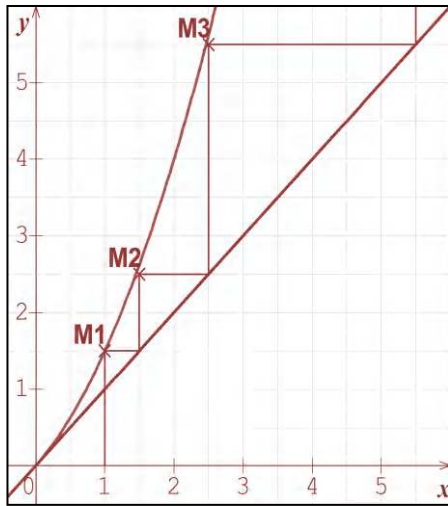
حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) . أي $f(x) = \frac{2+x}{x}$

نعرف الدالة f على المجال $]0, +\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. النقطة

$M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(1, 3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق

(Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على

النقطة $M_1(u_1, u_2)$ أي $M_1(3, \frac{5}{3})$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.



مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بحدّها الأول $u_1 = 1$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + u_n$$

• مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

و متجانس (O, I, J) .

حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) . أي

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \text{ المعرفة على }]0, +\infty[. (\Delta) \text{ المستقيم ذو المعادلة}$$

$y = x$. نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

مثال:

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = \frac{n+1}{3^n}$ و $v_n = \frac{2n-1}{n+3}$

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

(1) ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$ أو

(2) نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1.

(3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

حل: • اتجاه تغير المتتالية (u_n) . $u_{n+1} - u_n = \frac{-2n-1}{3^{n+1}}$. إذن $u_{n+1} - u_n < 0$ و $u_{n+1} < u_n$ و منه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن الدالة $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ حيث $f(x)$ متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

5. المتتالية الحسابية و الهندسية

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$ عبارة الحد العام إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p: $u_n = u_p + (n - p)r$ حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$ حساب المجموع إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ عدد الحدود = دليل اللاحد الأخير - دليل الحد الأول + 1 الوسط الحسابي تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب <u>حدودا متتابعة</u> من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان: $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c. اتجاه التغير (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها r لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = r$، ومنه: • إذا كان r سالبا تماما $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة. • إذا كان r موجبا تماما $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة. • إذا كان r معدوما $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n + 2$. 1. أحسب u_0 و u_1. 2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r. 3. أحسب، بدلالة n، المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ الحل: 1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$ 2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $-u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$	تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{أو} \quad u_{n+1} = u_n \times q$ عبارة الحد العام إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ حساب المجموع إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$ عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1 حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$ الوسط الهندسي تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب <u>حدودا متتابعة</u> من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c. اتجاه التغير (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها q. نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه: * إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة. * إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة. * إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة. * إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد 2. مثال (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$. 1. أحسب v_2 و v_3. 2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n. 3. أحسب، بدلالة n، المجموع

$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ الحل: 1. $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$ 2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$ $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$ و منه: $S = 3 \times \left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right) = -3(1 - 2^n) = 3(2^n - 1)$	نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$. 3. لدينا: $= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$
---	---

6. المتتاليات المحدودة و الرتيبة

المتتاليات المحدودة

تعريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.
 - القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $B \leq u_n$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.
 - القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.
- مثال:** لتكن u_n المتتالية المعرفة من أجل

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} \quad \text{كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم بـ:}$$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\frac{3}{n} \leq 3$ و منه $u_n \leq 5$ نستنتج أن u_n محدودة من الأعلى بـ 5.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\frac{3}{n} > 0$ و منه $u_n > 2$. نستنتج أن u_n محدودة من الأسفل بـ 2.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $2 < u_n \leq 5$. نستنتج أن المتتالية محدودة.

ملاحظة: العدد 5 عنصر حاد من الأعلى لـ u_n . كل عدد حقيقي A أكبر من 5 هو كذلك عنصر حاد من الأعلى

للمتتالية u_n (نفس الملاحظة بالنسبة للعنصر الحاد من الأسفل).

ب- المتتاليات الرتيبة

تعريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول عن (u_n) أنها متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$.
2. القول عن (u_n) أنها متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$.
3. القول عن (u_n) أنها ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول عن (u_n) أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

ملاحظة:

* تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

* توجد متتاليات ليست متزايدة و ليست متناقصة. نقول عنها أنها غير رتيبة و نذكر على سبيل المثال المتتالية (u_n)

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

المعرفة بحددها العام

* تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا و جد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = k$.

7. نهاية متتالية

أ- المتتاليات المتقاربة

لما تأخذ الحدود u_n لمتتالية u_n قيمة قريبة بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي l لما يأخذ العدد الطبيعي n قيمة كبيرة بالقدر الكافي، نقول أن نهاية المتتالية u_n هي l لما يؤول n إلى $+\infty$ و أن المتتالية u_n متقاربة و تتقارب نحو l .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{و نكتب}$$

ملاحظة:

- ندرس دائما نهاية متتالية عند $+\infty$ و غالبا ما يطلب دراسة نهاية متتالية بدون التحديد عند $+\infty$.
- إذا لم تكن متتالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثال: لنكن u_n المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.

يمكن إثبات أن u_n يبقى قريب من 3 بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون n كبيرا بالقدر الكافي. نستنتج أن المتتالية u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 \quad \text{و تتقارب نحو العدد 3}$$

ب- المتتاليات ذات الحد العام $u_n = f(n)$

خاصية: يمثل α عددا حقيقيا، $+\infty$ أو $-\infty$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \quad \text{إذا كانت} \quad f \text{ دالة معرفة على المجال } [0; +\infty[.$$

ملاحظة: العمليات على النهايات الخاصة بالدوال تبقى صحيحة بالنسبة للمتتاليات.

مثال: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right) = 3$

ج-الرتابة و التقارب

مبرهنة: (1) إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة.

(2) إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية متقاربة.

ملاحظة: تسمح هذه المبرهنة بإثبات تقارب متتالية و لكن لا تعطي النهاية.

مثال: نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$ ، بين المتتالية u_n متقاربة.

الحل:

نلاحظ أن $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

نستنتج أن المتتالية u_n متقاربة و تتقارب نحو العدد 2.

د-نهاية متتالية هندسية

مبرهنة: (1) إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

(2) إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

(3) إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

(4) إذا كان $q \leq -1$ فإنه ليس للمتتالية (q^n) نهاية.

مثال: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

مثال: u_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 2$.

نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

1. عبر عن u_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية u_n

2. عبر عن S_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية S_n .

الحل:

4. من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ و هكذا فإن المتتالية u_n متقاربة نحو 0.

5. من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$ ومنه $S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$. نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6$ و هكذا فإن المتتالية S_n متقاربة نحو 6.

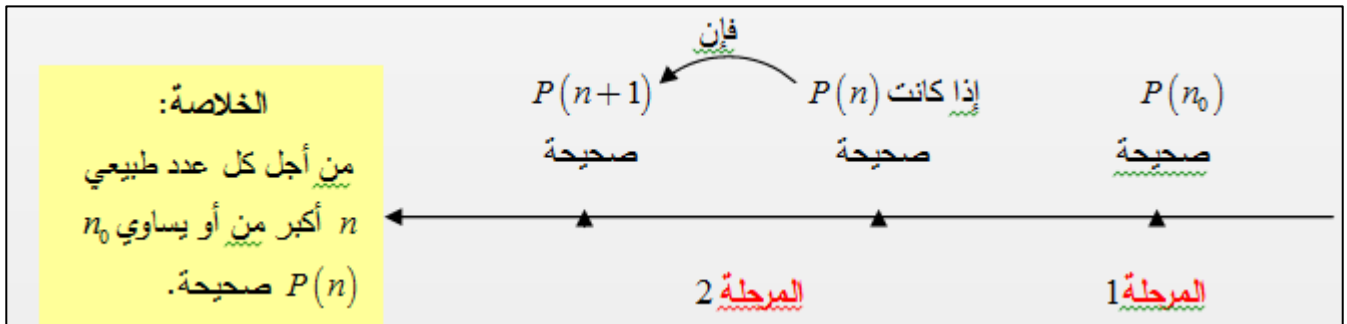
7. الاستدلال (البرهان) بالتراجع

مبدأ الاستدلال بالتراجع

مسألة: خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.



مثال: الخاصية: "من أجل كل عدد طبيعي n ، 3^n مضاعف للعدد 5" خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد 5 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $3^n = 5k$.

لدينا إذن $3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3(5k) = 5(3k)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد 5.

مثال:

لنثبت صحة الخاصية التالية: "من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

المرحلة الأولى: من أجل $n = 1$ لدينا: $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$.

المرحلة الثانية (الوراثة):

- نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ أي: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ أي: $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- لدينا: $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$
- و منه $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- الخلاصة:** " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

مثال: (u_n) متتالية حدها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.
2. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 . ما ذا تستنتج ؟

الحل:

1. البرهان على أن (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- المرحلة 1: لدينا $u_1 = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$ و منه $u_1 \leq u_0$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_{n+1} \leq u_n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1} \leq u_n$ و منه $\frac{1}{2}u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}u_n - 1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة.

2. البرهان على أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \geq -2$.
- المرحلة 1: لدينا $u_0 = 4$ و منه $u_0 \geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n \geq -2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$ أي $u_{n+1} \geq -2$

لدينا $u_n \geq -2$ و منه $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq \frac{1}{2}(-2) - 1 = -2$ أي $u_{n+1} \geq -2$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq -2$ و منه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 .

نستنتج من السؤالين السابقين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

8. دراسة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$

نتيجة: إذا كانت متتالية (u_n) تحقق العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ وكانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) رتيبة و إشارة $u_1 - u_0$ هي التي تحدد إذا كانت (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بعدها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(أ) نفرض $\alpha = 3$

1. أحسب u_1, u_2, u_3 . ضع تخميناً حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.
2. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
- (ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محدداً نهايتها.

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) نفرض $\alpha = 6$. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الحل:

(أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

1. نجد بعد الحساب: $u_1 = 3$ ، $u_2 = 3$ و $u_3 = 3$. يظهر أن المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3$.

* **المرحلة 1:** الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 3$.

* **المرحلة 2:** نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n = 3$ و نبين صحتها من أجل $n + 1$.

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ و منه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

* **الخلاصة:** نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن (u_n) ثابتة.

2. نعم المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3.

(ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \quad \text{و منه} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}u_n - 3$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 3$.

$$2. \quad \text{لدينا من أجل كل } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \text{فإن } u_n = v_n + 3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$3. \quad \text{بما أن } -1 < \frac{1}{3} < 1 \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3. \quad \text{نستنتج أن } (u_n) \text{ متقاربة و تتقارب نحو } 3.$$

$$4. \quad \text{نلاحظ أن } u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{حيث } f: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2 \quad \text{بما أن } \frac{1}{3} > 0 \quad \text{و } \left(u_1 - u_0 = \frac{2}{3}\right) u_1 - u_0 > 0$$

فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

$$\text{ج) } \alpha = 6 \quad \text{و منه } u_0 = 6$$

$$\text{بما أن } \frac{1}{3} > 0 \quad \text{و } (u_1 - u_0 = -2) u_1 - u_0 < 0 \quad \text{فإن المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة.}$$

سؤال و جواب



اختبر معلوماتك

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} . 2. أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

* أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 2v_n + 5$.

1. أحسب v_1 و v_2 . 2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1} .

4. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1 . 2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

5. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3 . 2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n . 3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

6. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n . 2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

7. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول. 2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

8. بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.. 2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

9. (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، و $u_5 = \frac{1}{32}$.

1. أحسب u_{2007} . 2. أحسب $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{28} + u_{29}$.

الأجوبة

حل السؤال 1 :

$$1. u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199, u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11, u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2, u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$$

$$2. u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1, u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$$

حل السؤال 2 :

$$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 2 + 1 = -3$$

$$u_2 = -2u_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7$$

$$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 7 + 1 = -13$$

حل السؤال 3 :

$$1. v_2 = 2v_1 + 5 = 2(-1) + 5 = 3 \quad \text{و} \quad v_1 = 2v_0 + 3 = 2(-3) + 5 = -1$$

$$2. v_{n+2} = 2v_{n+1} + 5 = 2(2v_n + 5) + 5$$

$$\text{و منه } v_{n+2} = 4v_n + 15$$

$$\text{من } v_{n+1} = 2v_n + 5 \text{ نستنتج أن } v_n = 2v_{n-1} + 5 \text{ و بالتالي } 2v_{n-1} = v_n - 5$$

$$\text{و منه } v_{n-1} = \frac{v_n - 5}{2}$$

حل السؤال 4 :

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r .

$$1. u_1 = -3(1) + 2 = -1 \quad \text{و} \quad u_0 = -3(0) + 2 = 2$$

$$2. \text{ لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

$$3. \text{ لدينا: } S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2} \text{ و منه } S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$$

حل السؤال 5 :

$$1. v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12, v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$$

$$2. v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

$$S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3(1-2^n) = 3(2^n-1) \text{ ومنه } S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

حل السؤال 6 :

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... وإنما يجب المقارنة

بين u_n و u_{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n .

$$1. \quad u_{n+1} - u_n = 2n \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - (n+1)] - (n^2 - n)$$

$$2. \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n, 2n \geq 0 \text{ أي من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

حل السؤال 7 :

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} v_n \text{ ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{3}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \text{بما أن } \frac{3}{2} > 1 \text{ و } v_0 > 0 \text{ فإن المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة } \left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \right)^n \right)$$

حل السؤال 8 :

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لنرمز بـ u_n مثلاً إلى عدد سكان المدينة السنة $2005 + n$ ومنه $u_0 = 3000$ و $u_2 = 3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005 + n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية

هي: $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ ومنه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$ و بالتالي $q = 1,1$. نستنتج أن $\alpha = 0,1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2030 = 2005 + 25$. لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ ومنه $u_{25} = 3000 \times (1,1)^{25}$ أي $u_{25} \approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

حل السؤال 9 :

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

$$\text{إذا } u_{2007} = u_5 \times q^{2007-5} = \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{2002} = \frac{1}{2^{2007}}$$

• نعلم أنه إذا كان $q \neq 1$ لدينا $S = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$ و ومنه $S = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{30}} \right)$

تمارين محلولة

التمارين

1.

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

1. احسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

2. بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

ب- عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

2.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 وتحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0 .

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.

3.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$.

4.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحددها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1. عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

2. بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6n - 5$.

3. أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

5.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول u_0 وأساسها r .

1. أحسب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.

3. استنتج قيمة r واحسب u_0 .

4. تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

6. جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

.6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

أ- 17 ب- 14 ج- 11 .

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101} - 1}{2}$ ب- $\frac{1 - 3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب تشكل

حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$ ب- $x = 0$ ج- $x = \frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

.7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$, (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n = 3 \times 2^n$ ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ ج- $v_n = 2 \times 3^n$

3. المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$ ب- $(2^n - 1)$ ج- $2(3^n - 1)$

.8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. بين أن $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .

2. بين أن $q = 4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

.9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(أ) نفرض $\alpha = 3$ اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.(ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟لتكن المتتالية (u_n) والمتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$u_0 = 12, v_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.(1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n .(2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.(3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. وأن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.(4) عين u_n و v_n بدلالة n .

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد 10000 DA ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ 1500 DA في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.1. عين u_0 ثم احسب u_1 . كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003؟2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1,05u_n - 1500$.3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 30000$.• بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.• ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائما؟

$$1. (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بالعلاقة: } \begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

(2) أكتب u_n بدلالة n .

$$(3) \text{ احسب المجموع } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث: } S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $6u_{n+1} = 5u_n + 4$.(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n < 4$.ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 15\left(\frac{5}{6}\right)^n + 4n - 14$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

(I) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(II) في كل ما يلي: $\alpha = -1$.

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -4 \times 2^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(4) أحسب، بدلالة n ، المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) وعين حدّها الأول

v_1 .

(ب) عبر عن v_n بدلالة n .

(ج) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - 3$.

(د) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ما هي نهايتها.

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

(1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

(2) أكتب u_n بدلالة n .

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$a, \begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ عدد حقيقي}$$

(1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

.14

.15

.16

(2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد 10000 DA ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ 1500 DA في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

6. عين u_0 ثم احسب u_1 . كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟

7. يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1,05 u_n - 1500$.

8. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

9. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 30000$.

• بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

• ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

10. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائما ؟

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 8$.

ب- يبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج- إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n - 8$.

أ- يبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. أحسب u_1, u_2, u_3 .

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. عين العدد الطبيعي n بحيث $81u_n = 245$.

5. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

6. نعرف متتالية عددية (v_n) كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 3}{2}\right)$.

أ- حدد طبيعة هذه المتتالية وعناصرها المميزة.

ب- عين العدد الطبيعي n حتى يكون $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = -28 \ln 3$.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $\ln u_1 + \ln u_5 = -12$ و $\ln u_2 - \ln u_4 = 4$.

(1) عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.
أ- يّئن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها.

ب- أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

حلول ومقترحة



حل التمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

$$u_0 = -2$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = 7$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - 3n + 2 \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية. اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

$$\begin{aligned} \text{أي: } 3n - 2 &= 1954 \text{ معناه: } u_{652} = 1954 \text{ رتبته. } 653 \text{ لأن الحد الأول هو } u_0. \\ n &= 652 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

5. أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \frac{(-2 + 3n - 2)}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2} \text{ نقوم بالنشر نتحصل على:}$$

ب- تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$$

$$\text{معناه: } 3n^2 - n - 4 = 2(328)$$

$$3n^2 - n - 660 = 0$$

$$n_1 = 15 \in \mathbb{N}$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما: $n_2 = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$ وبالتالي من أجل $n = 15$ لدينا: $S_n = 328$



حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 وتحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{cases} \quad \text{نجمع المعادلات نتحصل: } u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10 \quad \text{أي: } 4u_0 + 18 = 10 \quad \text{وبالتالي: } u_0 = -2$$

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = -2 + 3n$

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$

$$u_n = -2 + 3n = 145 \quad \text{أي: } n = 49 \quad \text{يعني: } u_{49} = 145$$

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$$

$$= 50 \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right)$$

$$= 50 \left(\frac{-2 + 145}{2} \right)$$

$$= 3575$$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$$

$$= 2S + 3(50)$$

$$= 2(3575) + 150$$

$$= 7300$$

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$



حل التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$

1. اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$

$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$

من القانون : نضع : $n = 3; p = 1$

$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$

$$q = 4, q = -4$$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. وبالتالي: $q = 4$

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n : $u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right)$$

$$= \frac{-5}{3} (1 - 4^{n+1})$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$ $S' = \frac{-5}{3} (1 - 4^{6+1}) = 27305$



حل التمرين 4:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بعدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases} \text{ . } (u_n) \text{ . } 1. \text{ تعين الأساس } r \text{ للمتتالية}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$

$$10r - 10 = 50$$

$$10r = 60$$

$$r = 6$$

ومنه:

2. من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ وبالتالي: $u_n = 6n - 5$

3. أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ،

$$\begin{aligned} 6n - 5 &= 2017 \\ n &= 337 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

نحل المعادلة:

$$u_0 = -5 \text{ رتبته } 338 \text{ لأن: حدها الأول:}$$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{-5 + 6n - 5}{2} \right) \quad \text{أي:} \\ &= (n+1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right) \\ &= (n+1)(-5 + 3n) \\ &= 3n^2 - 2n - 5 \end{aligned}$$



حل التمرين 5:

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول u_0 وأساسها r .

$$1. \text{ حساب الحد } u_4 \text{ علما أن: } u_3 + u_5 = 20.$$

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$\begin{aligned} u_3 + u_5 &= 2u_4 \\ 2u_4 &= 20 \\ u_4 &= 10 \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$2. \text{ أحسب الحد } u_5 \text{ علما أن: } 2u_4 - u_5 = 7. \text{ لدينا:}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= 10 \\ 2u_4 - u_5 &= 7 \\ 2(10) - u_5 &= 7 \\ u_5 &= 13 \end{aligned}$$

معناه:

$$\begin{aligned} r &= u_5 - u_4 \\ r &= 13 - 10 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

3. استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان: $r = 13 - 10$

$$u_4 = u_0 + 4r$$

حساب u_0 . نأخذ المعادلة: $u_0 + 4(3) = 10$

$$u_0 = -2$$

4. تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{-2 + 3n - 2}{2} \right) \quad \text{و بالتالي:}$$

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

6. ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4 + 3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي ونقبل: $n = 5$



حل التمرين 6:

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

$$\text{ج- } \frac{3^{100} - 1}{2}$$

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

$$x = \frac{4}{3}$$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي: هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية



حل التمرين 7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$ ، متتالية:

أ- متزايدة تماما

لأن $u_{n+1} - u_n > 0$:

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1 .

3. المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$



حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. اثبات أن $u_1 = 24$.

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$

$$u_1^2 = 576 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

وبما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0 :

$$u_0 + u_1 = 30$$

$$u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$$

$$u_0 = 6$$

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$q = 4 \text{ ، نعلم أن: } q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = 6 \times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ وبالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 6 \times 4^{n+1} - 6 \times 4^n \\ &= 6 \times 4^n \times 4^1 - 6 \times 4^n \\ \text{وهو المطلوب} \quad &= 6 \times 4^n (4 - 1) \\ &= 6 \times 4^n (3) = 18 \times 4^n \end{aligned}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4. حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) .

$$u_n = 1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6 \times 4^n = 1536$

$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

اذن: $4^4 = 256$ ونعلم أن n عدد طبيعي فبالإتالي: $n = 4$. رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0 .

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

معناه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \\ &= 24 \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) \\ &= 24 \left(\frac{1 - 4^n}{-3} \right) \quad \text{أي:} \\ &= -6(1 - 4^n) \\ &= 6(4^n - 1) \end{aligned}$$

حل التمرين 9

أ) $\alpha = 3$ ومنه $u_0 = 3$

لأن: (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \dots = u_0 = 3$ (كل حدودها متساوية)

• من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = n+1 u_0$ ومنه $S_n = 3(n+1)$.

ب) $\alpha = 2$ ومنه $u_0 = 2$

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \quad \text{ومنه} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}u_n - 3$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3$

$$2. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{لدينا } v_n = u_n - 3 \quad \text{ومنه} \quad u_n = v_n + 3 \quad \text{إذن} \quad u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$3. \quad \text{لدينا} \quad S = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 3 + 3 + \dots + 3$$

ومنه $S = S' + 3(n+1)$ حيث $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

$$\text{لدينا} \quad S' = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \quad \text{ومنه} \quad S = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

$$4. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 10

1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n .

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12}w_n \end{aligned}$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$. ومنه $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

(2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

$$(3) \text{ نحسب : } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = -\frac{2}{3}w_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$$\text{نحسب : } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4}w_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases} \quad (4)$$



حل التمرين 11

(1) $u_0 = 10000$ ، $u_1 = 90000$ ، u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

$$\text{حيث : } u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 - 1500 \text{ ومنه } u_2 = 7950$$

$$(2) \quad u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 10000 - 1500 \text{ ومنه } u_{n+1} = 1,05u_n - 1500$$

$$(3) \text{ نلاحظ أن } u_{n+1} = f(u_n) \text{ ، } f(x) = 1,05x - 1500$$

$$f \text{ متزايدة ومنه المتتالية } (u_n) \text{ رتيبة. وبما أن } u_1 - u_0 < 0$$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$(4) \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 30000 = 1,05u_n - 31500$$

$$\text{ومنه } v_{n+1} = 1,05(v_n - 30000) \text{ أي } v_{n+1} = 1,05v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ وحدها الأول $v_0 = -20000$.

• لدينا $v_n = v_0 q^n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n$.

بما أن $u_n = v_n + 30000$ فإن $u_n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n + 3 \times 10^4$

و منه $\lim u_n = -\infty$

(5) لدينا $u_8 = 540,89$ و $u_9 = -1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده

يكون دائما ابتداء من سنة 2010.



حل التمرين 12:

1. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:
$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(1) أساس هذه المتتالية:
$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + 2r = -1 + 2r \\ u_4 &= u_0 + 4r = -1 + 4r \end{aligned}$$

وبالتعويض نجد: $r = 1$ بما أن: $r = 1 > 0$ فإن (u_n) متتالية متزايدة

(2) أكتب u_n بدلالة n .
$$u_n = -1 + n$$

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث:
$$S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n + \frac{1}{2}n \\ &= n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) + \frac{1}{2}n \\ &= n \left(\frac{-1 + n}{2} \right) + \frac{1}{2}n \end{aligned}$$



حل التمرين 13:

المتتالية العددية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون
$$u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{4}{6}$$

(1) أ - البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 4$.

لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_0 < 4$. وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n < 4$ ، و نبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي $u_{n+1} < 4$.

لدينا حسب الفرض $u_n < 4$ و منه $\frac{5}{6}u_n + \frac{4}{6} < \frac{5}{6} \times 4 + \frac{4}{6}$ أي $u_{n+1} < 4$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 4$.

ب - تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

لندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n + \frac{4}{6} - u_n = -\frac{1}{6}u_n + \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}(u_n - 4), \quad n, \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{و لدينا مما سبق أن: } u_n < 4 \text{ و منه } u_n - 4 < 0. \text{ إذن } -\frac{1}{6}(u_n - 4) > 0.$$

$$\text{وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} - u_n > 0.$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، إذن فهي متقاربة.

(2) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n - 4$

أ - إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{5}{6}u_n + \frac{4}{6} - 4 = \frac{5}{6}u_n - \frac{20}{6} = \frac{5}{6}u_n - \frac{5 \times 4}{6} = \frac{5}{6}(u_n - 4) = \frac{5}{6}v_n$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{5}{6}. \text{ الحد الأول: } v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3.$$

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n: \quad v_n = v_0 \times q^n = -3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{كتابة } u_n \text{ بدلالة } n: \quad u_n = v_n + 4 = -3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + 4$$

$$\text{ج - } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + 4 \right) = 4. \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0. \text{ (لاحظ أن } 0 < \frac{5}{6} < 1 \text{)}$$

$$\text{د - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = 15 \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + 4n - 14.$$

$$\text{لدينا: } u_n = v_n + 2 \text{ و منه: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 4(n+1).$$

$$S_n = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) + 4n + 4 = -3 \left(\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{6}} \right) + 4n + 4 = -18 + 18 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + 4n + 4 = 15 \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + 4n - 14$$



حل التمرين 14

(I). تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$$u_{n+1} = u_n = u_0: n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{أي: } \alpha = 2\alpha - 3, \text{ ينتج: } \alpha = 3.$$

(II) في كل ما يلي: $\alpha = -1$.

(1) حساب الحدود:

$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(-5) - 3 = -13, \quad u_1 = 2u_0 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$

(2) أ - إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 2 \times 3 = 2(u_n - 3) = 2v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 3 = -1 - 3 = -4$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$ و منه : $v_n = -4 \times 2^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n + 3 = -4 \times 2^n + 3$

(3) حساب الفرق $u_{n+1} - u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = -4 \times 2^{n+1} + 3 - (-4 \times 2^n + 3) = -4 \times 2^n (2 - 1) = -4 \times 2^n$

لدينا : $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(4) حساب المجموع S_n بدلالة n :

لدينا : $u_n = v_n + 3$ و منه :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 3(n+1) = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) + 3n + 3 = 4 - 4 \times 2^{n+1} + 3n + 3 = 7 + 3n - 4 \times 2^{n+1}$$



حل التمرين 15

$$u_2 = \frac{-1}{3}, u_1 = 1 \quad (1)$$

$$v_1 = u_1 - u_0 = -2 \quad \text{حيث : } \frac{2}{3} \quad \text{وحدها الأول } v_1 \quad \text{متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{3} \quad \text{و منه } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 - \left(\frac{2}{3}u_{n-1} - 1 \right) = \frac{2}{3}v_n \quad (1.2)$$

$$v_n = v_1 r^{n-1} = -1 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad \text{ب) } v_n \text{ بدلالة } n :$$

$$u_n = -2v_n - 3 = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - 3 = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - 3 \quad \text{ومنه } v_n = \frac{1}{2}(-u_n - 3) \quad \text{ج) } u_n = -2v_n - 3 = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - 3$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \left(\frac{2}{3} \right)^n < 0 \quad \text{د) المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما لأن :}$$

نهاية المتتالية (u_n) هي -3 .



حل التمرين 16

$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \text{أ. } (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بالعلاقة :}$$

$$u_2 = u_0 + 2r = -1 + 2r \quad (1) \text{ أساس هذه المتتالية :}$$

$$u_4 = u_0 + 4r = -1 + 4r$$

و بالتعويض نجد : $r = 1$

بما أن : $r = 1 > 0$ فإن (u_n) متتالية متزايدة

$$(2) \text{ أكتب } u_n \text{ بدلالة } n. \quad u_n = -1 + n$$

$$(3) \text{ احسب المجموع } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث: } S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n + \frac{1}{2}n \\ &= n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) + \frac{1}{2}n \\ &= n \left(\frac{-1 + n}{2} \right) + \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

(1) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية:

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = v_n + 2a^2 - a$ أي: $(a^2 - 3) = 1$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a = -2, a = 2$.

(2) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n$ أي: $2a^2 - a = 0$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a = \frac{1}{2}, a = 0$.



حل التمرين 17:

$$(1) \quad u_0 = 10000, \quad u_1 = 90000, \quad u_2 \text{ هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.}$$

$$\text{حيث: } u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 - 1500 \text{ و منه } u_2 = 7950$$

$$(2) \quad u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 10000 - 1500 \text{ و منه } u_{n+1} = 1,05u_n - 1500$$

$$(3) \text{ نلاحظ أن } u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = 1,05x - 1500$$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1 - u_0 < 0$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 30000 = 1,05u_n - 31500. \quad (4)$$

$$\text{و منه } v_{n+1} = 1,05v_n \text{ أي } v_{n+1} = 1,05(u_n - 30000)$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ وحدها الأول $v_0 = -20000$.

$$\bullet \text{ لدينا } v_n = v_0 q^n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n$$

$$\text{بما أن } u_n = v_n + 30000 \text{ فإن } u_n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n + 3 \times 10^4$$

$$\lim u_n = -\infty \text{ و منه}$$

$$(5) \text{ لدينا } u_8 = 540,89 \text{ و } u_9 = -1027$$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده

يكون دائما ابتداء من سنة 2010.



حل التمرين 18:

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

(1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

$$u_3 = \frac{323}{64} \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4} \times \frac{11}{4} + 2 = \frac{33}{16} + 2 = \frac{65}{16}, \quad u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4} \times 1 + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 8$.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

ج- إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 8$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها وحدّها الأول.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}u_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}u_n - 6 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3 \times 8}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}v_n$$

أي: من أجل كل عدد طبيعي n , $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$. إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 8 = -7$.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n = -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8 \quad \text{إذن: } u_n = v_n + 8 \text{ ومنه: } v_n = u_n - 8 : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

ج - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8 \right] = 8 \quad \text{لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad \left(\text{لاحظ أن: } 0 < \frac{3}{4} < 1 \right)$$

(4) حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = 28 \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right) \quad \text{إذن: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = -7 \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} \right]$$

حساب الجداء P_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n \\ &= v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n) \\ &= (v_0 \times v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0) (q \times q^2 \times \dots \times q^n) \\ &= v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n} \end{aligned}$$

$$P_n = (-7)^{n+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{ومنه:}$$



حل التمرين 19

$$(1) \text{ لدينا } u_0 = 5 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

$$\text{إذن } u_1 = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}, \quad u_2 = \frac{11}{9} + 2 = \frac{29}{9}, \quad u_3 = \frac{29}{27} + 2 = \frac{83}{27}$$

$$(2) \text{ نبين بالتراجع على: } u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$\text{نتحقق من أجل } n=0: u_0 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3 = 2 + 3 = 5 \text{ وهي صحيحة.}$$

$$\text{نفرض أنها صحيحة من أجل عدد طبيعي } n \text{ أي } u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \dots \text{فرضية التراجع}$$

$$\text{ونبين على صحتها من أجل } n+1 \text{ أي نبين على أن } u_{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$$

البرهان : لدينا في نص التمرين :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] + 2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{3} + 2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$$

وهو المطلوب. وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{1}{3} - 1\right] = \frac{-4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0 : (u_n) \text{ تغيرات المتتالية}$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(4) تعيين n بحيث $81u_n = 245$

$$81u_n = 245 \text{ تكافئ } 81\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = 245 \text{ ومنه } 162\left(\frac{1}{3}\right)^n = 245 - 243 = 2$$

$$\text{وبالتالي } \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \text{ وأخيرا } n = 4.$$

(5) حساب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3\right] + \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3\right] + \dots + \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]$$

$$S_n = 2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 3(n+1)$$

$$u_n = 2\left[1 \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right] + 3n + 3 = -3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 3n + 3 = -3^{-n} + 3n + 6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ حساب}$$

$$1.6 - \text{لدينا } u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \text{ ومنه } \frac{u_n - 3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ وبالتالي } v_n = \ln\left(\frac{u_n - 3}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n = -n \ln 3 \text{ ومنه } (v_n)$$

متتالية حسابية أساسها $-\ln 3$ وحدها الأول $v_0 = 0$.

ب- تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = -28 \ln 3$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(-\ln 3 - n \ln 3) = -\frac{n(n+1)}{2} \ln 3$$

$$-\frac{n(n+1)}{2} \ln 3 = -28 \ln 3 \quad \text{ومنه} \quad \frac{n(n+1)}{2} = 28 \quad \text{وبالتالي} \quad n = 7$$



حل التمرين 20:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $\ln u_1 + \ln u_5 = -12$ و $\ln u_2 - \ln u_4 = 4$.

(1) تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_5 = -12 \\ \ln u_2 - \ln u_4 = 4 \\ \ln(u_1 \times u_5) = -12 \\ \ln\left(\frac{u_2}{u_4}\right) = 4 \\ u_1 \times u_5 = e^{-12} \\ \frac{u_2}{u_4} = e^4 \end{cases}$$

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$u_2 = u_0 \times q^2$$

نكتب كل الحدود بدلالة u_0 و q :

$$u_4 = u_0 \times q^4$$

$$u_5 = u_0 \times q^5$$

$$\begin{cases} u_0 \times q \times u_0 \times q^5 = e^{-12} \\ \frac{u_0 \times q^2}{u_0 \times q^4} = e^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0^2 \times q^6 = e^{-12} \\ \frac{1}{q^2} = e^4 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{e^4} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{e^2} \\ q = -\frac{1}{e^2} \end{cases}$$

نقوم بالتعويض في المعادلة نجد:

بما أن حدود المتتالية موجبة معناه: $(q > 0)$ إذن: $q = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$.

حساب u_0 :

$$u_0^2 \times q^6 = e^{-12} \Rightarrow u_0^2 = \frac{e^{-12}}{q^6} = \frac{e^{-12}}{e^{-12}} = 1$$

وبما أن: حدود المتتالية موجبة فإن: $u_0 = 1$.

لدينا:

$$u_0^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(2) عبارة u_n بدلالة n .

لدينا: $q = e^{-2}$ و $u_0 = 1$ و بالتالي: $u_n = 1 \times (e^{-2})^n = e^{-2n}$

(3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = 1 \left(\frac{1 - (e^{-2})^{n+1}}{1 - e^{-2}} \right) = \left(\frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2}} \right) = \frac{1}{1 - e^{-2}} \text{ . استنتج .}$$

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها.

$$v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1} = \ln(e^{-2n}) + \ln(e^{-2n-2}) = -2n - 2n - 2 = -4n - 2$$

$$\text{و بالتالي: } v_n = -4n - 2$$

$$v_{n+1} - v_n = -4$$

اذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -4$ ، وجدها الأول: $v_0 = -2$

ب - حساب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

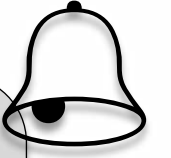
$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1) \left(\frac{-2 - 4n - 2}{2} \right)$$

$$= (n+1)(-2-n) = -2n^2 - 4n - 2$$

تمارين مقترحة

(1) u_n متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 1$ ومن أجل $n \geq 1$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$. (2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$. • عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية . • عبر عن v_n بدلالة n : استنتج عبارة u_n بدلالة n . (3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . (4) عين نهاية المتتالية (u_n) . (5) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$	1
(1) u_n متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n < 2$ أدرس رتبة المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟ نضع : $v_n = u_n - 2$ بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$	2
(1) u_n متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$ (2) v_n متتالية عددية معرفة بالشكل : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب عبارة حدها العام أكتب u_n بدلالة n واحسب ، ماذا تستنتج ؟	4
(1) u_n متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{8} \end{cases}$ أحسب u_1 ، u_2 نضع : $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع $\dot{S}_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$	5
(1) u_n متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة نضع : $\alpha = 0$ ، بين أن بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 4$ أدرس رتبة المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟ نضع : $v_n = u_n - 4$ ، بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r	6

اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n أحسب $\lim u_n$ (u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$ 1. أحسب : u_3, u_2, u_1 2. نضع : $v_n = u_n + \alpha$ ، عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 3. أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n 4. نضع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ أحسب المجموع S ثم عين قيمة n حتى يكون $S = 729$	7
(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 4 \end{cases}$ 1. أحسب : u_3, u_2, u_1 2. نضع : $v_n = u_n + \alpha$ ، عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 3. أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n 4. نضع : $S = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$ أحسب المجموع S	8
(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$ عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة نضع : $\alpha = 0$ ، بين أن بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 1$ أدرس رتبة المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟ نضع : $v_n = u_n - 1$ ، بين أن (v_n) متتالية هندسية وعين أساسها r اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$	9



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ
والتنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي
للصفحة

5min  Maths 